Corrigé de l'épreuve de mathématiques XB2015
Par A. Naimi CPGE Moulay Youssef Rabat

Première partie. :.

1. ..
   (a) C'est une question de cours.
   (b) Soit $y\rangle 0$. D'après ce qui précède,
   $$y\Gamma(y) = \Gamma(y+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^y.dt$$
   D'où l'égalité
   $$\Gamma(y) = y^{-1}.\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^y.dt$$
   D'autre part, en effectuant succéssivement les changements de variables, $x = 1+s$, puis $t = yx$, on obtient :
   $$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\Phi(s)}ds = e^y.\int_0^{+\infty} e^{-yx}.e^{y\ln x}dx = \frac{e^y}{y^y}.y^{-1}.\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^y.dt$$
   ou encore en tenant compte de l'égalité précédente,
   $$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\Phi(s)}ds = \frac{e^y}{y^y}.\Gamma(y)$$
   D'où l'égalité
   $$\Gamma(y) = e^{-y}.y^y.\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\Phi(s)}ds$$
2. ..
   (a) Soient $x\rangle 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

   L'intégrabilité de la fonction $t \to e^{-\frac{t}{x}}.t^\alpha$ sur $[\delta, +\infty[$ découle du fait que $e^{-\frac{t}{x}}.t^\alpha \underset{t\to+\infty}{=} 0\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   D'autre part, après le changement de variables $u = \frac{t}{x}$, on obtient
   $$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^\alpha.dt = x^{\alpha+1}.\int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-u}.u^\alpha.du \text{ (1)}$$
   Mais
   $$e^{-u}.u^\alpha \underset{u\to+\infty}{=} 0\left(e^{-\frac{u}{2}}\right),$$
   et la fonction de droite est positive intégrable au voisinage de $+\infty$.
   Donc par intégration des relations de comparaisons, on obtient
   $$\int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-u}.u^\alpha.du \underset{x\to0^+}{=} 0\left(\int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-\frac{u}{2}}.du\right)$$
   ou encore après simplification du membre de droite, on obtient :
   $$\int_{\frac{\delta}{x}}^{+\infty} e^{-u}.u^\alpha.du \underset{x\to0^+}{=} 0\left(2.e^{-\frac{\delta}{2.x}}\right).$$
   Et en tenant compte de l'égalité (1), on obtient :
   $$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^\alpha.dt \underset{x\to0^+}{=} 0\left(2.x^{\alpha+1}.e^{-\frac{\delta}{2.x}}\right)$$
   Mais
   $$2.x^{\alpha+1}.e^{-\frac{\delta}{2.x}} \underset{x\to0^+}{=} 0(x^n).$$
   D'où
   $$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^\alpha.dt \underset{x\to0^+}{=} 0(x^n).$$
   Montrons maintenant que
   $$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt \underset{x\to0^+}{=} 0(x^n).$$

Par définition de ρ_N, il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \int_{\delta}^{+\infty}\left(e^{-\frac{t}{x}}\sum_{k=0}^{N} a_k.t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}\right)dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right). \\ \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right). \end{cases}$$

En effet, on a d'après ce qui précède, pour tout $k\in\{0,...,N\}$, $\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}.dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right)$.

Donc

$$\sum_{k=0}^{N}\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}.dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right),$$

donc par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{\delta}^{+\infty}\left(e^{-\frac{t}{x}}\sum_{k=0}^{N} a_k.t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}\right)dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right).$$

Il reste à montrer que

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right).$$

Premier cas : $\delta\geq 1$.

Dans ce cas, par l'hypothèse (a) faite sur la fonction f et la croissance de l'intégrale, on obtient : $\forall x\rangle 0$,

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt\right| \leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.\left|f\left(t\right)\right|.dt \leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.C.t^K$$

Mais d'après ce qui précède,

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.C.t^K \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right)$$

D'où

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right).$$

Supposons maintenant $\delta\langle 1$.

D'après ce qui précède,

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right).$$

Reste à montrer que $\int_{\delta}^{1} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right)$ ou encore $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{\delta}^{1} x^n.e^{-t.x}.f\left(t\right).dt\right)=0$.

En effet, on a

$$\begin{cases} \forall t\in\left[\delta,1\right],\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n.e^{-t.x}.f\left(t\right)\right)=0 \\ \forall\left(x,t\right)\in\mathbb{R}_+^*\times\left[\delta,1\right],\ \left|x^n.e^{-t.x}.f\left(t\right)\right|\leq\left(\frac{n}{t}\right)^n.e^{-n}.\left|f\left(t\right)\right| \end{cases}$$

car pour $t\in[\delta,1]$, $\max\limits_{x\rangle 0}\left(x^n.e^{-t.x}\right)=\left(\frac{n}{t}\right)^n.e^{-n}$.

Et en notant $\varphi\left(t\right)=\left(\frac{n}{t}\right)^n.e^{-n}.\left|f\left(t\right)\right|$, alors φ est intégrable sur $[\delta,1]$.

Donc d'après le théorème de convergence dominé, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{\delta}^{1} x^n.e^{-t.x}.f\left(t\right).dt\right)=0$.

D'où

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt=\int_{\delta}^{1} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt+\int_{1}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^n\right)$$

(b) Soit $\varepsilon\rangle 0$.

Par l'hypothèse (b) faite sur la fonction f,

$$\rho_N\left(t\right)\underset{t\to 0}{=} 0\left(t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}\right).$$

Donc il existe $\delta\rangle 0$ tel que pour tout $t\in\left]0,\delta\right]$, $\left|\rho_N\left(t\right)\right|\leq\varepsilon t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}$.

Or la fonction $t \to t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} = \dfrac{1}{t^{1-\frac{N+\lambda}{\mu}}}$ est intégrable et pour $x\rangle 0$,

$$e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t) \underset{t\to 0}{\backsim} \rho_N(t).$$

Donc la fonction $t \to e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t)$ est intégrable sur $]0,\delta]$ et $\left|\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt\right| \leq \varepsilon \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}}.t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} dt.$

Or en éffectuant le changement de variables : $u = \dfrac{t}{x}$, on obtient :

$$\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}}.t^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} dt = x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.\int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u}.u^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} du$$

Donc

$$\left|\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt\right| \leq \varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.\int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u}.u^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} du$$

ou encore

$$\left|\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt\right| \leq \varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.\int_0^{+\infty} e^{-u}.u^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}} du = \varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right)$$

Ou encore

$$\left|\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt\right| \leq C'.\varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}$$

Où on a posé $C' = \Gamma\left(\dfrac{N+\lambda}{\mu}\right)$.

