Polytechnique MP 2017 - Épreuve B - corrigé

Préliminiaires

1. Les fonctions $\sqrt{m}$ et $f\sqrt{m}$ sont L^2 (on sous-entendra : "sur $\mathbb{R}$") car m et f^2m sont L^1, donc leur produit fm est intégrable.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left(\int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int f(x)\sqrt{m(x)}\cdot\sqrt{m(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int f(x)^2m(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int m(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int f(x)^2m(x)\,\mathrm{d}x$$
donc $\mathrm{Var}_m(f) \ge 0$.

2.

(2a.) On remarque que $x \ge \mathrm{e} \Rightarrow h(x) \ge x$. On en déduit : $\forall x \ge 0$, $x \le \min(\mathrm{e}, h(x))$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2m(x) \le \min(\mathrm{e}m(x), h(f(x)^2)m(x))$. Comme $x \mapsto \mathrm{e}m(x)$ et $x \mapsto h(f(x)^2)m(x)$ sont intégrables, on en déduit que f^2m est intégrable.

(2b.) On pose $\varphi(x) = h(x) - h(a) - h'(a)(x-a)$. Pour $x > 0$, $\varphi'(x) = h'(x) - h'(a)$ et $\varphi''(x) = 1/x > 0$. On en déduit que φ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Comme $\varphi'(a) = 0$, φ est strictement décroissante sur $[0,a]$ (continuité en 0) et strictement croissante sur $[a,+\infty[$. Or $\varphi(a) = 0$, donc $\forall x \ge 0$, $\varphi(x) > \varphi(a)$ si $x \ne a$.

(2c.) On pose $a = \displaystyle\int f(x)^2m(x)\,\mathrm{d}x$. Si $a = 0$, la continuité de f et m montre que $f^2m = 0$. Pour tout x, on a donc $f(x)^2 = 0$ ou $m(x) = 0$, donc $h(f(x))^2m(x) = 0$. De là, $\mathrm{Ent}_m(f) = \displaystyle\int h(f(x)^2)m(x)\,\mathrm{d}x - h(a) = 0$.
Si $a > 0$, on a d'après 2.b. : $h(f(x))^2 \ge h(a) + h'(a)(f(x)^2 - a)$ pour tout $x \ge 0$. On multiplie par $m(x)$ et on intègre, il vient : $\displaystyle\int h(f(x))^2m(x)\,\mathrm{d}x \ge h(a) + h'(a)\left(\int f(x)^2m(x)\,\mathrm{d}x - a\right) = h\left(\int f(x)^2m(x)\,\mathrm{d}x\right)$, donc $\mathrm{Ent}_m(f) \ge 0$.

(2d.) Nous montrons que les fonctions d'entropie nulle sont les fonctions constantes.
On reprend les calculs précédents. Dans le cas $a = 0$, on obtient $f = 0$ (identiquement) car m ne s'annule pas. Dans le cas $a > 0$, l'égalité $\mathrm{Ent}_m(f) = 0$ implique que $x \mapsto [h(f(x)^2) - h(a) - h'(a)(f(x)^2 - a)]m(x)$ est nulle (car elle est positive et continue). Comme m ne s'annule pas, on obtient le cas d'égalité de 2b., donc $f(x)^2 = a$ pour tout x, c'est-à-dire que f est constante (continuité).
Il est immédiat que les fonctions constantes sont d'entropie nulle, ce qui achève la preuve.

Partie I

3.

(3a.) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mu f')(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}f'(x)$ donc $(\mu f')'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}[-2xf'(x) + f''(x)] = 2\mu(x)Lf(x)$, ce qui montre bien : $Lf = \dfrac{1}{2\mu}(\mu f')'$.

(3b.) Les fonctions h_1' et h_2' sont continues et bornées, donc $h_1'h_2'\mu$ est L_1. D'après 3a., $(\mu h_2')' = 2\mu Lh_2$. On intègre formellement par parties :
$$\int h_1'(h_2'\mu) = [h_1(h_2'\mu)] - \int h_1 \cdot 2\mu Lh_2.$$
Le crochet est bien convergent et nul car h_1 et h_2' sont bornées et μ tend vers 0 en $\pm\infty$. On en déduit la convergence de la seconde intégrale, et l'égalité demandée.

4. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (théorèmes généraux) ;
pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $y \mapsto f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc continue par morceaux) ;
pour tout t, x, y, $|f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)| \le ||f||_\infty\mu(y)$. Or $y \mapsto ||f||_\infty\mu(y)$ est intégrable, donc Φ_f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5.

(5a.) Notons $F(t,x,y) = f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$. Mentionnons une fois pour toute qu'à (t,x) fixé, $y \mapsto F(t,x,y)$ est continue et intégrable.
Fixons $t \in \mathbb{R}$. D'après les théorèmes généraux, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto F(t,x,y)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x,y) = (\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$.
Remarquons que cette formule définit, pour tout x, une fonction continue de y.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $|(\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)| \le ||f'||_\infty\mu(y)$. Cette dernière fonction est intégrable, et d'après le théorème de dérivation, la fonction $x \mapsto \Phi_f(t,x)$ est C^1 (attention, à t fixé !) et a pour dérivée :
$\dfrac{\partial \Phi_f}{\partial x}(t,x) = \displaystyle\int (\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y$.

Par un raisonnement identique au 4. (on domine l'intégrande par $y \mapsto ||f'||_\infty \mu(y)$), on constate que cette dérivée partielle définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
On fixe maintenant $x \in \mathbb{R}$. On a cette fois, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x,y) = (-x\sin t + y\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$.
Pour $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, $|(-x\sin t + y\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)| \leq (|x|+|y|)||f'||_\infty\mu(y)$. Cette dernière fonction est continue et intégrable ($= o(e^{-|y|})$ en $\pm\infty$), donc le théorème de dérivation montre que $t \mapsto \Phi_f(t,x)$ est C^1 (à x fixé), de dérivée : $\dfrac{\partial \Phi_f}{\partial t}(t,x) = \displaystyle\int (-x\sin t + y\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y$.
L'intégrande est continue par rapport à (t,x). Soit $A > 0$. Pour tout $x \in [-A,A]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on domine : $|(-x\sin t + y\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)| \leq (A+|y|)\mu(y)$, fonction L^1, et on conclut que $\dfrac{\Phi_f}{\partial t}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Finalement, les deux dérivées partielles de Φ_f sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc Φ_f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x,y) = (\cos t)^2 f''(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$. Or, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|(\cos t)^2 f''(x\cos t + y\sin t)\mu(y)| \leq ||f''||_\infty\mu(y)$.
On en déduit que $\dfrac{\partial^2 \Phi_f}{\partial x^2}(t,x) = \displaystyle\int (\cos t)^2 f''(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y$.
À nouveau, la continuité de $\partial_{xx}\Phi_f$ se démontre comme au 4., en dominant par $||f''||_\infty\mu(y)$. Cette domination montre en outre, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$:
$|\partial_{xx}\Phi_f(t,x)| \leq \displaystyle\int ||f''||_\infty\mu(y)\,\mathrm{d}y = ||f''||_\infty$, donc $\partial_{xx}\Phi_f$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

(5b.) La formule du 5a. montre : $\partial_x\Phi_f(t,x) = (\cos t)\Phi_{f'}(t,x)$.

(5c.) $L\Phi_f(t,x) = \displaystyle\int \frac{1}{2}[(\cos t)^2 f''(x\cos t + y\sin t) - x(\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)]\mu(y)\,\mathrm{d}y$

donc $(\sin t)L\Phi_f(t,x) = \dfrac{(\cos t)^2}{2}\displaystyle\int (\sin t)f''(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y - x(\cos t)\int (\sin t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y$
On remarque $\mu'(y) = -2y\mu(y)$, puis on intègre par parties (le crochet étant "convergent" et nul) :
$\displaystyle\int (\sin t)f''(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y = [f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y] + 2\int f'(x\cos t + y\sin t)y\mu(y)\,\mathrm{d}y = 2\int f'(x\cos t + y\sin t)y\mu(y)\,\mathrm{d}y$.
Finalement, $(\sin t)L\Phi_f(t,x) = (\cos t)^2 f'(x\cos t + y\sin t)y\mu(y)\,\mathrm{d}y - (\cos t)\displaystyle\int x\sin t f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y =$
$(\cos t)\displaystyle\int (x\sin t - y\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y = (\cos t)\partial_t\Phi_f(t,x)$.

