

# École polytechnique - Écoles normales supérieures

## Concours d'admission 2018 - filière MP

### Corrigé de l'épreuve de mathématiques B

#### Questions préliminaires

1.(a) Pour  $P, Q \in A_N$  et  $t \in [0, 1]$ , le polynôme  $R = (1 - t)P + tQ$  est élément de  $A_N$  :

- pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $R(x) = (1 - t)P(x) + tQ(x) \geq 0$  car  $1 - t$ ,  $P(x)$ ,  $t$  et  $R(x)$  sont positifs ;
- $R(1) = (1 - t)P(1) + tQ(1) = 1$  et  $R(-1) = (1 - t)P(-1) + tQ(-1) = 1$  car  $P(1) = Q(1) = P(-1) = Q(-1) = 1$ .

$A_N$  est donc une partie convexe de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_N[X]$ .

1.(b) On a, pour  $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

- $\|P + Q\|_1 = \int_{-1}^1 |P(x) + Q(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |P(x)| + |Q(x)| dx = \|P\|_1 + \|Q\|_1$  ;
- $\|\alpha P\|_1 = \int_{-1}^1 |\alpha P(x)| dx = |\alpha| \int_{-1}^1 |P(x)| dx = \alpha \|P\|_1$  ;
- si  $\|P\|_1 = 0$ , la fonction  $t \mapsto |P(t)|$  est continue, positive sur  $[-1, 1]$  d'intégrale nulle : elle est donc nulle. Ainsi,  $P$  est le polynôme nul car il possède une infinité de racines.

$\|\cdot\|_1$  est donc une norme sur  $\mathbb{R}_N[X]$ .

1.(c) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $\varphi_x : P \mapsto P(x)$  est linéaire donc continue sur l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{R}_N[X]$ . On peut ensuite écrire :

$$A_N = \varphi_1^{-1}(\{1\}) \cup \varphi_{-1}^{-1}(\{1\}) \cup \left( \bigcup_{x \in ]-1, 1[} \varphi_x^{-1}([0, +\infty[) \right)$$

et  $A_N$  est fermé comme intersection de fermés (les parties  $\{1\}$  et  $[0, +\infty[$  sont des fermés de  $\mathbb{R}$  donc leurs images réciproques par les applications continues  $\varphi_x$  sont fermées).

2.(a) Comme  $L$  est positive sur  $A_N$  et que  $A_N$  est non vide, on peut définir  $a_N$ . Il existe alors une suite  $(P_k)_{k \geq 0}$  d'éléments de  $A_N$  telle que  $L(P_k)$  converge vers  $a_N$  quand  $k$  tend vers l'infini. Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P_k$  est positif sur  $[-1, 1]$ , donc  $\|P_k\|_1 = L(P_k)$ . On en déduit que la suite  $(P_k)$  est bornée (on munit  $\mathbb{R}_N[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_1$  : les normes sont toutes équivalentes car  $\mathbb{R}_N[X]$  est de dimension finie). Comme nous travaillons en dimension finie, on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente : il existe une extractrice  $\varphi$  et un élément  $P \in \mathbb{R}_N[X]$  tel que  $P_{\varphi(k)}$  converge vers  $P$ . Comme  $A_N$  est fermée,  $P \in A_N$  et l'application  $L$  étant continue (elle est linéaire), on a :

$$L(P_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} L(P)$$

On a ainsi construit un élément  $P$  de  $A_N$  tel que  $L(P) = a_N$  : la borne inférieure est atteinte.

**2.(b)** Pour  $P, Q \in B_N$  et  $t \in [0, 1]$ , le polynôme  $R = (1 - t)P + tQ$  est élément de  $A_N$  et vérifie

$$L(R) = (1 - t)L(P) + tL(Q) = (1 - t)a_N + ta_N = a_N$$

donc  $R \in B_N$  :  $B_N$  est convexe.