(c) Soit $\varepsilon\rangle 0$.
D'après le 2)b), il existent $\delta\rangle 0$ et $C' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x\rangle 0, \left|\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt\right| \leq C'.\varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \quad (1)$$

D'autre part si on note $n = \left[\dfrac{N+\lambda}{\mu}\right] + 1$, alors

$$x^n \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right).$$

Mais d'après le 2)a),

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0(x^n).$$

Donc par transitivité,

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

Donc il existe $\eta\rangle 0$ tel que pour tout $x \in]0,\eta]$,

$$\left|\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt\right| \leq \varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \quad (2)$$

Donc compte tenues de (1) et (2) et la relation de Schasle, on obtient :

$$\forall x \in]0,\eta], \left|\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt\right| \leq C'.\varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} + \varepsilon.x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}.$$

Et ceci pour tout $\varepsilon\rangle 0$, donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.\rho_N(t).dt \underset{x\to 0^+}{=} 0\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

(d) Soit $x\rangle 0$.

Par l'hypothèse (a) faite sur f, on a $\forall t\geq 1$, $\left|e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right)\right|\leq C.e^{-\frac{t}{x}}.t^{K}$, mais $C.e^{-\frac{t}{x}}.t^{K}\underset{t\to+\infty}{=}0\left(\frac{1}{t^{2}}\right)$.

D'où l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de la fonction $t\to e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right)$.

D'autre part, pour tout $k\in\{0,...,N\}$, la fonction $t\to t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}=\dfrac{1}{t^{1-\frac{k+\lambda}{\mu}}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc par l'hypothès (b) faite sur la fonction f, f est intégrable sur $]0,1]$ et comme $\left|e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right)\right|\underset{t\to 0}{\sim}\left|f(t)\right|$, donc $t\to e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right)$.aussi.

D'où l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t\to e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right)$.
Par suite F est bien définie sur $]0,+\infty[$.
D'autre part si $x\rangle 0$, alors on a succéssivement

$$F\left(x\right)=\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}.f\left(t\right).dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}\left(\sum_{k=0}^{N}a_{k}.t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}+\rho_{N}\left(t\right)\right)dt=\sum_{k=0}^{N}a_{k}\left(\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}.t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}dt\right)+\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}.\rho_{N}$$

Mais pour tout $k\in\{0,...,N\}$, $\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}.t^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}}dt=\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right).x^{\frac{k+\lambda}{\mu}}$.(Après le changement de variable $u=\frac{t}{x}$)

D'autre part, d'après le 2)c), $\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}.\rho_{N}\left(t\right).dt\underset{x\to 0^{+}}{=}0\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$.

D'où

$$F\left(x\right)=\sum_{k=0}^{N}a_{k}.\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right).x^{\frac{k+\lambda}{\mu}}+0\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)\qquad\text{quand } x\to 0^{+}.$$

3. ..

(a) On vérifit que Φ est strictement décroissante sur $]-1,0[$ et $\begin{cases}\lim\limits_{s\to-1^{+}}\Phi\left(s\right)=+\infty\\ \lim\limits_{s\to 0^{-}}\Phi\left(s\right)=0\end{cases}$.

Donc Φ définit par restriction à l'intervalle $]-1,0[$ une bijection de $]-1,0[$ à $]0,+\infty[$.

De même on vérifit que Φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\begin{cases}\lim\limits_{s\to 0^{+}}\Phi\left(s\right)=0\\ \lim\limits_{s\to+\infty^{-}}\Phi\left(s\right)=+\infty\end{cases}$.

Donc Φ définit par restriction à l'intervalle $]0,+\infty[$ une bijection de $]0,+\infty[$ à $]0,+\infty[$.

(b) On sait que la fonction $s\to\ln\left(1+s\right)$ est développable en série entière et

$$\forall s\in\left]-1,1\right[,-\ln\left(1+s\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{s^{k}}{k}$$

Donc pour tout $s\in\left]-1,1\right[$, on a succéssivement :

$$\Phi\left(s\right)=s-\ln\left(1+s\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{s^{k}}{k}+s=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{s^{k}}{k}$$

Mais après changement d'indice et simplification , $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{s^{k}}{k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-1\right)^{k+2}\frac{s^{k+2}}{k+2}=s^{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{s^{k}}{k+2}$

D'où

$$\Phi\left(s\right)=s^{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{s^{k}}{k+2}$$

(c) D'après ce qui précède, développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction Φ est

$$\Phi\left(s\right)=\frac{1}{2}s^{2}-\frac{1}{3}s^{3}+\frac{1}{4}s^{4}+0\left(s^{4}\right)$$

Et celui de la fonction $q \to \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k$ est donné par :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + b_4 q^4 + 0\left(q^4\right)$$

Donc par composition celui de $q \to \Phi\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k\right)$ est donné par :,

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k\right) = \frac{1}{2}b_1^2.q^2 + \left(b_1 b_2 - \frac{1}{3}b_1^3\right).q^3 + \left(b_1 b_3 + \frac{1}{2}b_2^2 - b_1^2 b_2 + \frac{1}{4}b_1^4\right).q^4 + 0\left(q^4\right)$$

Mais par hypothèse, nous avons

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k\right) = q^2 \ (1)$$

au voisinage de 0 dans $[0, +\infty[$.
Donc par unicité du développement limité, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}b_1^2 = 1 \\ b_1 b_2 - \frac{1}{3}b_1^3 = 0 \\ b_1 b_3 + \frac{1}{2}b_2^2 - b_1^2 b_2 + \frac{1}{4}b_1^4 = 0 \end{cases}$$

Et compte tenue de l'hypothèse $b_1 \rangle 0$, on obtient

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{2} \\ b_2 = \frac{2}{3} \\ b_3 = \frac{1}{9.\sqrt{2}} \end{cases}$$

D'autre part, comme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k \underset{q \to 0}{\sim} b_1 q = \sqrt{2}.q,$$

alors la fonction $q \to \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k$ est strictement positive au voisinage à droite de 0.
Et donc la relation (1) ci-dessus devient

$$\Phi_+\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k\right) = q^2,$$

au voisinage à droite de 0.
Ou encore

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k.q^k = \Phi_+^{-1}\left(q^2\right) \ (2)$$

au voisinage à droite de 0.
Donc

$$\Phi_+^{-1}\left(q^2\right) = b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + 0\left(q3\right)$$

au voisinage à droite de 0.
Ou encore

$$\Phi_+^{-1}(q) = b_1\sqrt{q} + b_2 q + b_3 q^{\frac{3}{2}} + 0\left(q^{\frac{3}{2}}\right)$$

au voisinage à droite de 0.
Et en tenant compte des valeurs de b_1, b_2 et b_3, on obtient :

$$\Phi_+^{-1}(q) = \sqrt{2q} + \frac{2}{3}q + \frac{1}{9\sqrt{2}}q^{\frac{3}{2}} + 0\left(q^{\frac{3}{2}}\right)$$