(5d.) Le membre de droite ne dépend pas de t, on va montrer que le membre de gauche est constant.
Notons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = \displaystyle\int \Phi_f(t,x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \Phi_f(t,x)\mu(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto \partial_t\Phi_f(t,x)\mu(x)$.
Or $|\partial_t\Phi_f(t,x)| \leq \displaystyle\int (|x|+|y|)||f'||_\infty\mu(y)\,\mathrm{d}y = A|x| + B$ avec $A = ||f'||_\infty$ et $B = ||f'||_\infty \displaystyle\int |y|\mu(y)\,\mathrm{d}y$. On en déduit la domination : $|\partial_t\Phi_f(t,x)\mu(x)| \leq (A|x|+B)\mu(x)$. Cette fonction est intégrable, donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G'(t) = \displaystyle\int \partial_t\Phi_f(t,x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour $t \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a donc, d'après 5c. : $G'(t) = \displaystyle\int (\tan t)L\Phi_f(t,x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
Avec 3a. puis 5b. : $\displaystyle\int L\Phi_f(t,x)\mu(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\mu(x)\partial_x\Phi_f(t,x)] = \frac{1}{2}[\cos(t)\mu(x)\Phi_{f'}(t,x)] = 0$ car $\Phi_{f'}$ est bornée (par $||f'||_\infty$), d'où $G'(t) = 0$.
Comme G' est continue, on en déduit que G' est identiquement nulle, donc G est constante.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi_f(0,x) = \displaystyle\int f(x)\mu(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$, donc $G(0) = \displaystyle\int \Phi_f(0,x)\mu(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie II

6. Φ_f est continue d'après 4., et un calcul immédiat montre qu'elle est positive et bornée sur $\mathbb{R}^2$ par $||f||_\infty$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, et en particulier bornée sur $[0, ||f||_\infty]$, on en déduit que $h \circ \Phi_f$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$.

En dominant l'intégrande par $x \mapsto ||f||_\infty \mu(x)$, on constate que J et continue, et un calcul rapide montre $J(0) = \displaystyle\int h(f(x))\mu(x)\,\mathrm{d}x$ et, en posant $a = \displaystyle\int f(y)\mu(y)\,\mathrm{d}y$: $J(\pi/2) = \displaystyle\int h(a)\mu(x)\,\mathrm{d}x = h(a)$.

On peut remarquer au passage : $J(0) - J(\pi/2) = \mathrm{Ent}_\mu(\sqrt{f})$.

7.

(7a.) Par croissance de l'intégrale, $\delta \le \Phi_f(t,x) \le ||f||_\infty$. Or h est C^1 sur $[\delta, +\infty[$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(\Phi_f(t,x))\mu(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
$t \mapsto \partial_t \Phi_f(t,x) h'(\Phi_f(t,x))\mu(x)$.
La fonction h' est continue, donc bornée, mettons par M, sur $[\delta, ||f||_\infty]$ et on a trouvé au 5d. deux constantes positives A et B telles que $|\partial_t \Phi_f(t,x) h'(\Phi_f(t,x))\mu(x)| \le (A|x| + B)M\mu(x)$.
D'après le théorème de dérivation, J est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et avec 5c. :
$(\cos t)J'(t) = \displaystyle\int (\cos t)\partial_t\Phi_f(t,x)h'(\Phi_f(t,x))\mu(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin t) L\Phi_f(t,x)[1 + \ln \Phi_f(t,x)]\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
Comme t est fixé, on applique 3a. à $x \mapsto \Phi(t,x)$, donc $(\cos t)J'(t) = \displaystyle\int \frac{(\sin t)}{2}\partial_x[\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)]\cdot[1+\ln\Phi_f(t,x)]\,\mathrm{d}x$.
On intègre par parties : $(\cos t)J'(t) = \dfrac{\sin(t)}{2}\left([\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)(1 + \ln\Phi_f(t,x))] - \displaystyle\int \frac{\partial_x\Phi_f(t,x)}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)\,\mathrm{d}x\right) = -\dfrac{\sin t}{2}\displaystyle\int \frac{\partial_x\Phi_f(t,x)^2}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
L'intégration par parties est bien licite car pour tout (t,x) : $|\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)(1+\ln\Phi_f(t,x))| \le ||f'||_\infty M\mu(x)$, ce qui entraîne la convergence et la nullité du crochet.