On a  $B_N = A_N \cap L^{-1}(\{a_N\})$  donc  $B_N$  est fermée, comme intersection de deux fermés ( $L$  est continue et  $\{a_N\}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ ); comme les éléments de  $B_N$  sont de norme égale à  $a_N$  (pour  $\|\cdot\|_1$ ),  $B_N$  est bornée : elle est donc compacte (dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés).

**2.(c)** Soit  $P \in B_N$ ; en posant  $Q(X) = P(-X)$ , on a  $Q \in A_N$  et  $L(Q) = L(P) = a_N$ . On en déduit que  $Q$  est élément de  $B_N$ , puis que c'est également le cas du polynôme pair  $R = \frac{P+Q}{2}$ , par convexité de  $B_N$ .

## Première partie

**3.(a)** Pour  $j = 0$ ,  $P_0$  est de degré 0 et pour  $j \geq 1$ , le polynôme  $(X^2 - 1)^j$  est de degré  $2j$ , donc sa dérivée  $j$ -ième est de degré  $j$ ; on a donc  $\deg(P_j) = j$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

**3.(b)**  $P_0$  est pair et pour  $j \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $(X^2 - 1)^j$  étant pair, sa dérivée  $j$ -ième est de même parité que  $j$  (la dérivée d'un polynôme pair est impaire et la dérivée d'un polynôme impair est paire).  $P_j$  est donc de même parité que  $j$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

**3.(c)** Le résultat est évident quand  $j = 0$ . Pour  $j \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$P_j(X) = \frac{1}{2^j j!} [(X - 1)^j (X + 1)^j]^{(j)} = \frac{1}{2^j j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} [(X - 1)^j]^{(i)} [(X + 1)^j]^{(j-i)}$$

En évaluant en 1, seul le terme correspondant à  $i = j$  est non nul. On a donc :

$$P_j(1) = \left[ \frac{1}{2^j j!} \binom{j}{j} j! (X + 1)^j \right]_{X=1} = 1$$

puis  $P_j(-1) = (-1)^j P_j(1) = (-1)^j$  en utilisant la propriété de parité de  $P_j$ .

**4.** Soit  $i, j$  tels que  $N \leq i < j \leq 0$ . On peut faire une intégration par parties (on ne manipule que des polynômes, qui sont de classe  $C^1$ ) :

$$\begin{aligned} 2^{i+j} i! j! \langle P_i, P_j \rangle &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i)} [(x^2 - 1)^j]^{(j)} dx \\ &= \left[ [(x^2 - 1)^i]^{(i)} [(x^2 - 1)^j]^{(j-1)} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i-1)} [(x^2 - 1)^j]^{(j+1)} dx \\ &= - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i-1)} [(x^2 - 1)^j]^{(j+1)} dx \end{aligned}$$

car 1 et  $-1$  étant racines d'ordre de  $(X^2 - 1)^i$ , ils sont racines de  $[(X^2 - 1)^i]^{(i-1)}$ . Comme  $[(X^2 - 1)^i]^{(i-k)}$  s'annule en 1 et en  $-1$  pour tout  $k$  compris entre 1 et  $i$ , on montre facilement par récurrence (sur  $k$ ) :

$$\forall k \in \{1, \dots, i\}, 2^{i+j} i! j! \langle P_i, P_j \rangle = (-1)^k \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i-k)} [(x^2 - 1)^j]^{(j+k)} dx$$

On a donc :

$$2^{i+j} i! j! \langle P_i, P_j \rangle = (-1)^i \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(0)} \underbrace{[(x^2 - 1)^j]^{(i+j)}}_{=0 \text{ car } i+j > 2j} dx = 0$$

La famille  $(P_j)_{0 \leq j \leq N}$  est donc orthogonale.

