Corrigé

Première partie

1) a) Pour $\ell = 0$, on considère que $[0, \ell] = \{\ell\}$. Pour $\omega \in \Omega$ la suite $(S_k(\omega))$ est strictement croissante. Si $N(0, \ell) = n+1$ alors il y a $n+1$ indices k tels que $0 \leqslant S_k(\omega) \leqslant \ell$ et ce sont les $n+1$ premiers d'où $S_n(\omega) \leqslant \ell < S_{n+1}(\omega)$. Ainsi, $\{N(0,\ell) = n+1\} \subset \{S_n \leqslant \ell < S_{n+1}\}$. L'inclusion réciproque ainsi que les deux autres relations se justifient de manière analogue.

b) C'est l'inégalité de Bienaymé-Chebychev pour S_n d'espérance $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = nm$ et de variance $\sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = nv$ par indépendance des X_k.

2) On a dans $[0, +\infty]$:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=\ell}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant \ell).$$

L'interversion des sommations est valide, s'agissant de réels positifs.

3) a) C'est l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\exp(\ell - S_n)$ d'espérance

$$\mathbb{E}(e^{\ell - X_1 - \dots - X_n}) = e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X_1})\dots\mathbb{E}(e^{-X_n}) = e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X})^n.$$

b) $\mathbb{E}(e^{-X}) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i e^{-x_i} < 1$, d'où la convergence de $\mathbb{P}(S_n \leqslant \ell)$ vers 0.

Ensuite, $\mathbb{P}(N(0,\ell) \geqslant n) = \mathbb{P}(S_{n-1} \leqslant \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(N(0,\ell) = \infty) = 0$.

Enfin, $\mathbb{E}(N(0,\ell)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(0,\ell) \geqslant n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ell}\mathbb{E}(e^{-X})^{n-1} = \dfrac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

c) On note $A_n = \{a \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(S_n = a) \neq 0\}$, $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ et $D = A - A$ (ensembles dénombrables) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n,\ N(x, x+\ell) \geqslant k) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} = c) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} - S_n = c - b) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{n+k-1} - S_n = c - b) && \text{(indépendance des } X_i\text{)} \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ c\in A,\ c\leqslant x+\ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = c - b) && \text{(équidistribution des } X_i\text{)} \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ d\in A-b,\ d\leqslant x+\ell-b}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\
&\quad \leqslant \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x \\ d\in D,\ d\leqslant \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\
&\quad = \sum_{\substack{a\in A,\ a<x \\ b\in A,\ b\geqslant x}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leqslant \ell) \\
&\quad = \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n)\,\mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leqslant \ell) \\
&\quad = \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leqslant S_n)\,\mathbb{P}(N(0,\ell) \geqslant k).
\end{aligned}$$

En sommant sur n on obtient $\mathbb{P}(N(x, x+\ell) \geqslant k) \leqslant \mathbb{P}(N(0,\ell) \geqslant k)$ ce qui implique par continuité décroissante $\mathbb{P}(N(x,x+\ell) = \infty) = 0$ puis $\mathbb{E}(N(x,x+\ell) \leqslant \mathbb{E}(N(0,\ell)) \leqslant \dfrac{e^\ell}{1-\mathbb{E}(\exp(-X))}$.

Deuxième partie

4) a) $f_n(x)$ est la n-ème somme partielle d'une série termes positifs (finis car g est bornée).

b) Pour $\omega \in \Omega$ on a $N(x-K,x)(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x - S_k(\omega)) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\omega)$ et il s'agit de prouver que $\mathbb{E}(N(x-K,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(Y_k) = f(x)$. Pour ce faire, considérons le schéma d'interversion des limites suivant :

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y_0+\ldots+Y_p \geqslant k) \arrow[r, "(1)", "\substack{n \text{ fixé} \\ p\to\infty}"'] \arrow[d, "\substack{n\to\infty \\ p \text{ fixé}}", "(2)"'] & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N(x-K,x) \geqslant k) \arrow[d, "n\to\infty"] \\
\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_0+\ldots+Y_p \geqslant k)}_{\mathbb{E}(Y_0)+\ldots\mathbb{E}(Y_p)} \arrow[r, "p\to\infty"'] & \mathbb{E}(N(x-K,x)) \\
 & f(x)
\end{tikzcd}$$

(1) a lieu par continuité croissante. Pour égaler les limites, il suffit de prouver l'uniformité de (2) par rapport au paramètre p. Et de fait :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_0+\ldots+Y_p \geqslant k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(N(x-K,x) \geqslant k),$$

quantité indépendante de p, et tendant vers 0 quand $n \to \infty$ en tant que reste d'une série convergente (on a vu que $\mathbb{E}(N(x-K,x)$ est finie en **3c**).

c) Car $g \leqslant \|g\|_\infty \mathbb{1}_{[0,K]}$.

d) La suite $(f_n(x))$ étant croissante et majorée, il y a finitude de $f(x)$ et convergence simple de f_n vers f. f est positive et est nulle sur $]-\infty, 0[$ car les f_n le sont. Donc $\{x \text{ tq } f(x) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^+$ et le support de f est lui aussi inclus dans $\mathbb{R}^+$. Enfin f est bornée car les f_n sont bornées par deux mêmes constantes.