(7b.) Notons que f étant minorée par δ et f' bornée, la fonction g est bornée et $g\mu$ est intégrable. On fixe (t,x). Les fonctions $y \mapsto \sqrt{f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)}$ et $y \mapsto \sqrt{g(x\cos t + y \sin t)\mu(y)}$ sont L^2 donc leur produit $y \mapsto |f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)|$ est intégrable, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\Phi_{f'}(t,x)^2 &= \left(\int f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 \le \left(\int |f'(x\cos t + y\sin t)|\mu(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 \\
&= \left(\int \sqrt{f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)}\sqrt{g(x\cos t + y\sin t)\mu(y)}\,\mathrm{d}y\right)^2 \\
&\le \int f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y \int g(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y = \Phi_f(t,x)\cdot\Phi_g(t,x).
\end{aligned}$$

(7c.) Pour tout $t \in]0, \pi/2[$, en appliquant 5b. : $J'(t) = -\dfrac{\tan t}{2}\displaystyle\int \frac{\partial_x\Phi_f(t,x)^2}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin(2t)}{4}\int\frac{\Phi_{f'}(t,x)^2}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
On constate $J'(t) \le 0$ et d'après 7b. et 5d. : $|J'(t)| \le \dfrac{\sin(2t)}{4}\displaystyle\int \Phi_g(t,x)\mu(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin(2t)}{4}\int g(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
Comme J est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $J(0) - J(\pi/2) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} -J'(t)\,\mathrm{d}t \le \int g(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x \int \frac{\sin(2t)}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int g(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$,
ce qui est l'inégalité attendue d'après les calculs de 6.

8. Comme f est bornée et h continue, $h(f^2)$ est bornée donc $h(f^2)\mu$ est intégrable, c'est-à-dire que f admet une entropie par rapport à μ.

Soit $\delta > 0$. On pose $f_\delta = \delta + f^2$, donc $f'_\delta = 2ff'$. En particulier, $f_\delta \in C_b^2$ et $f_\delta \ge \delta$ et on peut appliquer les résultats de 7. à f_δ.

On pose $g_\delta = \dfrac{f'^2_\delta}{f_\delta} = \dfrac{4f^2f'^2}{\delta + f^2} \le 4f'^2$. On remarque : $\frac{1}{4}\displaystyle\int g_\delta(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x \le \int f'(x)^2\mu(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après 7c. : $\displaystyle\int h(\delta + f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x - h\left(\int(\delta + f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \int f'(x)^2\mu(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrons que les termes du membre de gauche sont des fonctions continues de δ :

Pour le premier, si on se restreint à $\delta \le 1$, on peut majorer grossièrement $|h(\delta + f(x)^2)|$ par le maximum M de $|h|$ sur $[0, 1 + ||f||_\infty^2]$, ce qui permet la domination : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \delta \in [0,1]$, $|h(\delta + f(x)^2)\mu(x)| \le M\mu(x)$, donc $\delta \mapsto \displaystyle\int h(\delta + f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $[0,1]$.

Pour le second, $\displaystyle\int(\delta + f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x = \delta + \int f(x)^2\mu(x)\,\mathrm{d}x$, et comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc faire tendre δ vers 0, ce qui donne l'inégalité demandée.

Partie III

9. Posons $f(x) = x$. C'est une fonction C^1 à dérivée constante, donc bornée, donc elle admet une entropie d'après l'hypothèse de cette partie.
D'après 2a. et 1., f^2m et fm sont intégrables, donc $x \mapsto (1 + |x| + x^2)m(x)$ est intégrable.

10.