**5.(a)** Le calcul précédent, quand  $i = j$ , donne :

$$g_j = \frac{(-1)^j}{2^{2j} (j!)^2} \int_{-1}^1 \underbrace{(x^2 - 1)^j}_{=(-1)^j (1-x^2)^j} \underbrace{[(x^2 - 1)^j]^{(2j)}}_{=(2j)!} dx = \frac{(2j)!}{2^{2j} (j!)^2} I_j$$

**5.(b)** Soit  $j \geq 1$ . On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_j &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^j dx = [(1-x^2)^j x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2jx(1-x^2)^{j-1} x dx \\ &= 2j \int_{-1}^1 ((1-x^2)(1-x^2)^{j-1} - (1-x^2)^{j-1}) dx \\ &= 2j(I_j - I_{j-1}) \end{aligned}$$

**5.(c)** On obtient, pour  $j \in \mathbb{N}$  :  $I_j = \frac{2j}{2j+1} I_{j-1} = \dots = \frac{(2j)(2j-2)\dots 2}{(2j+1)(2j-1)\dots 3} I_0 = \frac{2^{2j+1}(j!)^2}{(2j+1)!}$ , puis

$$g_j = \frac{(2j)!}{2^{2j} (j!)^2} \frac{2^{2j+1}(j!)^2}{(2j+1)!} = \frac{2}{2j+1}.$$

**6.(a)** La famille  $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$  est échelonnée en degré et de cardinal  $n+1$ , donc c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**6.(b)** En notant  $P$  et  $I$  les espaces engendrés par ces deux familles, nous avons :

$$\Pi_n \oplus J_n = \mathbb{R}_n[X] = P \oplus I$$

avec  $P \subset \Pi_n$  et  $I \subset J_n$ ; on en déduit que  $P = \Pi_n$  et  $I = J_n$ , i.e. que  $(P_{2j})_{0 \leq j \leq n/2}$  et  $(P_{2j+1})_{0 \leq j \leq (n-1)/2}$  sont des bases de  $\Pi_n$  et  $J_n$ .

**7.** Comme  $R_N$  est pair, on peut l'écrire sous la forme  $R_N = P(X^2)$  avec  $P \in R[X]$ . On peut ensuite factoriser  $P$  en séparant ses racines réelles positives  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq r}$ , ses racines réelles strictement négatives  $(\beta_k)_{1 \leq k \leq s}$  et ses racines complexes non réelles conjuguées  $(\gamma_\ell, \bar{\gamma}_\ell)_{1 \leq \ell \leq t}$  :

$$P(X) = a \prod_{j=1}^r (X - \alpha_j) \prod_{k=1}^s (X - \beta_k) \prod_{\ell=1}^t (X - \gamma_\ell)(X - \bar{\gamma}_\ell)$$

Pour chaque  $i, j, \ell$ , on pose  $c_j = \sqrt{\alpha_j}$ ,  $\rho_k = \sqrt{-\beta_k}$  et on choisit une racine carrée  $w_\ell$  de  $\gamma_\ell$ . Les  $c_j$  sont des réels différents de 1 ou -1 (car  $R_N(1)$  et  $R_N(-1)$  sont non nuls), les  $\rho_k$  sont des réels non nuls (car leurs carrés sont strictement positifs) et les  $w_k$  ne sont ni réels, ni imaginaires purs (car leurs carrés ne sont pas réels). On a donc :

$$R_N(X) = a \prod_{j=1}^r (X^2 - c_j^2) \prod_{k=1}^s (X^2 + \rho_k^2) \prod_{\ell=1}^t (X^2 - w_\ell^2)(X^2 - \overline{w_\ell^2})$$

puis (avec  $R_N(1) = 1$ ) :

$$a = \frac{1}{\prod_{j=1}^r (1 - c_j^2) \prod_{k=1}^s (1 + \rho_k^2) \prod_{\ell=1}^t (1 - w_\ell^2)(1 - \overline{w_\ell^2})}$$

et donc

$$R_N(X) = \prod_{j=1}^r \frac{X^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} \prod_{k=1}^s \frac{X^2 + \rho_k^2}{1 + \rho_k^2} \prod_{\ell=1}^t \frac{X^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{X^2 - \overline{w_\ell^2}}{1 - \overline{w_\ell^2}}$$