5) On note $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(X=a) \neq 0\}$ et $B = \{b \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(Y=b) \neq 0\}$ (ensembles finis ou dénombrables) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) &= \sum_{(a,b)\in A\times B} \varphi(a,b)\,\mathbb{P}(X=a, Y=b) \\
&= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} \varphi(a,b)\,\mathbb{P}(X=a)\,\mathbb{P}(Y=b) \\
&= \sum_{a\in A} \mathbb{E}(\varphi(a,Y))\,\mathbb{P}(X=a).
\end{aligned}$$

6) a)

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \mathbb{E}(g(x-S_0)) + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(g(x - X_1 - (X_2+\ldots+X_k)) \\
&= g(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_2+\ldots+X_k)) && \text{(indépendance)} \\
&= g(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_2+\ldots+X_k)) \\
&= g(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n+1} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_1+\ldots+X_{k-1})) && \text{(équidistribution)} \\
&= g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f_n(x - x_i).
\end{aligned}$$

b) On a pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \leqslant g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i)$, d'où en faisant tendre n vers l'infini à x fixé :

$$f(x) \leqslant g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i).$$

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \geqslant g(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i f_n(x - x_i)$, puis en faisant tendre n vers l'infini à x, k fixés : $f(x) \geqslant g(x) + \sum_{i=0}^{k} p_i f(x - x_i)$, et enfin en faisant tendre k vers l'infini :

$$f(x) \geqslant g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i).$$

7) a) C'est vrai pour $n = 0$ et si ça l'est pour n alors :

$$\mathbb{E}(h(x - S_{n+1})) = \mathbb{E}(h(x - X_{n+1} - S_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathbb{E}(h(x - x_i - S_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i h(x - x_i) = h(x).$$

b) Pour $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $|h(x - S_n(\omega))| \leqslant \|h\|_\infty \mathbb{1}_{\{S_n \leqslant x\}}(\omega)$ donc

$$|h(x)| \leqslant |\mathbb{E}(h(x - S_n))| \leqslant \mathbb{E}(|h(x - S_n)|) \leqslant \|h\|_\infty \mathbb{P}(S_n \leqslant x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) Si f, f' sont deux solutions de (E) alors $h = f - f'$ vérifie les hypothèses de la question précédente donc est nulle.

8) a) C'est l'ensemble A introduit dans la réponse à **3c**.

b) C'est la formule de transfert pour $\mathbb{E}(g(x - S_k))$.

c) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} q_{i,n} g(x - y_i)$.

Comme les X_j sont à valeurs strictement positives, pour tout i les évènements $\{S_k = y_i\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et donc $q_{i,n} = \mathbb{P}(\exists\, k \in [\![0, n]\!] \text{ tq } S_k = y_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tq } S_k = y_i) = q_i$ par continuité croissante. On a donc $f_n(x) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$ (inégalité dans $[0, +\infty]$) puis en faisant tendre n vers l'infini à x fixé : $f(x) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$. L'inégalité inverse se démontre comme en **6b** en minorant $f_n(x)$ par une somme finie. En particulier la série $\sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$ est convergente. La deuxième relation demandée s'obtient en prenant $g = \mathbb{1}_{[0,K]}$.

9) a) Soit $[a, b]$ un segment. Pour $x \in [a, b]$ et $i \in \mathbb{N}$ on a $|q_i g(x - y_i)| \leqslant \|g\|_\infty q_i \mathbb{1}_{[a-K,b]}(y_i)$, quantité indépendante de x et dont la série converge vers $\|g\|_\infty \mathbb{E}(N(a - K, b))$.

b) g étant continue à support compact est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ associé : $|g(s) - g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tous s, t tels que $|s - t| \leqslant \delta$. Quitte à le diminuer, on peut supposer $\delta \leqslant 1$. Considérons $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $|s - t| \leqslant \delta$ avec par exemple $s \leqslant t$:

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(t)| &= \Big|\sum_{i=0}^{\infty} q_i(g(s - y_i) - g(t - y_i))\Big| \\
&= \Big|\sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i(g(s - y_i) - g(t - y_i))\Big| \\
&\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i|g(s - y_i) - g(t - y_i)| \\
&\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[s-K,t]} q_i \varepsilon \\
&= \varepsilon \mathbb{E}(N(s - K, t)) \\
&\leqslant \varepsilon \frac{e^{t-s+K}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))} && \text{(question 3c)} \\
&\leqslant \varepsilon \frac{e^{1+K}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.
\end{aligned}$$

c) g' est continue et à support compact. Elle est donc bornée. Il en résulte que la série des dérivées $\sum_{i=0}^{\infty} q_i g'(x-y_i)$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$ comme en **9a**, donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i g'(x-y_i)$. On a ensuite

$$|f'(x)| \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\in[x-H,x]}^{\infty} q_i\|g'\|_\infty = \mathbb{E}(N(x-K,x))\|g'\|_\infty \leqslant \frac{e^K\|g'\|_\infty}{1-\mathbb{E}(e^{-X})}$$

donc f' est bornée. La continuité uniforme de f' se démontre comme en **9b**. Enfin, comme la série $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ est absolument convergente, on peut dériver (E) terme à terme ce qui donne la dernière relation.

Troisième partie

10) a) $nx+k(y-x)=(n-k)x+ky$ et $n-k,k$ ne sont pas simultanément nuls.

b) $\mathbb{N}^*$ et $]0,+\infty[$ sont stables par addition avec $r(\mathbb{N}^*)=1$ et $r(]0,+\infty[)=0$.

11) a) C'est une propriété de la borne inférieure.

b) Les deux points $na+kd, na+(k+1)d$ appartiennent bien à l'intersection d'après **10a** et tout autre point de $[na+kd, na+(k+1)d]$ est à une distance moindre que $d/2$ de l'une des deux bornes. Comme $d/2<r(\Lambda)$, il n'appartient pas à Λ.

c) Soit $n_0=\min\{n\in\mathbb{N} \text{ tq } nd>a\}$, qui existe et est supérieur ou égal à 1 car a et d sont strictement positifs. On a $n_0a+n_0d>(n_0+1)a$ par construction, et $n_0a+(n_0-1)d\leqslant(n_0+1)a<n_0a+n_0d$. Ces trois nombres appartiennent à Λ donc les deux premiers sont égaux d'après la question précédente. Ainsi $a=(n_0-1)d$.

d) Soit $x\in\Lambda$ tel que $x\geqslant n_0a$: il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $na\leqslant x<(n+1)a$ puis il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $na+kd\leqslant x<na+(k+1)d$. On a $n\geqslant n_0$ et $k\leqslant n$ car $na+(n+1)d>na+n_0d>(n+1)a>x$ donc $x=na+kd$ d'après **11b**. Ainsi tout élément de Λ suffisamment grand est divisible par d. Pour $x\in\Lambda$ quelconque il existe deux multiples successifs mx, $(m+1)x$ qui relèvent du cas précédent. Ils sont divisibles par d et leur différence, x, l'est aussi. Ainsi $\Lambda\subset d\mathbb{Z}$.

12) a) Soient $a,b\in\Lambda$ tels que $0<b-a<\eta$. Λ contient toutes les combinaisons $na+k(b-a)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $0\leqslant k\leqslant n$. En particulier, tout segment de longueur η dont la borne inférieure appartient à $[na,nb]$ contient un élément de Λ. On a $(n+1)a\leqslant nb$ si $a\leqslant n(b-a)$, ce qui a lieu dès que n est assez grand, mettons $n\geqslant n_0$. Alors $\bigcup_{n=n_0}^{\infty}[na,nb]=[n_0a,+\infty[$ donc $A=n_0a$ convient.

b) Soit $\varepsilon>0$ et soit $\eta>0$ tel que $|x-y|\leqslant\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. Considérons une suite de réels (x_n) telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour n assez grand ($n\geqslant n_0$) il existe $y_n\in\Lambda$ tel que $x_n\leqslant y_n\leqslant x_n+\eta$. La suite $(y_n)_{n\geqslant n_0}$ est à valeurs dans Λ et tend vers l'infini donc pour n encore plus grand ($n\geqslant n_1$) on a $|f(x_n)-f(y_n)|\leqslant\varepsilon$ et $|f(y_n)|\leqslant\varepsilon$ d'où $|f(x_n)|\leqslant 2\varepsilon$. On a ainsi prouvé que $f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, puis $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par caractérisation séquentielle de la limite.