au voisinage à droite de 0.
D'autre part, compte tenue de ce qui précède, on a succéssivement,

$$\begin{aligned}
\left(\Phi_{+}^{-1}\right)'(q) &= \frac{1}{\Phi'_{+}\left(\Phi_{+}^{-1}(q)\right)} \quad \text{(expression de la dérivée d'une réciproque)}\\
&= \frac{1}{\Phi'\left(\Phi_{+}^{-1}(q)\right)}\\
&= \frac{1+\Phi_{+}^{-1}(q)}{\Phi_{+}^{-1}(q)} \quad \left(\text{puisque } \Phi'(s)=\frac{s}{1+s}\right)\\
&= 1+\frac{1}{\Phi_{+}^{-1}(q)}\\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2q}+\frac{2}{3}q+\frac{1}{9\sqrt{2}}q^{\frac{3}{2}}+0\left(q^{\frac{3}{2}}\right)} \text{ quand } q\to 0,\ q\rangle 0\\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2q}}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2q}}{3}+\frac{1}{18}q+0(q)} \text{ quand } q\to 0,\ q\rangle 0\\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2q}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2q}}{3}+\frac{1}{18}q\right)+\left(\frac{\sqrt{2q}}{3}+\frac{1}{18}q\right)^2+0(q)\right) \text{ quand } q\to 0,\ q\rangle 0\\
&= \frac{1}{\sqrt{2q}}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}}+0\left(\sqrt{q}\right) \text{ quand } q\to 0,\ q\rangle 0
\end{aligned}$$

D'où

$$\left(\Phi_{+}^{-1}\right)'(q)=\frac{1}{\sqrt{2q}}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{q}}{6\sqrt{2}}+0\left(\sqrt{q}\right) \text{ quand } q\to 0, q\rangle 0$$

Ce développement peut-être obtenu en dérivant l'égalité (2).

On fait de même pour Φ_{-}^{-1} et $\left(\Phi_{-}^{-1}\right)'$.

(d) Soit $y\rangle 0$.
En tenant compte du $1.b$ et en utilisant la relation de Schasle, on a succéssivement,

$$\begin{aligned}
\Gamma(y) &= e^{-y}.y^{y}.\int_{-1}^{+\infty} e^{-y.\Phi(s)}.ds\\
&= e^{-y}.y^{y}.\int_{-1}^{0} e^{-y.\Phi(s)}.ds+e^{-y}.y^{y}.\int_{0}^{+\infty} e^{-y.\Phi(s)}.ds\\
&= e^{-y}.y^{y}.\int_{-1}^{0} e^{-y.\Phi_{-}(s)}.ds+e^{-y}.y^{y}.\int_{0}^{+\infty} e^{-y.\Phi_{+}(s)}.ds
\end{aligned}$$

Mais Φ_{-} (resp Φ_{+}) est un C^1 difféomorphisme de $]-1,0[$ dans $]0,+\infty[$ (resp de $]0,+\infty[$ dans lui même), donc par le changement de variables : $q=\Phi_{-}(s)$ dans la première intégrale et $q=\Phi_{+}(s)$ dans la deuxième, on obtient :

$$\Gamma(y)=-e^{-y}.y^{y}.\int_{0}^{+\infty} e^{-y.q}.\left(\Phi_{-}^{-1}\right)'(q).dq+e^{-y}.y^{y}.\int_{0}^{+\infty} e^{-y.q}.\left(\Phi_{+}^{-1}\right)'(q).dq$$

Enfin par la relation de Schasle, on obtient l'égalité :

$$\Gamma(y)=e^{-y}.y^{y}.\int_{0}^{+\infty} e^{-y.q}.\left(\left(\Phi_{+}^{-1}\right)'(q)-\left(\Phi_{-}^{-1}\right)'(q)\right).dq$$

(e) Notons pour $t\rangle 0$, $f(t)=\left(\Phi_{+}^{-1}\right)'(t)-\left(\Phi_{-}^{-1}\right)'(t)$.
On a d'après ce qui précède,

$$\forall t\geq 1, \left|\left(\Phi_{+}^{-1}\right)'(t)\right|=\left|1+\frac{1}{\Phi_{+}^{-1}(t)}\right|$$

Donc par croissance et positivité de Φ_{+}^{-1}, $\left|1+\frac{1}{\Phi_{+}^{-1}(t)}\right|=1+\frac{1}{\Phi_{+}^{-1}(t)}\leq 1+\frac{1}{\Phi_{+}^{-1}(1)}$.

Donc

$$\forall t\geq 1, \left|\left(\Phi_{+}^{-1}\right)'(t)\right|\leq 1+\frac{1}{\Phi_{+}^{-1}(1)}.$$

De même, on vérifit que

$$\forall t\geq 1, \left|\left(\Phi_{-}^{-1}\right)'(t)\right|\leq 1-\frac{1}{\Phi_{-}^{-1}(1)}.$$

Par suite

$$\forall t\geq 1, |f(t)|\leq 2+\frac{1}{\Phi_{+}^{-1}(1)}-\frac{1}{\Phi_{-}^{-1}(1)}.$$

Donc f vérifie l'hypothèse (a) du 2, avec $C = 2 + \dfrac{1}{\Phi_+^{-1}(1)} - \dfrac{1}{\Phi_-^{-1}(1)}$ et $K = 0$

D'autre part, d'après le $3c.$,

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{t}} + \frac{\sqrt{2}}{6}.\sqrt{t} + 0\left(\sqrt{t}\right) \quad \text{quand } t \to 0^+$$

Donc f vérifie l'hypothèse (b) du 2, avec $N = 1$, $\mu = 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

On conclut alors par le $2.d$ que $F(x) = \sqrt{2}.\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right).x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{6}.\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right).x^{\frac{3}{2}} + 0\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$. quand $x \to 0^+$

Où

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.f(t).dt$$

Donc par composition :

$$\int_0^{+\infty} e^{-y.t}.f(t).dt = \sqrt{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6}.\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + 0\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \text{ quand } y \to +\infty$$

Donc compte tenue de la question précédente,

$$\Gamma(y) = e^{-y}.y^y.\int_0^{+\infty} e^{-y.t}.f(t).dt = e^{-y}.y^y\sqrt{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + e^{-y}.y^y\frac{\sqrt{2}}{6}.\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + 0\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \text{ quand } y \to +\infty$$

Mais $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et compte tenue du $1a$, $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}.\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'où

$$\Gamma(y) = e^{-y}.y^y\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{12.y} + 0\left(\frac{1}{y}\right)\right) \text{ quand } y \to +\infty$$

4. Soit $x\rangle 0$, alors $t \to e^{-\frac{t}{x}}.t^{-1}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et $e^{-\frac{t}{x}}.t^{-1} \underset{t\to+\infty}{=} 0\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $F(x)$ est bien définie et par le changement de variable : $u = \dfrac{t}{x}$,

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}.du.$$

En particulier F est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x\rangle 0$, $F'(x) = -\dfrac{1}{x}.e^{-\frac{1}{x}}$.