8. Soit  $x \in [-1, 1]$ . On a  $0 \leq x^2 \leq 1$ , donc :

$$\begin{aligned} \forall k, 0 < \frac{x^2 + \rho_k^2}{1 + \rho_k^2} &\leq 1 \quad (\text{car } \rho_k^2 > 0) \\ \forall \ell, \frac{x^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{x^2 - \overline{w_\ell^2}}{1 - \overline{w_\ell^2}} &= \left| \frac{x^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \right|^2 > 0 \quad (\text{car } w_\ell^2 \notin \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Comme

$$0 \leq R_N(x) = \prod_{j=1}^r \frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} \underbrace{\prod_{k=1}^s \frac{x^2 + \rho_k^2}{1 + \rho_k^2} \prod_{\ell=1}^t \frac{x^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{x^2 - \overline{w_\ell^2}}{1 - \overline{w_\ell^2}}}_{>0}$$

on en déduit que  $0 \leq \prod_{j=1}^r \frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2}$  puis par produit d'inégalités :

$$0 \leq S_N(x) \leq R_N(x).$$

On en déduit que  $S_N \in \mathcal{A}_N$  (on a  $S_N(1) = S_N(-1) = 1$ ) et que  $L(S_N) = \int_{-1}^1 S_N(x) dx \leq \int_{-1}^1 R_N(x) dx = a_N$ , et donc  $L(S_N) = a_N$  par définition de  $a_N$  :  $S_N$  est élément de  $\mathcal{B}_N$ .

9. Soit  $x \in [-1, 1]$ . Quitte à réordonner les  $c_j$ , on peut supposer qu'il existe  $r'$  compris entre 1 et  $r$  tel que  $c_j \notin [-1, 1]$  si et seulement si  $j \leq r'$ . On a alors, pour  $1 \leq j \leq r'$ ,  $\frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} \geq 1$  (car  $x^2 - c_j^2 \leq 1 - c_j^2 < 0$ ), d'où :

$$1 \leq \prod_{j=1}^{r'} \frac{x - c_j^2}{1 - c_j^2} \quad (1)$$

On a ensuite :

$$0 \leq \prod_{j=1}^r \frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} = \underbrace{\prod_{j=1}^{r'} \frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2}}_{>0} \prod_{j=r'+1}^r \frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2}$$

donc  $\prod_{j=r'+1}^r \frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} \geq 0$  et on obtient :

$$0 \leq T_N(x) \leq S_N(x)$$

en multipliant (1) par le réel positif  $\prod_{j=r'+1}^r \frac{x^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} \prod_{\ell=1}^t \frac{x^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{x^2 - \bar{w}_\ell^2}{1 - \bar{w}_\ell^2}$ .

Le même argument qu'à la question (8) prouve que  $T_N \in \mathcal{B}_N$ .

**10.(a)** Notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des solution de cette équation. En notant  $z = X + iY$  (avec  $X, Y \in \mathbb{R}$ ) et  $\lambda = \left| \frac{w-1}{w+1} \right|$ , nous avons (en remarquant que  $\lambda^2 \neq 1$  car  $w$  n'est pas sur la médiatrice du segment  $[-1, 1]$ ) :

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{C} &\iff |z-1| = \lambda|z+1| \text{ (car } -1 \notin \mathcal{C}) \\ &\iff (X-1)^2 + Y^2 = \lambda^2((X+1)^2 + Y^2) \\ &\iff (1-\lambda^2)X^2 - 2(1+\lambda^2)X + (1-\lambda^2)Y^2 = \lambda^2 - 1 \\ &\iff \left( xX \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \right)^2 + Y^2 = \left( \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \right)^2 - 1 = \frac{4\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $C = \left( \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, 0 \right)$  et de rayon  $R = \frac{2\lambda}{|1-\lambda^2|}$ . Ce cercle contient trivialement le point  $w$  (car  $z = w$  vérifie l'équation initiale de  $\mathcal{C}$ ).

