Partie I

1a. On a $(n \mid \mathrm{X}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}(\mathrm{X} = kn)$ (réunion disjointe). Ainsi

$$\mathbb{P}(n \mid \mathrm{X}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathrm{X} = kn) = \zeta(s)^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(kn)^s} = \zeta(s)^{-1}\zeta(s)n^{-s}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(n \mid \mathrm{X}) = \dfrac{1}{n^s} = n^{-s}}$

1b. Soit $\mathrm{J} \subset \mathbb{N}^*$ une partie non vide. Comme les $\left(p_j^{\alpha_j}\right)_{j\in\mathrm{J}}$ sont deux à deux premiers entre eux, on a

$$\forall x \in \mathbb{N}^*,\ \left(\forall j \in \mathrm{J},\ p_j^{\alpha_j} \mid x\right) \Longleftrightarrow \prod_{j\in\mathrm{J}} p_j^{\alpha_j} \mid x$$

Ainsi $\displaystyle\bigcap_{j\in\mathrm{J}}\left\{p_j^{\alpha_j} \mid \mathrm{X}\right\} = \left\{\prod_{j\in\mathrm{J}} p_j^{\alpha_j} \mid \mathrm{X}\right\}$ or selon la question précédente, on a :

$$\mathbb{P}\left(\prod_{j\in\mathrm{J}} p_j^{\alpha_j} \mid \mathrm{X}\right) = \left(\prod_{j\in\mathrm{J}} p_j^{\alpha_j}\right)^{-s} = \prod_{j\in\mathrm{J}}\left(p_j^{\alpha_j}\right)^{-s} = \prod_{j\in\mathrm{J}}\mathbb{P}\left(p_j^{\alpha_j} \mid \mathrm{X}\right)$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in\mathrm{J}}\left\{p_j^{\alpha_j} \mid \mathrm{X}\right\}\right) = \prod_{j\in\mathrm{J}}\mathbb{P}\left(\left\{p_j^{\alpha_j} \mid \mathrm{X}\right\}\right)$$

On a bien montré que $\boxed{\text{les évènements } \{p_1^{\alpha_1} \mid \mathrm{X}\}, \{p_2^{\alpha_2} \mid \mathrm{X}\}, \ldots, \{p_k^{\alpha_k} \mid \mathrm{X}\}, \ldots \text{ sont mutuellement indépendants}}$

2a. On sait que si $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants alors $(\mathrm{B}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants où $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{B}_k \in \{\mathrm{A}_k, \bar{\mathrm{A}_k}\}$.
Ainsi les événements $\{p_i \nmid \mathrm{X}\}$ ($i \in [\![1, r]\!]$) sont mutuellement indépendants.
De plus pour $i \in [\![1, r]\!]$, on a $\mathbb{P}(\{p_i \nmid \mathrm{X}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{p_i \mid \mathrm{X}\})$

Ainsi avec la question **1a**, on a $\boxed{\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r}\{p_i \nmid \mathrm{X}\}\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(1 - p_i^{-s}\right)}$

2b. On a par continuité décroissante et à l'aide de la question précédente : $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}\{p_i \nmid \mathrm{X}\}\right) = \lim_{r\to+\infty}\prod_{i=1}^{r}\left(1 - p_i^{-s}\right)$

Or $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}\{p_i \nmid \mathrm{X}\} = \{\mathrm{X} = 1\}$ et $\mathbb{P}(\{\mathrm{X} = 1\}) = \zeta(s)^{-1}$ par définition de la loi zêta.

On en déduit que $\boxed{\zeta(s)^{-1} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - p_k^{-s}\right)}$

3a. La variable aléatoire $\nu_{p_k}(\mathrm{X}) + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(\nu_{p_k}(\mathrm{X}) + 1 = m) = (\nu_{p_k}(\mathrm{X}) = m - 1) = \left(p_k^{m-1} \mid \mathrm{X}\right) \cap (p_k^m \nmid \mathrm{X}) = \left(p_k^{m-1} \mid \mathrm{X}\right) \setminus (p_k^m \mid \mathrm{X})$$