(10a.) Supposons (2) prouvée pour des fonctions $g \in C_b^1$ telles que $\int g(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int g^2(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On pose $E = \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x$ et $\sigma \geq 0$ tel que $\sigma^2 = \int (f(x) - E)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$. En développant, on vérifie que $\sigma^2 = \mathrm{Var}_m(f)$.

Si $\mathrm{Var}_m(f) = 0$, l'inégalité (2) est évidente, on suppose donc $\sigma > 0$. On pose alors $g = \dfrac{f - E}{\sigma}$. Il est clair que $g \in C_b^1$, $\int g(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int g(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x = 1$, donc on peut appliquer (2) : $1 = \mathrm{Var}_m(g) \leq \dfrac{C}{2}\int \dfrac{|f'(x)|^2}{\sigma^2} m(x)\,\mathrm{d}x$, et donc $\mathrm{Var}_m(f) = \sigma^2 \leq \dfrac{C}{2}\int |f'(x)|^2 m(x)\,\mathrm{d}x$.

(10b.) On suppose donc $\int fm = 0$ et $\int f^2m = 1$. On fixe $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon = 1 + \varepsilon f$. On va ensuite faire tendre ε vers 0.

D'une part, on développe : $\int (1+\varepsilon f(x))^2 m(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 2\varepsilon \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon^2 \int f(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \varepsilon^2$, donc $h\left(\int (1 + \varepsilon f(x))^2 m(x)\,\mathrm{d}x\right) = h(1 + \varepsilon^2) = (1 + \varepsilon^2)\ln(1 + \varepsilon^2) \sim \varepsilon^2$.

D'autre part, on considère le développement limité $h(1 + y)^2 = 2(1 + y)^2 \ln(1 + y) = 2y + 3y^2 + y^3\theta(y)$, où θ est une fonction bornée sur un intervalle $[-\alpha, +\alpha]$, mettons par $M > 0$.

Pour ε assez petit, $\varepsilon||f||_\infty \leq \alpha$. et $|\int \varepsilon^3 f(x)^3\theta(\varepsilon f(x))m(x)\,\mathrm{d}x| \leq \varepsilon^3 M \int |f(x)^3|m(x)\,\mathrm{d}x$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_m(f_\varepsilon) &= \int h(1 + \varepsilon f(x))\mu(x)\,\mathrm{d}x - h\left(\int (1 + \varepsilon f(x))^2 m(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \int 2\varepsilon f(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x + \int 3\varepsilon^2 f(x)^2\mu(x)\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^3) - \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \sim 2\varepsilon^2\end{aligned}$$

Or $f'_\varepsilon = \varepsilon f'$, donc d'après l'inégalité (1) : $\dfrac{\mathrm{Ent}_m(f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leq C \int f'(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$.

On fait tendre ε vers 0, d'où $1 \leq \dfrac{C}{2}\int f'(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui est l'inégalité attendue.

11.

(11a.) On peut remarquer $H(\lambda) > 0$. Par continuité et positivité de l'intégrande, $H(\lambda) = 0$ entraîne m identiquement nulle, ce qui est absurde pour une mesure.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda H'(\lambda) = \int \lambda f(x)\mathrm{e}^{\lambda f(x)} m(x)\,\mathrm{d}x = \int h(\mathrm{e}^{\lambda f(x)})m(x)\,\mathrm{d}x$ et
$H(\lambda)\ln(H(\lambda)) = h(H(\lambda))$.
On pose $g(x) = \mathrm{e}^{\lambda f(x)/2}$ et on reconnaît : $\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\ln(H(\lambda)) = \mathrm{Ent}_m(g)$.
Or $g \in C_b^1$ car $f \in C_b^1$, donc par hypothèse de cette partie, g admet bien une entropie et
$\mathrm{Ent}_m(g) \leq C \int \left(\lambda/2 f'(x)\mathrm{e}^{\lambda f(x)/2}\right)^2 m(x)\,\mathrm{d}x \leq C\lambda^2/4 \int f'(x)^2 \mathrm{e}^{\lambda f(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{C\lambda^2}{4} H(\lambda)$,
en tenant compte de $|f'(x)| \leq 1$.