Pour  $Y \in ]-1, 1[$ , on a :

$$Y \in \mathcal{C} \iff |Y-1| = \lambda|Y+1| \iff (1-Y) = \lambda(1+Y) \iff Y = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Comme  $\lambda \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \in ]-1, 1[$  et on a prouvé que  $\mathcal{C}$  coupait l'intervalle  $]-1, 1[$  en l'unique point  $y = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ .

**10.(b)** On a  $\frac{|y-1|}{|y+1|} = \frac{|w-1|}{|w+1|}$ , donc

$$\frac{|w-1|}{|y-1|} = \frac{|w+1|}{|y+1|} = \frac{|w+1|}{y+1} = |w+1| \frac{1+\lambda}{2} = \frac{|w+1| + |1-w|}{2} > \frac{|1+1|}{2} = 1$$

par inégalité triangulaire (on a inégalité stricte car  $w \notin [-1, 1]$  : la distance de  $-1$  à  $1$  est strictement plus grande que la somme des distances de  $-1$  à  $w$  et de  $w$  à  $1$ ).

**10.(c)** Notons  $\mathcal{C}'$  cette nouvelle partie. On a clairement  $1 \in \mathcal{C}'$  et

$$\frac{|-1-\omega|}{|-1-y|} = \frac{|1+\omega|}{|1+y|} = \frac{|\omega-1|}{|y-1|} \text{ car } y \in \mathcal{C},$$

donc les points  $1$  et  $-1$  appartiennent à  $\mathcal{C}'$ .

On a, avec  $z = X + iY$ ,  $\omega = a + ib$  et  $\mu = \left| \frac{1-w}{1-y} \right| > 1$  :

$$z \in \mathcal{C}' \iff |z-\omega|^2 = \mu^2|z-y|^2 \text{ et } z \neq y$$

$$\begin{aligned}
&\iff |z - \omega|^2 = \mu^2 |z - y|^2 \text{ car } \omega \neq y \\
&\iff (X - a)^2 + (Y - b)^2 = \mu^2 ((X - y)^2 + Y^2) \\
&\iff (\mu^2 - 1)X^2 + 2X(a - y\mu^2) + (\mu^2 - 1)Y^2 + 2bY = a^2 + b^2 - \mu^2 y^2
\end{aligned}$$

Comme  $\mu^2 - 1$  est non nul,  $\mathcal{C}'$  est soit l'ensemble vide, soit un cercle. Comme il contient les deux points 1 et  $-1$ , c'est un cercle dont le centre appartient à la droite  $i\mathbb{R}$  (cela se traduit par  $a - y\mu^2 = 0$ ).

Comme les points 1 et  $-1$  sont sur  $\mathcal{C}'$ , le segment  $[-1, 1]$  est contenu dans le disque délimité par  $\mathcal{C}'$ . Comme  $\mu^2 > 1$ , ce disque a pour équation  $|z - \omega|^2 \geq \mu^2 |z - y|^2$ . Ainsi, on a :

$$\forall x \in [-1, 1], |x - \omega|^2 \geq \mu^2 |x - y|^2$$

ce qui donne :

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus y, \frac{|x - \omega|}{|x - y|} \geq \mu = \frac{|1 - \omega|}{|1 - y|} = \frac{|1 + \omega|}{|1 + y|}.$$