Or $(p_k^m \mid \mathrm{X}) \subset \left(p_k^{m-1} \mid \mathrm{X}\right)$ donc avec 1a :

$$\mathbb{P}\left(\nu_{p_k}(\mathrm{X}) + 1 = m\right) = \mathbb{P}\left(p_k^{m-1} \mid \mathrm{X}\right) - \mathbb{P}\left(p_k^m \mid \mathrm{X}\right) = p_k^{-s(m-1)} - p_k^{-sm} = \left(1 - p_k^{-s}\right)\left(1 - \left(1 - p_k^{-s}\right)\right)^{m-1}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ la variable aléatoire } \nu_{p_k}(\mathrm{X}) + 1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \left(1 - p_k^{-s}\right) \in]0, 1[}$

3b. Je note les événements $\mathrm{E}_i = \left(\nu_{p_{k_1}}(\mathrm{X}) = n_1\right)$ et $\mathrm{E}_i^{(\varepsilon)} = \left(\nu_{p_{k_i}}(\mathrm{X}) \geqslant n_i + \varepsilon\right)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

On a remarque que $\mathrm{E}_i \bigcup \mathrm{E}_i^{(1)} = \mathrm{E}_i^{(0)}$ (union disjointe)

Je vais montrer par récurrence sur $s \in [\![1, r]\!]$ que pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s \cap \mathrm{F}\right) = \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{F}\right)$$

Pour $s = 1$, on a $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{1} (-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1 \in \{0,1\}^1 \\ \varepsilon_1 = \ell}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \mathrm{F}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(0)} \cap \mathrm{F}\right) - \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(1)} \cap \mathrm{F}\right)$

Or on a l'union disjointe : $\mathrm{E}_1^{(0)} \cap \mathrm{F} = \left(\mathrm{E}_1^{(1)} \cap \mathrm{F}\right) \cup \left(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}\right)$

d'où $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{1} (-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1 \in \{0,1\}^1 \\ \varepsilon_1 = \ell}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \mathrm{F}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}\right)$ ce qui établit l'initialisation.

Pour l'hérédité, on considère $s \in [\![1, r-1]\!]$ tel que la propriété soit vraie au rang s.

Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{A}$. On a en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'événement $\mathrm{E}_{s+1} \cap \mathrm{F}$:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s \cap \mathrm{E}_{s+1} \cap \mathrm{F}\right) = \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{E}_{s+1} \cap \mathrm{F}\right)$$

or pour $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0, 1\}^s$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{E}_{s+1} \cap \mathrm{F}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{E}_{s+1}^0 \cap \mathrm{F}\right) - \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{E}_{s+1}^1 \cap \mathrm{F}\right)$$

donc $\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s \cap \mathrm{E}_{s+1} \cap \mathrm{F}\right)$ est égal à :

$$\sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s + 0 = \ell + 0}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{E}_{s+1}^0 \cap \mathrm{F}\right) + \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s + 1 = \ell + 1}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{E}_{s+1}^1 \cap \mathrm{F}\right)$$

En remarquant que $\{0, 1\}^{s+1} = (\{0, 1\}^s \times \{0\}) \bigcup (\{0, 1\}^s \times \{1\})$, on obtient par changement d'indice :

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s \cap \mathrm{E}_{s+1} \cap \mathrm{F}\right) = \sum_{\ell=0}^{s+1} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s+1}) \in \{0,1\}^{s+1} \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s+1} = \ell}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)} \cap \mathrm{E}_{s+1} \cap \mathrm{F}\right)$$

Ce qui établit l'hérédité.

On a prouvé par récurrence que la propriété est vrai pour tout $s \in [\![1, r]\!]$ et tout $\mathrm{F} \in \mathcal{A}$

En particulier pour $s = r$ et $\mathrm{F} = \Omega$, on obtient l'égalité voulue :

$\mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(\mathrm{X}) = n_1, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(\mathrm{X}) = n_r\right)$ est bien égal à

$$\sum_{\ell=0}^{r} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r = \ell}} \mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(\mathrm{X}) \geqslant n_1 + \varepsilon_1, \nu_{p_{k_2}}(\mathrm{X}) \geqslant n_2 + \varepsilon_2, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(\mathrm{X}) \geqslant n_r + \varepsilon_r\right)$$