(11b.) L'inégalité est évidente pour $\lambda = 0$, on va la prouver pour $\lambda > 0$.

Pour tout $\lambda > 0$, on pose $\varphi(\lambda) = \dfrac{\ln H(\lambda)}{\lambda}$. Cette fonction est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(\lambda) = \dfrac{\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\ln H(\lambda}{\lambda^2 H(\lambda)} \leq C/4$.

On a $H(0) = 1$ et $H'(0) = \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x$. Comme H est C^1 sur $\mathbb{R}$, on a au voisinage de 0 : $H(\lambda) = 1 + H'(0)\lambda + o(\lambda)$, donc $\varphi(\lambda)$ tend vers $H'(0)$ quand $\lambda \to 0$. On prolonge ainsi φ par continuité en 0.

Soit $\lambda > 0$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, \lambda[$ tel que $\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \varphi'(c) \leq \dfrac{C}{4}\lambda$, donc $\ln H(\lambda) \leq \lambda H'(0) + C\lambda^2/4$, c'est-à-dire :

$$H(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x + C\lambda^2/4\right).$$

12. On ne peut pas appliquer directement 11. car $f : x \mapsto x$ n'est pas bornée. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto n\mathrm{Arctan}(x/n)$. Pour tout n, f_n est bornée (par $n\pi/2$), de classe C^1, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{1+x^2/n^2} \in [0,1]$, donc f_n vérifie les hypothèses de 11. On peut donc écrire, pour tout $\lambda \geq 0$:
$\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \exp\left(\lambda \int f_n(x)m(x)\,\mathrm{d}x + C\lambda^2/4\right)$.
En utilisant l'inégalité $|\mathrm{Arctan}(x)| \leq |x|$ (car Arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$ et impaire), on remarque pour tout (n,x) : $|f_n(x)m(x)| \leq |x|m(x)$. Cette fonction est intégrable (domination), et comme pour tout x, $f_n(x) \to x$ quand n tend vers $+\infty$ (convergence simple), le théorème de convergence dominée assure (via la continuité de l'exponentielle) que le second membre tend vers $S = \exp\left(\lambda \displaystyle\int x m(x)\,\mathrm{d}x + C\lambda^2/4\right)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a donc :
$\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$.

Si on fixe deux réels $a < b$, la positivité de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)$ permet d'écrire : $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$.

Pour $x \in [a,b]$, $\mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)$ tend vers $\mathrm{e}^{\lambda x} m(x)$ (convergence simple) et $0 \leq \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x) \leq \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)$ (domination), cette dernière fonction étant continue donc intégrable sur $[a,b]$. Par le théorème de convergence dominée, il vient :
$\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$.
Comme ceci est vrai de tout segment $[a,b]$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)$, qui est positive, est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S$, ce qui est l'inégalité attendue.

13.

(13a.) Soit $\lambda \geq 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $1 \leq \mathrm{e}^{\lambda(x-a)} = \mathrm{e}^{-\lambda a}\mathrm{e}^{\lambda x}$ et d'après 12., $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est L^1 et :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda(x-a)} m(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda a} \int \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \exp(\lambda(M-a) + C\lambda^2/4)$.
En dérivant l'argument de l'exponentielle, on constate qu'il admet un minimum pour $\lambda = 2(a-M)/C$. Pour cette valeur de λ, on obtient l'inégalité demandée.