11. Pour chaque  $\ell \in \{1, \dots, t\}$ , on peut appliquer la question 12 aux complexes  $w_\ell, \overline{w}_\ell$  : leurs coefficients  $\lambda$  sont égaux (car  $\frac{|\omega - 1|}{|\omega + 1|} = \frac{|\overline{\omega} - 1|}{|\overline{\omega} + 1|}$ ) et donc les valeurs  $y$  associées sont également égales. De même, notons  $\lambda'$  et  $y'$  les valeurs  $\lambda$  et  $y$  associées aux complexes  $-w_\ell, -\overline{w}_\ell$ . Nous avons :

$$\lambda' = \frac{|-\omega - 1|}{|-\omega + 1|} = \frac{1}{\lambda} \text{ et } y' = \frac{1 - \lambda'}{1 + \lambda'} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = -y.$$

En notant  $y_\varepsilon$  la valeur  $y$ , et en remarquant que l'inégalité obtenue à la question 10.(c) peut s'écrire :

$$\forall x \in [-1, 1], \frac{|x - \omega|}{|1 - \omega|} \geq \frac{|x - y|}{|1 - y|}$$

nous obtenons pour tout  $x \in [-1, 1]$  :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{x^2 - \overline{w}_\ell^2}{1 - \overline{w}_\ell^2} &= \left| \frac{x^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{x^2 - \overline{w}_\ell^2}{1 - \overline{w}_\ell^2} \right| = \left| \frac{x - w_\ell}{1 - w_\ell} \cdot \frac{x - \overline{w}_\ell}{1 - \overline{w}_\ell} \cdot \frac{x - (-w_\ell)}{1 - (-w_\ell)} \cdot \frac{x - (-\overline{w}_\ell)}{1 - (-\overline{w}_\ell)} \right| \\
&\geq \left| \frac{x - y_\ell}{1 - y_\ell} \cdot \frac{x - y_\ell}{1 - y_\ell} \cdot \frac{x + y_\ell}{1 + y_\ell} \cdot \frac{x + y_\ell}{1 + y_\ell} \right| \\
&= \left( \frac{x^2 - y_\ell^2}{1 - y_\ell^2} \right)^2
\end{aligned}$$

En remplaçant dans  $T_N$  tous les facteurs  $\frac{x^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{x^2 - \overline{w}_\ell^2}{1 - \overline{w}_\ell^2}$  par  $\left( \frac{x^2 - y_\ell^2}{1 - y_\ell^2} \right)^2$ , nous obtenons un polynôme  $U_N$  de même degré que  $R_N$  tel que  $0 \leq U_N(X) \leq T_N(x) \leq S_N(x) \leq R_N(x)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ . On a donc une nouvelle fois  $U_N \in \mathcal{B}_N$  et comme  $\int_{-1}^1 (T_N - U_N)(x) dx = 0$  avec  $T_N - U_N \geq 0$  sur  $[-1, 1]$ , nous en déduisons que  $T_N = U_N$  (les deux polynômes coïncident sur la partie infinie  $[-1, 1]$ ). Comme  $U_N$  a toutes ses racines dans  $[-1, 1]$ , nous avons démontré que toutes les racines de  $T_N$  appartiennent à  $[-1, 1]$ .

En fait, les questions 8, 9 et 10 prouvent respectivement que  $s = 0$  ( $R_N = S_N$ ), que les  $c_j$  appartiennent tous à  $] -1, 1[$  ( $R_N = T_N$ ) et que  $t = 0$  ( $R_N = U_N$ ).

12.  $R_N$  étant pair, il est de degré pair  $2r$ , avec  $2r \leq N$ , i.e.  $r \leq n$ . Si  $r$  était strictement inférieur à  $n$ , le polynôme  $P = X^2 R_N$  serait de degré  $2(r + 1) \leq 2n \leq N$  avec  $\forall x \in [-1, 1], 0 \leq P(x) \leq R_N(x)$  : comme aux questions précédentes, ceci imposerait  $P \in \mathcal{B}_N$ , puis  $P = R_N$ , ce qui est absurde.  $R_N$  est donc de degré  $2n$ .