On conclut alors que F est C^∞ sur $]0, +\infty[$ puisque F' l'est.

Remarque : On pourra aussi utiliser le théorème de Leibniz

5. Procedons par récurrence.

Initialisation :

Soit $x\rangle 0$, alors par intégration par parties,

$$F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{-1}.dt = \left[\left(-x.e^{-\frac{t}{x}}\right).t^{-1}\right]_1^{+\infty} - x.\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{-2}$$

Donc après simplification,

$$F(x) = S_1(x) + R_1(x)$$

D'où le résultat pour $N = 1$.

Hérédité :

Soit $N \geq 1$ et supposons pour tout $x\rangle 0$, $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$.

Pour tout $x\rangle 0$, on a par intégration par parties,

$$R_N(x) = (-1)^N N!.x^N.\left(\left[\left(-x.e^{-\frac{t}{x}}\right).t^{-(N+1)}\right]_1^{+\infty} - x(N+1).\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{-(N+2)}.dt\right)$$

ou encore, après simplification,

$$R_N(x) = (-1)^N N!.x^{N+1}.e^{-\frac{1}{x}} + (-1)^{N+1}(N+1)!.x^{N+1}.\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{-(N+2)}.dt$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_N(x)+R_N(x) &= \left(S_N(x)+(-1)^N N!.x^{N+1}.e^{-\frac{1}{x}}\right)+(-1)^{N+1}(N+1)!.x^{N+1}.\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{-(N+2)}.dt \\
&= S_{N+1}(x)+(-1)^{N+1}(N+1)!.x^{N+1}.\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.t^{-(N+2)}.dt \\
&= S_{N+1}(x)+R_{N+1}(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$F(x)=S_{N+1}(x)+R_{N+1}(x).$$

D'où la récurrence.

6. ...
   (a) Il s'agit d'une série entière dont le rayon de convergence est 0, par la règle de Dalembert.
   Par suite cette série converge uniquement pour $x=0$.
   Montrons maintenant par l'absurde et supposons que cette suite est bornée, alors d'après le 5., la suite $(S_N(x))_{N\geq 1}$ est bornée, donc la suite $(S_{2N}(x))_{N\geq 1}$ est aussi bornée ; mais cette suite est décroissante à partir d'un certain rang, puisque

   $$\forall N\geq 1, S_{2N+2}(x)-S_{2N}(x)=(2N)!.x^{2N+1}.e^{-\frac{1}{x}}.(1-(2N+1).x)$$

   Donc la suite $(S_{2N}(x))_{N\geq 1}$ converge, donc la suite $(S_{2N+2}(x)-S_{2N}(x))_{N\geq 1}$ converge vers 0.
   Mais d'après ce qui précède,

   $$S_{2N+2}(x)-S_{2N}(x)\sim-(2N+1)!.x^{2N+2}.e^{-\frac{1}{x}}$$

   Ce qui est impossible puisque la suite$\left((2N+1)!.x^{2N+2}\right)_{N\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
   D'où la suite $(R_N(x))_{N\geq 1}$ est bornée.

   (b) Si $N\geq 1$ et $x\rangle 0$, alors

   $$|R_N(x)|=N!.x^N.\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t^{N+1}}.dt\leq N!.x^N.\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}.dt=N!.x^{N+1}.e^{-\frac{1}{x}}=|r_N(x)|.$$

   Et

   $$|R_{N+1}(x)|\leq|r_{N+1}(x)|$$

   Mais

   $$|r_{N+1}(x)|=(N+1)!.x^{N+2}.e^{-\frac{1}{x}}\underset{x\to 0}{=}0\left(|r_N(x)|=N!.x^{N+1}.e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

   D'où

   $$|R_{N+1}(x)|\underset{x\to 0}{=}0(|r_N(x)|)$$

   (c) Soient $N\geq 1$ et $x\rangle 0$.
   Alors par intégration par parties,

   $$R_N(x)=r_N(x)+R_{N+1}(x).$$

   Donc

   $$R_N(x)-r_N(x)=R_{N+1}(x).$$

   Donc compte tenue de ce qui précède,

   $$R_N(x)-r_N(x)\underset{x\to 0}{=}0(r_N(x))$$

   D'où

   $$R_N(x)\underset{x\to 0}{\sim}r_N(x).$$

   (d) Pour $N\geq 1$, on a $\dfrac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|}=(N+1).x\leq 1$ ssi $N\leq\left[\dfrac{1}{x}\right]-1$.
   Donc la suite $(|r_N(x)|)_{N\geq 1}$ est décroissante jusqu'au rang $\left[\dfrac{1}{x}\right]$, puis croissante.

7. ..
   (a) On a succéssivement :

   $$\left\{\begin{aligned}
   S_N(x) &= \sum_{k=1}^{2M}(-1)^{k-1}.(k-1)!.x^k.e^{-\frac{1}{x}} \\
   &= \sum_{k=1}^{2M}(-1)^{k-1}.|r_{k-1}(x)| \\
   &= \sum_{k=0}^{2M-1}(-1)^k.|r_k(x)| \\
   &= \sum_{k=0}^{M-1}(|r_{2k}(x)|-|r_{2k+1}(x)|)
   \end{aligned}\right.$$

Mais d'après ce qui précède, la suite $\left(|r_N(x)|\right)_{N\geq 1}$ est décroissante jusqu'au rang $\left[\dfrac{1}{x}\right]$, d'autre part $0\langle x \leq \dfrac{1}{N}$, donc pour tout $k \in \{0, ..., M-1\}$, $|r_{2k}(x)| \geq |r_{2k+1}(x)|$.
Par suite $S_N(x) \geq 0$.
D'autre part, on a succéssivement :

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{M-1}(1-(2l+1)x).(2l)!.x^{2l+1} &= \sum_{l=0}^{M-1}(2l)!.x^{2l+1} - \sum_{l=0}^{M-1}(2l+1)!.x^{2l+2} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1}(-1)^{2l}.(2l)!.x^{2l+1} + \sum_{l=0}^{M-1}(-1)^{2l+1}.(2l+1)!.x^{2l+2} \\ &= \sum_{k=1}^{2M}(-1)^{k-1}.(k-1)!.x^k \\ &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}.(k-1)!.x^k \\ &= S_N(x).e^{\frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

Mais $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$ et $R_N(x) = R_{2M}(x) \geq 0$, donc $F(x) \geq S_N(x)$ ou encore en tenant compte de l'égalité précédente,

$$F(x) \geq \left(\sum_{l=0}^{M-1}(1-(2l+1)x).(2l)!.x^{2l+1}\right).e^{-\frac{1}{x}}.$$

Par suite,

$$E_N(x) = \left|\frac{R_N(x)}{F(x)}\right| \leq \frac{|R_N(x)|}{\left(\sum\limits_{l=0}^{M-1}(1-(2l+1)x).(2l)!.x^{2l+1}\right).e^{-\frac{1}{x}}}.$$

Mais

$$|R_N(x)| = N!.x^N.\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t^{N+1}}.dt \leq N!.x^N.\int_1^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}.dt = N!.x^{N+1}.e^{-\frac{1}{x}}.$$

D'où l'inégalité,

$$E_N(x) = \left|\frac{R_N(x)}{F(x)}\right| \leq \frac{N!.x^{N+1}}{\sum\limits_{l=0}^{M-1}(1-(2l+1)x).(2l)!.x^{2l+1}}.$$

(b) Simple vérification.