(13b.) Notons que $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de justifier l'intégrabilité au voisinage de $\pm\infty$.
On remarque que, comme m est continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto -\displaystyle\int_x^{+\infty} m(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de m.
On fixe $\alpha < 1/C$ comme dans l'énoncé et $a \geq M$ comme dans la question précédente. On intègre formellement par parties :
$$\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{\alpha x^2} \int_x^{+\infty} m(t)\,\mathrm{d}t\right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} 2\alpha x \mathrm{e}^{\alpha x^2} \left(\int_x^{+\infty} m(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$
D'après 12., pour $x \geq a \leq M$: $0 \leq \mathrm{e}^{\alpha x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} m(t)\,\mathrm{d}t \leq \exp[(\alpha - 1/C)x^2 + 2Mx/C - M^2/C]$, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$ (car $\alpha < 1/C$), ce qui montre que le crochet est bien convergent.
Fixons $\beta \in]\alpha - 1/C, 0[$. On vérifie (croissances comparées) qu'au voisinage de $+\infty$: $x\exp[(\alpha - 1/C)x^2 + 2Mx/C - M^2/C] = o(\mathrm{e}^{\beta x^2})$. Ceci assure la convergence de la seconde intégrale.
On en déduit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Étudions le cas de $-\infty$. Par un changement de variable évident, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-a} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\alpha x^2} m(-x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Or $m_1 : x \mapsto m(-x)$ est une mesure (clair). Vérifions qu'elle satisfait l'hypothèse du III.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 de dérivée bornée. On note $f_1 : x \mapsto f(-x)$, qui est également C^1, de dérivée bornée. D'après l'hypothèse de III, f_1 admet une entropie par rapport à m, donc $x \mapsto h(f(-x)^2)m(x)$ est L^1. On en déduit que $x \mapsto h(f(x)^2)m(-x)$ est L^1, donc f admet une entropie par rapport à m_1.
De plus, $\mathrm{Ent}_m(f_1) \leq C \displaystyle\int f_1'(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$. Le même changement de variable assure que $\mathrm{Ent}_{m_1}(f) \leq C \displaystyle\int f'(x)^2 m_1(x)\,\mathrm{d}x$
On en déduit que les résultats prouvés ci-dessus s'appliquent à la mesure m_1. En particulier, pour $a \geq \displaystyle\int x m(-x)\,\mathrm{d}x = -M$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\alpha x^2} m(-x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-a} e^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Finalement, $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)$ est intégrable au voisinage de $-\infty$, et donc sur $\mathbb{R}$.

Partie IV

14.

(14a.) Analysons la situation : $K = \displaystyle\int p(x)\,\mathrm{d}x$ est une constante strictement positive car p est continue et strictement positive. Si on note P une primitive de p, on peut écrire l'égalité sous la forme $P(u)' = K$, soit $P(u(t)) = Kt + K_0$. Comme $p > 0$, ses primitives sont strictement croissantes, donc injectives, on pourra écrire $u(t) = P^{-1}(Kt+K_0)$. Nécessairement, u est strictement croissante (par composition), on veut donc que u tende vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en 1, c'est-à-dire que P tende vers 0 en $-\infty$ (donc $K_0 = 0$) et K en $+\infty$.

Ces remarques informelles amènent à poser, pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$. L'application P est bien définie car p est intégrable, c'est une primitive de p, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et K, donc elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, K[$. Sa réciproque P^{-1} est de classe C^1 car $P' = p$ ne s'annule pas.

On pose donc, pour $t \in]0,1[$, $u(t) = P^{-1}(Kt)$. Par composition, u est C^1, bijective de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$, et un calcul direct donne $u'(t) = \dfrac{K}{p(P^{-1}(Kt))} = \dfrac{K}{p(u(t))}$.

(14b.) D'après 14a., pour tout $t \in]0,1[$: $\left(\displaystyle\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\cdot \displaystyle\int q(x)\,\mathrm{d}x\right) = p(u(t))q(v(t))u'(t)v'(t)$.

Notons que les quatre facteurs sont positifs. On considère les racines carrées des deux membres.

D'après l'hypothèse (4) : $\sqrt{p(u(t))}\sqrt{q(v(t))} \leq r\left(\frac{u(t)+v(t)}{2}\right)$.

Rappelons que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, (vient de $(|a|-|b|)^2 \geq 0$). On en déduit : $\sqrt{u'(t)v'(t)} \leq \dfrac{u'(t)+v'(t)}{2}$.

Finalement, $\sqrt{\left(\displaystyle\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\cdot \displaystyle\int q(x)\,\mathrm{d}x\right)} \leq r\left(\frac{u(t)+v(t)}{2}\right) \cdot \dfrac{u'(t)+v'(t)}{2}$.

On intègre les deux membres sur $]0,1[$, en tant que fonctions de t. Le membre de gauche est constant, donc inchangé par cette opération.