Quatrième partie

13) a)

$$\begin{aligned}
h(0)=\mathbb{E}(h(-S_n)) &= \sum_{i=0}^{\infty} h(-y_i)\,\mathbb{P}(S_n=i)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\neq x} h(-y_i)\,\mathbb{P}(S_n=i)+h(-x)\,\mathbb{P}(S_n=x)\\
&\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N},\ y_i\neq x} h(0)\,\mathbb{P}(S_n=i)+h(-x)\,\mathbb{P}(S_n=x)\\
&= h(0)\,\mathbb{P}(S_n\neq x)+h(-x)\,\mathbb{P}(S_n=x).
\end{aligned}$$

On en déduit $(h(0)-h(-x))\mathbb{P}(S_n=x)\leqslant 0$, puis $h(0)\leqslant h(-x)$ et enfin l'égalité.

b) Si $x,y\in\Lambda_X\setminus\{0\}$, soient $n,p\in\mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(S_n=x)>0$ et $\mathbb{P}(S_p=y)>0$. Alors par équidistribution on a aussi $\mathbb{P}(S_{n+p}-S_n=y)>0$, d'où

$$\mathbb{P}(S_{n+p}=x+y)\geqslant\mathbb{P}(S_n=x,S_{n+p}-S_n=y)=\mathbb{P}(S_n=x)\,\mathbb{P}(S_{n+p}-S_n=y)>0$$

donc $x+y \in \Lambda_X \setminus \{0\}$, ce qui prouve la stabilité par addition. Ensuite, si $r(\Lambda_X \setminus \{0\}) \neq 0$ alors $\Lambda_X \setminus \{0\} \subset d\mathbb{Z}$ pour un certain $d > 0$ et en particulier $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(S_1 \in d\mathbb{Z}) = 1$ en contradiction avec l'hypothèse faite sur X.

c) Appliquer **12b** à $x \mapsto h(-x) - h(0)$.

d) h est continue sur $\mathbb{R}^-$ et tend en $-\infty$ vers sa valeur maximale donc il existe un réel $c \leqslant 0$ tel que $h(c) = \min(h(t),\ t \leqslant 0)$. En reprenant **13a**, on prouve que $h(c-x) = h(c)$ pour tout $x \in \Lambda_X$, d'où en faisant tendre x vers $+\infty$ dans Λ_X : $h(c) = h(0)$, c'est-à dire : h est constante sur $\mathbb{R}^-$. On peut alors appliquer **7b** à la fonction $x \mapsto h(x) - h(0)$ car $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$: cette fonction est nulle et ainsi h est constante sur $\mathbb{R}$.

14) a) f' étant bornée, la borne supérieure existe et est une fonction de x bornée, décroissante. Une telle fonction admet une limite finie en $+\infty$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver $y_n \geqslant n$ tel que $|\sup(f'(t),\ t \geqslant n) - f'(y_n)| \leqslant \frac{1}{n}$.

c) On peut intervertir $\lim_{k\to\infty,\ t\,\text{fixé}}$ et $\sum_{i=0}^{\infty}$ dans la relation $f'(t+t_k) = g'(t+t_k) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f'(t+t_k-x_i)$ car $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ est absolument convergente et f' est bornée. Il vient : $\forall t \in \mathbb{R},\ \xi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \xi(t - x_i)$ car g' est nulle au delà de K.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f'(x) - f'(y)| \leqslant \varepsilon$. Par translation, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |\xi_k(x) - \xi_k(y)| \leqslant \varepsilon$ puis, par passage à la limite : $|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |\xi(x) - \xi(y)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi ξ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On montre de même qu'elle est bornée et, par construction, elle atteint son maximum en $t = 0$ avec $\xi(0) = c$. Alors on peut appliquer **13** qui conclut à la constance de ξ.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme il y a convergence uniforme sur tout segment, on peut passer à la limite ($k \to \infty$, a fixé) dans la relation : $|\int_{u=0}^{a} f'(t_k+u)\,du| = |f(t_k+a) - f(t_k)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ ce qui donne : $|ca| \leqslant 2\|f\|_\infty$. Et a est arbitraire, donc $c = 0$.

e) Car $\inf(f'(u),\ u \geqslant t) \leqslant \quad f'(t) \quad \leqslant \sup(f'(u),\ u \geqslant t)$.

f) Car $\inf(f'(u),\ u \geqslant t) \leqslant \dfrac{f(t+\ell) - f(t)}{\ell} \leqslant \sup(f'(u),\ u \geqslant t)$ lorsque $\ell > 0$.

18) $\mathbb{E}(N(x, x+\ell)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[0,\ell]}(x+\ell-S_k)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{m}$. Le nombre moyen de sommes comprises dans un intervalle donné de longueur ℓ est de l'ordre de la longueur de cet intervalle divisée par l'écart moyen entre deux sommes successives. Cette propriété est manifestement fausse si X est à valeurs dans $d\mathbb{Z}$ et $\ell < d$.

* *
*