8. Soient f dans $C_{sep}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et soit $\varepsilon\rangle 0$.
Par définition de cet ensemble, ils existent $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n \in C_{per}(\mathbb{R})$, tels que pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\theta_1).g_i(\theta_2).$$

Mais l'ensemble des polynômes trigonométriques d'une variable réelle est dense dans $C_{per}(\mathbb{R})$.
Donc pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, ils existent P_i, Q_i des polynôme trigonométriques d'une variable réelle, tels que

$$\left\{\begin{array}{l}\|f_i - P_i\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2n\left(\|g_i\|_\infty + 1\right)} \\ \|g_i - Q_i\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2n.\left(\|P_i\|_\infty + 1\right)}\end{array}\right. .$$

Par ailleur, si on note R la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, par $R(\theta_1, \theta_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i(\theta_1).Q_i(\theta_2)$.
Alors d'une part, on vérifie qu'il s'agit d'un polynôme trigonométrique de deux variables et d'autre part, on a succéssivement :

$$\left\{\begin{array}{r}\forall\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2,\ |f(\theta) - R(\theta)| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\theta_1).g_i(\theta_2) - \sum\limits_{i=1}^{n} P_i(\theta_1).Q_i(\theta_2)\right| \\ = \left|\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f_i(\theta_1).g_i(\theta_2) - P_i(\theta_1).Q_i(\theta_2)\right)\right| \\ = \left|\sum\limits_{i=1}^{n}\left((f_i(\theta_1) - P_i(\theta_1)).g_i(\theta_2) + (g_i(\theta_2) - Q_i(\theta_2)).P_i(\theta_1)\right)\right| \\ \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\left(|f_i(\theta_1) - P_i(\theta_1)|.|g_i(\theta_2)| + |g_i(\theta_2) - Q_i(\theta_2)|.|P_i(\theta_1)|\right) \\ \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\|f_i - P_i\|_\infty.\|g_i\|_\infty + \|g_i - Q_i\|_\infty.\|P_i\|_\infty\right) \\ \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\varepsilon}{2n\left(\|g_i\|_\infty + 1\right)}.\|g_i\|_\infty + \dfrac{\varepsilon}{2n.\left(\|P_i\|_\infty + 1\right)}.\|P_i\|_\infty\right) \\ \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\varepsilon}{2n} + \dfrac{\varepsilon}{2n}\right) = \varepsilon.\end{array}\right.$$

D'où

$$\|f-R\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

On conclue alors que l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $C_{sep}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

9. Comme Ψ_j est $1-$périodique et continue sur un segment de longueur 1, à savoir $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $\Psi_{j,k}$ aussi. Et sa $1-$périodicité provient de la $1-$périodicité de laa fonction Ψ_j.

10. ..

   (a) D'après le 9., pour tout k_1,k_2 dans $\{0,\dots,j-1\}$, Ψ_{j,k_1} et Ψ_{j,k_2} sont dans $C_{per}(\mathbb{R})$, donc les applications $(\theta_1,\theta_2)\to \Psi_{j,k_1}(\theta_1).\Psi_{j,k_2}(\theta_2)$ sont dans $C_{sep}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et ce dernier est un espace vectoriel.
   Par suite, $S_j(f)\in C_{sep}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

   D'autre part, montrons le lemme : pour $k\in\{0,\dots,j-1\}$ et $l\in\mathbb{Z}$, $\Psi_{j,k}\left(\frac{l}{j}\right)=\Psi_j\left(\frac{l-k}{j}\right)=\delta_{l,k}$ (Symbole de Kcroneker)

   En effet, si $l=k$, alors $\Psi_j\left(\frac{l-k}{j}\right)=\Psi_j(0)=\max(0,1)=1$.
   Supposons maintenant $l\neq k$, donc $|l-k|\geq 1$.
   D'autre part, comme Ψ_j est $1-$périodique, alors quitte à faire la division euclidienne de l par j, on peut supposer $l\in\{0,\dots,j-1\}$; par suite $|l-k|\leq j-1$.
   On a donc $\frac{1}{j}\leq\left|\frac{l-k}{j}\right|\leq\frac{j-1}{j}=1-\frac{1}{j}$ et un petit calcul, montre que Ψ_j est nulle sur $\left[\frac{1}{j},1-\frac{1}{j}\right]$ (ou dresser le graphe de Ψ_j). Donc $\Psi_j\left(\left|\frac{l-k}{j}\right|\right)=0$. Mais Ψ_j est pair puisqu'elle est $1-$périodique et pair sur un intervalle de longueur 1 à savoir $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; donc $\Psi_j\left(\frac{l-k}{j}\right)=\Psi_j\left(\left|\frac{l-k}{j}\right|\right)=0$. D'où le resultat.
   Et si $(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}^2$, alors via le lemme, on a succéssivement,

$$\begin{aligned}
S_j(f)\left(\frac{l_1}{j},\frac{l_2}{j}\right) &= \sum_{k_1=0}^{j-1}.\sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right).\Psi_{j,k_1}\left(\frac{l_1}{j}\right).\Psi_{j,k_2}\left(\frac{l_2}{j}\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{j-1}.\sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right).\Psi_j\left(\frac{l_1-k_1}{j}\right).\Psi_j\left(\frac{l_2-k_2}{j}\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{j-1}.\sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right).\delta_{l_1,k_1}.\delta_{l_2,k_2} \text{ (d'après lemme)}\\
&= f\left(\frac{l_1}{j},\frac{l_2}{j}\right)
\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

   (b) On montre que si $0\leq k,l\leq j-1$ et $\theta\in\left[\frac{k}{j},\frac{k+1}{j}\right[$, alors $\Psi_{j,l}(\theta)=\begin{cases} 0 \text{ si } l\notin\{k,k+1\}\\ k+1-j\theta \text{ si } l=k\\ -k+j\theta \text{ si } l=k+1\end{cases}$