13. Le polynôme  $R_N$  a toutes ses racines dans  $] - 1, 1[$  (1 et  $-1$  ne sont pas racines car  $R_N(1) = R_N(-1) = 1$ ). On peut donc écrire :

$$R_N = a \prod_{j=1}^k (X - \alpha_j)^{m_j}$$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$  et  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $R_N$  est de signe constant sur  $] - 1, 1[$ , il ne change pas de signe en ses racines, donc les  $m_j$  sont pairs. Enfin,  $R_N \geq 0$  sur  $[-1, 1]$ , donc  $a > 0$ . On peut donc écrire  $R_N = U_N^2$  en posant :

$$U_N(X) = \varepsilon \sqrt{a} \prod_{j=1}^k (X - \alpha_j)^{m_j/2} \in \mathbb{R}[X]$$

où  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  est choisi de sorte que  $U_N(1) = 1$  (avec  $U_n(-1) = \pm 1$ , puisque  $U_n^2(-1) = R_N(-1) = 1$ ).

En notant  $V_N(X) = U_N(-X)$ , nous avons

$$U_N^2(X) = R_N(X) = R_N(-X) = V_N^2(X),$$

donc  $(U_N - V_N)(U_N + V_N) = 0$ . Comme  $\mathbb{R}[X]$  est intègre, soit  $U_N = V_N$ , soit  $U_N = -V_N$ , donc  $U_N$  est soit pair, soit impair.

- 14.(a) Pour tout  $P \in H_n$ , on a  $P^2 \in A_n$ , donc

$$\|U_N\|_2^2 = \int_{-1}^1 U_N^2(x) dx = L(R_N) \leq L(P^2) = \|P\|_2^2.$$

On en déduit que  $\|U_N\|_2$  est le minimum des  $\|P\|_2$  pour  $P \in H_n$ , puisque  $U_N$  est élément de  $H_n$ .

- 14.(b) Soient  $j, k$  tels que  $0 \leq j < k \leq \frac{n}{2}$ . On a  $U_N + t(P_{2j} - P_{2k}) \in H_n$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|U_N\|_2^2 \leq \|U_N + t(P_{2j} - P_{2k})\|_2^2$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq 2t \langle U_N, P_{2j} - P_{2k} \rangle + t^2 \|P_{2j} - P_{2k}\|_2^2$$

Ceci impose  $\langle U_N, P_{2j} - P_{2k} \rangle = 0$ , soit  $\langle U_N, P_{2j} \rangle = \langle U_N, P_{2k} \rangle$ . On peut donc noter  $\mu$  la valeur  $\langle U_N, P_{2j} \rangle$ , qui est commune à toutes les valeurs  $j$  telles que  $0 \leq j \leq n/2$ .

- 14.(c) Comme  $(P_{2j})_{0 \leq j \leq n/2}$  est une base orthogonale de  $\Pi_n$ , on peut écrire :

$$U_N = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{\langle U_N, P_{2j} \rangle}{\langle P_{2j}, P_{2j} \rangle} P_{2j} = \mu \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{P_{2j}}{g_{2j}}.$$

Comme  $U_N(1) = 1$  et  $P_{2j}(1) = 1$  pour tout  $j$ , on a  $\frac{1}{\mu} = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{1}{g_{2j}}$ .