Considérons $w : t \in]0,1[\mapsto \dfrac{u(t)+v(t)}{2}$. C'est une fonction C^1, strictement croissante (somme de fonctions strictement croissante). Comme u et v tendent toutes les deux vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en 1, il en va de même pour w, qui définit une bijection croissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

Par changement de variable, on a donc : $\displaystyle\int_0^1 r\left(\frac{u(t)+v(t)}{2}\right)\frac{u'(t)+v'(t)}{2}\,\mathrm{d}t = \int r(x)\,\mathrm{d}x$, et on obtient finalement l'inégalité (5).

15.

(15a.) Si $y \notin A$, le premier membre est nul et l'inégalité est évidente.

Si $y \in A$, alors $d(x,A) \leq |x-y|$, donc $\frac{1}{2}d(x,A)^2 - x^2 - y^2 \leq (x-y)^2/2 - x^2 - y^2 = -(x+y)^2/2$ et on obtient l'inégalité demandée par croissance de exp.

(15b.) L'inégalité de 15a. ressemble fort à (4). Il suffit en effet de poser $p(x) = \exp(d(x,A)^2/2 - x^2)$, $q(x) = 1_A(x)\exp(-x^2)$ et $r(x) = \exp(-x^2)$ pour obtenir trois fonctions positives, continues par morceaux, intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (4). On applique donc 14b. :

$$\int \exp(d(x,A)^2/2 - x^2)\,\mathrm{d}x \times \int 1_A(x)\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

En divisant les deux membres par π, puis en intégrant le membre de droite, il vient : $\displaystyle\int \exp(d(x,A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \times \int 1_A(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x = \mu(A)\int \exp(d(x,A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \leq 1$, ce qui est l'inégalité attendue.

16.

(16a.) On note $A = \bigcup_{k=1}^{N} I^k$ où I^k est un intervalle et N un entier naturel non nul. Par double inclusion, on montre que $A_t = \bigcup_{k=1}^{N} I_t^k$:

S'il existe k tel que $x \in I_t^k$, alors $d(x,A) \leq d(x,I_k) \leq t$, donc $x \in A_t$.

Réciproquement, supposons $x \in A_t$. On se donne une suite (a_i) d'éléments de A telle que $d(x,a_i) \to d(x,A)$. Comme A est une réunion finie d'intervalles, il existe au moins un intervalle I^k qui contient une infinité de termes de cette suite. On en déduit $d(x,I^k) \leq d(x,A) \leq t$, donc $x \in I_t^k$.

On vérifie maintenant que si I est un intervalle, alors I_t est encore un intervalle.

Si I est vide, alors $I_t = \mathbb{R}$. On suppose donc I non vide.

Fixons $x < w < y$ avec $x,\, y \in I_t$.

Supposons qu'il existe $a \in I$ tel que $a \leq w$. On a alors deux cas : s'il existe $b \in I$ tel que $w < b$, alors $w \in I$ et $d(w, A) = 0 \leq t$; sinon, I est situé à gauche de w, donc $d(w, I) \leq d(y, I) \leq t$. On procède symétriquement s'il existe $a \in I$ tel que $a \geq w$, en considérant cette fois la position de x. Finalement, $w \in I_t$, donc I_t est un intervalle, ce qui montre que $A_t \in \mathrm{Int}$ pour tout $t \geq 0$.

(16b.) Si $x \notin A_t$, $\exp(d(x, A)^2/2) \geq \exp(t^2/2)$, donc $(1 - 1_A(x)) \exp(d(x, A)^2/2) \geq (1 - 1_A(x)) \exp(t^2/2)$, puisque les deux membres sont nuls lorsque $x \in A$.

En multipliant par $\mu(x)$ et en intégrant, il vient : $\displaystyle\int (1 - 1_A(x)) \exp(d(x, A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \geq \exp(t^2/2)(1 - \mu(A_t))$.

D'autre part, on majore $1 - 1_A \leq 1$ et donc d'après 15b. :
$\displaystyle\int (1 - 1_A(x)) \exp(d(x, A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \leq \int \exp(d(x, A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\mu(A)}$, d'où l'inégalité attendue.

EDB