   Et comme $(\theta_1,\theta_2)\in\left[\frac{k_1}{j},\frac{k_1+1}{j}\right[\times\left[\frac{k_2}{j},\frac{k_2+1}{j}\right[$, alors on a succéssivement,

$$\left\{\begin{array}{l}
S_j(f)(\theta_1,\theta_2)=\sum\limits_{l_1=0}^{j-1}.\sum\limits_{l_2=0}^{j-1} f\left(\frac{l_1}{j},\frac{l_2}{j}\right).\Psi_{j,l_1}(\theta_1).\Psi_{j,l_2}(\theta_2)\\
=\sum\limits_{(l_1,l_2)\in\{k_1,k_1+1\}\times\{k_2,k_2+1\}} f\left(\frac{l_1}{j},\frac{l_2}{j}\right).\Psi_{j,l_1}(\theta_1).\Psi_{j,l_2}(\theta_2)\\
=f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right).(k_1+1-j\theta_1).(k_2+1-j\theta_2)+\\
f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2}{j}\right).(-k_1+j\theta_1).(k_2+1-j\theta_2)+\\
f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2+1}{j}\right).(k_1+1-j\theta_1).(-k_2+j\theta_2)+\\
f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2+1}{j}\right).(-k_1+j\theta_1).(-k_2+j\theta_2)
\end{array}\right..$$

   Et on vérifie que

$$(k_1+1-j\theta_1).(k_2+1-j\theta_2)+(-k_1+j\theta_1).(k_2+1-j\theta_2)+(k_1+1-j\theta_1).(-k_2+j\theta_2)+(-k_1+j\theta_1).(-k_2+j\theta_2)=1$$

   Donc $S_j(f)(\theta_1,\theta_2)$ est barycentre des points $f\left(\frac{l_1}{j},\frac{l_2}{j}\right)$ où $(l_1,l_2)\in\{k_1,k_1+1\}\times\{k_2,k_2+1\}$.
   Notons

$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha=(k_1+1-j\theta_1).(k_2+1-j\theta_2)\\
\beta=(k_1+2-j\theta_1).(k_2+1-j\theta_2)\\
\gamma=(k_1+1-j\theta_1).(k_2+2-j\theta_2)\\
\delta=(k_1+2-j\theta_1).(k_2+2-j\theta_2)
\end{array}\right.$$

Soit maintenant $\varepsilon\rangle 0$.

La continuité de f sur $\mathbb{R}^2$ donc sur le compact $[0,1]\times[0,1]$ assure l'uniforme continuité sur ce compact. Donc

$$\exists\alpha\rangle 0, \forall\left((x,y),(x',y')\right)\in[0,1]^2\times[0,1]^2,\ \left(\left\{\begin{array}{l}|x-x'|\leq\alpha\\ |y-y'|\leq\alpha\end{array}\right.\Rightarrow\left|f(x,y)-f(x',y')\right|\leq\varepsilon\right).(*)$$

D'autre part, soit $j_0\geq 2$ tel que $\left(\forall j\geq j_0, \dfrac{1}{j}\leq\alpha\right)$ (**).

Et soit $j\geq j_0$, alors pour tout $(k_1,k_2)\in\{0,...,j-1\}\times\{0,...,j-1\}$ et pour tout $(\theta_1,\theta_2)\in\left[\dfrac{k_1}{j},\dfrac{k_1+1}{j}\right[\times\left[\dfrac{k_2}{j},\dfrac{k_2+1}{j}\right[$, $\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|=\left|\begin{array}{c}\alpha\left(f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right)-f(\theta_1,\theta_2)\right)+\beta\left(f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2}{j}\right)-f(\theta_1,\theta_2)\right)+\gamma\left(f\left(\frac{k_1}{j},\right.\right.\\ +\delta\left(f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2+1}{j}\right)-f(\theta_1,\theta_2)\right)\end{array}\right.$

Et compte tenue de (*) et (**), on obtient : $\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|\leq\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon=\varepsilon$.

Donc $\forall j\geq j_0$ et $\forall(k_1,k_2)\in\{0,...,j-1\}\times\{0,...,j-1\}$

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\left[\frac{k_1}{j},\frac{k_1+1}{j}\right[\times\left[\frac{k_2}{j},\frac{k_2+1}{j}\right[}\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|\leq\varepsilon.$$

Donc $\forall j\geq j_0$,

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\bigcup\limits_{(k_1,k_2)\in\{0,...,j-1\}\times\{0,...,j-1\}}\left[\frac{k_1}{j},\frac{k_1+1}{j}\right[\times\left[\frac{k_2}{j},\frac{k_2+1}{j}\right[}\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|\leq\varepsilon$$

Ou encore $\forall j\geq j_0$,

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in[0,1[\times[0,1[}\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|\leq\varepsilon.$$

Mais les $S_j(f)$ et f sont $1-$périodiques, donc

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in[0,1[\times[0,1[}\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|=\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2}\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|$$

D'où

$$\forall j\geq j_0, \left\|S_j(f)-f\right\|_\infty=\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2}\left|S_j(f)(\theta_1,\theta_2)-f(\theta_1,\theta_2)\right|\leq\varepsilon$$

Par suite

$$\lim_{j\to+\infty}\left\|S_j(f)-f\right\|_\infty=0$$

11. D'après le 8., l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $C_{sep}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et d'après le 10., ce dérnier est dense dans $C_{per}\left(\mathbb{R}^2\right)$, donc par transitivité l'ensemble des polynômes trigonométriques en deux variables est dense dans $C_{per}\left(\mathbb{R}^2\right)$.
12. Si (F,α) est solution de (3) alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{c}F'(t)=f(\alpha(t))\\ \alpha'(t)=\omega\end{array}\right.$, donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{c}F(t)=\int_0^t f(\alpha(s)).ds+F(0)\\ \alpha(t)=t.\omega+\alpha(0)\end{array}\right.$

    Et si de plus $\left\{\begin{array}{c}F(0)=0\\ \alpha(0)=(0,0)\end{array}\right.$, alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{c}F(t)=\int_0^t f(\alpha(s)).ds\\ \alpha(t)=t.\omega\end{array}\right.$. Réciproque immédiate.
13. Comme $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ est supposé résonnant, alors par définition, il existe $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que $k_1\omega_1+k_2\omega_2=0$.

    D'autre part si on pose $f(\theta_1,\theta_2)=e^{2i\pi(k_1.\theta_1+k_2.\theta_2)}$ pour $(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$, alors f est continue et $1-$périodique en chacun de ses

    arguments et $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t.\omega)=e^{2i\pi(k_1.t.\omega_1+k_2.t.\omega_2)}=e^{2i\pi.t(k_1.\omega_1+k_2.\omega_2)}=e^0=1$.

    Donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\int_0^t f(s.\omega).ds=t$ ou encore d'après le 12., $\forall t\in\mathbb{R}$, $F(t)=t^{2i\pi.(l_1.\omega_1+l_2.\omega_2)}$.
14. ...
    (a) Il suffit de montrer ce résultat pour les polynômes trigonométriques de la forme $f(\theta_1,\theta_2)=e^{2i\pi(l_1.\theta_1+l_2.\theta_2)}$, avec $(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}^2$.

    Dans ce cas, on a d'après le 12.,

    $$\forall t\in\mathbb{R}, F(t)=\int_0^t f(s.\omega).ds=\int_0^t e^{2i\pi(l_1.s.\omega_1+l_2.s.\omega_2)}.ds=\int_0^t e^{2i\pi.s(l_1.\omega_1+l_2.\omega_2)}.ds$$

    Mais comme ω n'est pas résonnant, alors $l_1.\omega_1+l_2.\omega_2\neq 0$, donc

    $$\forall t\in\mathbb{R}, \int_0^t e^{2i\pi.s(l_1.\omega_1+l_2.\omega_2)}.ds=\left[\frac{1}{2i\pi.(l_1.\omega_1+l_2.\omega_2)}.e^{2i\pi.s(l_1.\omega_1+l_2.\omega_2)}\right]_0^t=\frac{1}{2i\pi.(l_1.\omega_1+l_2.\omega_2)}\left(e^{2i\pi.t(l_1.\omega_1+l_2.\omega_2)}-1\right)$$

    Par suite

    $$\forall t\in\mathbb{R}, |F(t)|\leq\frac{2}{2\pi.l_1.|\omega_1+l_2.\omega_2|}$$

(b) Soit $\varepsilon\rangle 0$.

Alors d'après le 11., il existe un polynôme trigonométrique Q à deux variables, tel que $\|f-Q\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc

$$\forall t \geq 0, \int_0^t |f(s.\omega) - Q(s.\omega)| .ds \leq t. \|f-Q\|_\infty \leq t.\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, d'après le 14.a, la fonction $t \to \int_0^t Q(s.\omega).ds$ est bornée sur $\mathbb{R}$; donc il existe une constante réel positif C tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left|\int_0^t Q(s.\omega).ds\right| \leq C$$

Donc on a succéssivement, $\forall t \geq \dfrac{2}{\varepsilon}.C$, $\left\{\begin{array}{c} |F(t)| = \left|\int_0^t f(s.\omega).ds\right| \\ = \left|\int_0^t (f(s.\omega)-Q(s.\omega)).ds + \int_0^t Q(s.\omega).ds\right| \\ \leq \int_0^t |f(s.\omega)-Q(s.\omega)|.ds + \left|\int_0^t Q(s.\omega).ds\right| \\ \leq t.\dfrac{\varepsilon}{2} + C \\ \leq t.\dfrac{\varepsilon}{2} + t.\dfrac{\varepsilon}{2} = t.\varepsilon \end{array}\right.$

En résumé,

$$\forall t \geq \frac{2}{\varepsilon}.C, |F(t)| \leq t.\varepsilon$$

Par suite, $F(t) = 0(t)$ quand $t \to +\infty$.

15. ..

(a) Commencons par montrer que $\int_0^1\int_0^1 (dh(\theta).\omega).d\theta_1 d\theta_2 = 0$.

En éffet, par définition de l'intégrale double on a :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1,\theta_2).d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1,\theta_2).d\theta_1\right) d\theta_2 = \int_0^1 (h(1,\theta_2) - h(0,\theta_2))\, d\theta_2.$$

Mais h étant $1-$périodique, donc $\forall \theta_2 \in \mathbb{R}$, $h(1,\theta_2) - h(0,\theta_2) = 0$.

D'où

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1,\theta_2).d\theta_1 d\theta_2 = 0$$

De même, on a

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1,\theta_2).d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1,\theta_2).d\theta_2\right) d\theta_1 = \int_0^1 (h(\theta_1,1) - h(\theta_1,0))\, d\theta_1.$$

Et pour la même raison que tout à l'heure,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1,\theta_2).d\theta_1 d\theta_2 = 0$$

Or, pour tout $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$dh(\theta).\omega = \omega_1.\frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2.\frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta)$$

D'où

$$\int_0^1\int_0^1 (dh(\theta).\omega).d\theta_1 d\theta_2 = 0.$$

Par ailleur, comme on a pour tout $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$, $dh(\theta).\omega + g(\theta) = \upsilon$, alors

$$\int_0^1\int_0^1 (dh(\theta).\omega + g(\theta)).d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^1\int_0^1 \upsilon.d\theta_1 d\theta_2$$

Mais on vérifie que

$$\int_0^1\int_0^1 \upsilon.d\theta_1 d\theta_2 = \upsilon$$

Donc par linéarité de l'intégrale double et compte tenue de ce qui précède, on obtient :

$$\upsilon = \int_0^1\int_0^1 g(\theta_1,\theta_2).d\theta_1 d\theta_2$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} \upsilon_1 = \int_0^1\int_0^1 g_1(\theta_1,\theta_2).d\theta_1 d\theta_2 \\ \upsilon_2 = \int_0^1\int_0^1 g_2(\theta_1,\theta_2).d\theta_1 d\theta_2 \end{array}\right.$$

où on a noté $\upsilon = (\upsilon_1,\upsilon_2)$ et g_1, g_2 les fonctions cordoonnées de g

D'autre part, si on note h_1, h_2 les fonctions cordoonnées de h alors l'équation (4) devient

$$: \left\{\begin{array}{l} \omega_1.\dfrac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2.\dfrac{\partial h_1}{\partial \theta_2}(\theta) + g_1(\theta) = \upsilon_1 \text{ (1)} \\ \omega_1.\dfrac{\partial h_2}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2.\dfrac{\partial h_2}{\partial \theta_2}(\theta) + g_2(\theta) = \upsilon_2 \text{ (2)} \end{array}\right.$$

Comme g_1 est un polynôme trigonométrique à valeurs réels, alors il est de la forme

$$g_1(\theta) = \sum_{k=(k_1,k_2)\in\{0,\dots,n\}^2} (\alpha_k.\cos 2\pi(k.\theta) + \beta_k.\sin 2\pi(k.\theta))$$

Dans ce cas,

$$\upsilon_1 = \int_0^1\int_0^1 \left(\sum_{k=(k_1,k_2)\in\{0,\dots,n\}^2} (\alpha_k.\cos 2\pi(k.\theta) + \beta_k.\sin 2\pi(k.\theta))\right).d\theta_1 d\theta_2$$