- 14.(d) On en déduit, toujours grâce à l'orthogonalité de la famille  $(P_{2j})$  :

$$a_N = \|U_N\|_2^2 = \mu^2 \sum_{0 \leq j \leq n/2} \left\| \frac{P_{2j}}{g_{2j}} \right\|^2 = \mu^2 \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{1}{g_{2j}} = \mu = \left( \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{1}{g_{2j}} \right)^{-1}.$$

15. On peut reprendre la preuve de la question 14 en notant cette fois  $H_n$  l'hyperplan affine de  $J_n$  d'équation  $P(1) = 1$  :  $\|U_N\|_2$  est le minimum des  $\|P\|_2$  pour  $P \in H_n$  ;  $U_N$  est donc le projeté orthogonal du polynôme nul sur l'hyperplan affine  $H_n$ . On en déduit que pour tous points  $P_1, P_2 \in H_n$ ,  $U_N$  est orthogonal au vecteur  $P_2 - P_1$ . En particulier,  $\langle U_N, P_{2k+1} - 2_{2j+1} \rangle = 0$  pour tous  $j, k \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq j \leq k \leq (n-1)/2$ . La valeur  $\mu = \langle U_N, P_{2j+1} \rangle$  est donc constante pour  $0 \leq j \leq (n-1)/2$  et on peut écrire :

$$U_N = \sum_{0 \leq j \leq (n-1)/2} \frac{P_{2j+1}}{g_{2j+1}}.$$

On a ensuite, toujours avec  $U_N(1) = 1$ ,  $\frac{1}{\mu} = \sum_{0 \leq j \leq (n-1)/2} \frac{1}{g_{2j+1}}$ , puis

$$a_N = \left( \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{1}{g_{2j+1}} \right)^{-1}.$$

16. En posant  $V_N = \left( \sum_{0 \leq 2j \leq n} \frac{1}{g_{2j}} \right)^{-1} \sum_{0 \leq 2j \leq n} \frac{P_{2j}}{g_{2j}}$  et  $W_N = \left( \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \frac{1}{g_{2j+1}} \right)^{-1} \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \frac{P_{2j+1}}{g_{2j+1}}$ , nous avons :

•  $V_N^2, W_N^2 \in \mathcal{A}_N$  donc  $a_N \leq \|V_N\|_2^2$  et  $a_N \leq \|W_N\|_2^2$  ;

•  $a_N = \|V_N\|_2^2 = \left( \sum_{0 \leq 2j \leq n} \frac{1}{g_{2j}} \right)^{-1}$  ou  $a_N = \|W_N\|_2^2 = \left( \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \frac{1}{g_{2j+1}} \right)^{-1}$ .

On en déduit que  $a_N = \min \left( \left( \sum_{0 \leq 2j \leq n} \frac{1}{g_{2j}} \right)^{-1}, \left( \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \frac{1}{g_{2j+1}} \right)^{-1} \right)$ .

Si  $n$  est pair, avec  $n = 2m$ , nous avons :

$$\sum_{0 \leq 2j \leq n} \frac{1}{g_{2j}} = \sum_{j=0}^m \frac{4j+1}{2} = m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{2} > m^2 + \frac{1}{2}m = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{4j+3}{2} = \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \frac{1}{g_{2j+1}}$$

donc  $a_N = \left( m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{2} \right)^{-1}$  et  $U_N$  est pair.

Si  $n$  est impair, avec  $n = 2m+1$ , nous avons :

$$\sum_{0 \leq 2j \leq n} \frac{1}{g_{2j}} = \sum_{j=0}^m \frac{4j+1}{2} = m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{2} < m^2 + \frac{5}{2}m + \frac{3}{2} = \sum_{j=0}^m \frac{4j+3}{2} = \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \frac{1}{g_{2j+1}}$$

donc  $a_N = \left( m^2 + \frac{5}{2}m + \frac{3}{2} \right)^{-1}$  et  $U_N$  est impair.

17. Nous avons ainsi démontré que le polynôme  $R_N$  était unique, avec :

$$R_N = \begin{cases} \left( m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{2} \right)^{-2} \left( \sum_{0 \leq j \leq m} \frac{4j+1}{2} P_{2j} \right)^2 & \text{si } n = 2m \\ \left( m^2 + \frac{5}{2}m + \frac{3}{2} \right)^{-2} \left( \sum_{0 \leq j \leq m} \frac{4j+3}{2} P_{2j+1} \right)^2 & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$$