Mais un calcul simple montre que pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{cases} \int_0^1\int_0^1 \cos 2\pi(k.\theta).d\theta_1 d\theta_2 = \delta_{k_1,0}.\delta_{k_2,0} = \delta_{(k_1,k_2),(0,0)} \\ \int_0^1\int_0^1 \sin 2\pi(k.\theta).d\theta_1 d\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Donc par linéarité

$$\upsilon_1 = \sum_{k=(k_1,k_2)\in\{0,\dots,n\}^2} \alpha_k.\delta_{(k_1,k_2),(0,0)} = \alpha_{(0,0)}.$$

Et l'èquation au dérivée partielle (1) devient :

$$\omega_1.\frac{\partial h_1}{\partial\theta_1}(\theta) + \omega_2.\frac{\partial h_1}{\partial\theta_2}(\theta) = \alpha_{(0,0)} - \sum_{k=(k_1,k_2)\in\{0,\dots,n\}^2} (\alpha_k.\cos 2\pi(k.\theta) + \beta_k.\sin 2\pi(k.\theta))$$

ou encore

$$\omega_1.\frac{\partial h_1}{\partial\theta_1}(\theta) + \omega_2.\frac{\partial h_1}{\partial\theta_2}(\theta) = \sum_{k=(k_1,k_2)\in\{0,\dots,n\}^2\setminus\{(0,0)\}} (\alpha_k.\cos 2\pi(k.\theta) + \beta_k.\sin 2\pi(k.\theta))$$

Alors en cherchant une solution de la forme

$$(\theta_1, \theta_2) \to \sum_{k=(k_1,k_2)\in\{0,\dots,n\}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\alpha'_k.\cos 2\pi(k.\theta) + \beta'_k.\sin 2\pi(k.\theta)\right)$$

et en supposant ω non résonnant, on vérifie que l'application

$$(\theta_1, \theta_2) \to \sum_{k=(k_1,k_2)\in\{0,\dots,n\}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\frac{\beta_k}{2\pi(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)}.\cos 2\pi(k.\theta) - \frac{\alpha_k}{2\pi(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)}.\sin 2\pi(k.\theta)\right)$$

est une solution de (1).Et on fait de même pour l'équation (2).

(b) Comme α et h sont C^1, alors par les operations algébriques, la fonction $\widetilde{\alpha}$ est C^1sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel,

$$\widetilde{\alpha}'(t) = \alpha'(t) + x.dh(\alpha(t)).\alpha'(t).$$

Mais α est solution du problème (3) et h solution de l'équation (4), alors on a succéssivement :

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha}'(t) = (\omega + xg(\alpha(t))) + x.dh(\alpha(t)).(\omega + xg(\alpha(t))) \\ = \omega + x(g(\alpha(t)) + dh(\alpha(t)).\omega) + x^2 dh(\alpha(t)).g(\alpha(t)) \\ = \omega + x.\upsilon + x^2 dh(\alpha(t)).g(\alpha(t)) \\ = \omega + x.\upsilon + +x\varepsilon(x,t) \\ . \end{cases}$$

Où on a posé

$$\varepsilon(x,t) = x.dh(\alpha(t)).g(\alpha(t))$$

Mais par hypothèse, h est $1-$périodique donc dh aussi et étant continue par le fait que h est supposée C^1, alors dh est bornée, de même pour g. Donc l'application $t \to dh(\alpha(t)).g(\alpha(t))$ est bornée sur $\mathbb{R}$; et si on note $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|dh(\alpha(t)).g(\alpha(t))\|$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon(x,t)| \le M|x|$ ou encore, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varepsilon(x,t)| \le M|x|$. En particulier $\lim_{x\to 0}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varepsilon(x,t)|\right) = 0$.

(c) Notons $A = \sup_{t\in[0,T]} \|\alpha(t)\|$.L'existence est assuré par la continuité de l'application α sur le compact $[0, T]$.

D'autre part, on vérifie que pour tout $t \in [0, T]$, le segment $[t.\omega, \alpha(t)]$ est contenu dans la boule $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^2}, T.\omega + A)$ de $\mathbb{R}^2$.
Notons enfin $K = \sup_{y\in\overline{B}(0_{\mathbb{R}^2}, T.\omega+A)} \|dh(y)\|$, dont l'existence est assuré par la continuité de l'application dh et la compacité de la boule $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^2}, T.\omega + A)$.
Par ailleur, en intégrant l'égalité du $15b.$, on obtient pour tout t réel,

$$\widetilde{\alpha}(t) = \widetilde{\alpha}(0) + (\omega + x\upsilon)t + x\int_0^t \varepsilon(x,s)\,ds$$

ou encore, pour tout t réel,

$$\alpha(t) = xh(0,0) - xh(\alpha(t)) + (\omega + x\upsilon)\, t + x\int_0^t \varepsilon(x,s)\, ds$$

Par suite pour tout t réel,

$$\alpha(t) = (\omega + x\upsilon)\, t + x\,(h(0,0) - h(t.\omega)) + x\eta(x,t)$$

où on a posé

$$\eta(x,t) = h(t.\omega) - h(\alpha(t)) + \int_0^t \varepsilon(x,s)\, ds$$

ou encore en utilisant l'expression de la fonction ε,

$$\eta(x,t) = h(t.\omega) - h(\alpha(t)) + x\int_0^t dh(\alpha(s))\, .g(\alpha(s))\, ds$$

Mais

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| x\int_0^t dh(\alpha(s))\, .g(\alpha(s))\, ds \right| \leq |x| \int_0^T dh(\alpha(s))\, .g(\alpha(s))$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \left(\sup_{t\in[0,T]} \left| x\int_0^t dh(\alpha(s))\, .g(\alpha(s))\, ds \right| \right) = 0$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité des accroissements finies, on a succéssivement :
pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} \|h(t.\omega) - h(\alpha(t))\| \leq \|\alpha(t) - t.\omega\| \sup\limits_{y\in]t.\omega,\alpha(t)[} \|dh(y)\| \\ \qquad \leq \|\alpha(t) - t.\omega\| \sup\limits_{y\in\overline{B}\left(0_{\mathbb{R}^2},T.\omega+A\right)} \|dh(y)\| \\ \qquad \leq K\,\|\alpha(t) - t.\omega\| \end{cases}$$

Mais en intégrant la deuxième équation du problème (3), on obtient :
pour tout t réel,

$$\alpha(t) = t.\omega + x\int_0^t g(\alpha(s))\, ds$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|h(t.\omega) - h(\alpha(t))\| \leq K\,|x| \int_0^T \|g(\alpha(s))\|\, ds$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \left(\sup_{t\in[0,T]} \|h(t.\omega) - h(\alpha(t))\| \right) = 0$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} \sup_{t\in[0,T]} \|\eta(x,t)\| = 0$$