3c. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et p premier , on a $(\nu_p(\mathrm{X}) \geqslant m) = (p^m \mid \mathrm{X})$. Ainsi selon 1b,

les événements $\left(\nu_{p_{k_1}}(\mathrm{X}) \geqslant n_1 + \varepsilon_1\right), \left(\nu_{p_{k_2}}(\mathrm{X}) \geqslant n_2 + \varepsilon_2\right), \ldots, \left(\nu_{p_{k_r}}(\mathrm{X}) \geqslant n_r + \varepsilon_r\right)$ sont mutuellement indépendants.

donc en reprenant les notations de 3b, on a $\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)}, \mathrm{E}_2^{(\varepsilon_2)}, \ldots \mathrm{E}_r^{(\varepsilon_s)}$ sont mutuellement indépendants et

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_{s-1} \cap \mathrm{E}_s\right) = \sum_{\ell=0}^{s} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)} \cap \cdots \cap \mathrm{E}_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})} \cap \mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)}\right)$$

qui est donc égal à $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{s}(-1)^{\ell}\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s)\in\{0,1\}^s\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_s=\ell}}\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)}\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})}\right)\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_s^{(\varepsilon_s)}\right)$ donc égal à

$\displaystyle\sum_{\ell=0}^{s-1}(-1)^{\ell}\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{s-1})\in\{0,1\}^{s-1}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{s-1}=\ell}}\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)}\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})}\right)\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_s^{(0)}\right)-\sum_{\ell=1}^{s}(-1)^{\ell-1}\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{s-1})\in\{0,1\}^{s-1}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{s-1}=\ell-1}}\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_1^{(\varepsilon_1)}\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})}\right)\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_s^{(1)}\right)$

En réorganisant la somme et en utilisant l'union disjointe $\mathrm{E}_s^{(0)}=\mathrm{E}_s^{(1)}\cup\mathrm{E}_s$
on trouve alors $\mathbb{P}(\mathrm{E}_1\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{s-1}\cap\mathrm{E}_s)=\mathbb{P}(\mathrm{E}_1\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{s-1})\,\mathbb{P}(\mathrm{E}_s)$
puis en procédant par récurrence $\mathbb{P}(\mathrm{E}_1\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{s-1}\cap\mathrm{E}_s)=\mathbb{P}(\mathrm{E}_1)\cdots\mathbb{P}(\mathrm{E}_{s-1})\,\mathbb{P}(\mathrm{E}_s)$
Ainsi on a montré : pour tout $r\in\mathbb{N}^*, k_1<\cdots<k_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}^r$ que

$$\mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(\mathrm{X})=n_1,\dots,\nu_{p_{k_r}}(\mathrm{X})=n_r\right)=\mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(\mathrm{X})=n_1\right)\mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_2}}(\mathrm{X})=n_2\right)\cdots\mathbb{P}\left(\nu_{p_{k_r}}(\mathrm{X})=n_r\right)$$

On en déduit que $\boxed{\text{les variables aléatoires } \nu_{p_1}(\mathrm{X}),\dots,\nu_{p_k}(\mathrm{X}),\dots \text{ sont mutuellement indépendantes}}$

4a. Soit m et n sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

Je pose $\mathrm{D}(m)=\{d\in\mathbb{N}^*\mid d\mid m\}$ On remarque que $\chi_4\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\\ d & \longmapsto & \begin{cases}1 & \text{si } d\equiv 1\,[4]\\ -1 & \text{si } d\equiv 3\,[4]\\ 0 & \text{si } d\equiv 0\,[2]\end{cases}\end{array}\right.$

et $g(m)=\displaystyle\sum_{d\in\mathrm{D}(m)}\chi_4(d)$ et de même $g(n)=\displaystyle\sum_{d\in\mathrm{D}(n)}\chi_4(d)$

Ensuite je définis l'application $\varphi\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{D}(m)\times\mathrm{D}(n) & \longrightarrow & \mathrm{D}(mn)\\ (d_1,d_2) & \longmapsto & d_1d_2\end{array}\right.$

On constate facilement que cette application est bien définie.
Soit (d_1,d_2) et $(d_1',d_2')\in\mathrm{D}(m)\times\mathrm{D}(n)$ tel que $d_1d_2=d_1'd_2'$,
alors on a $d_1\wedge d_2'=1$ et $d_1\mid d_1'd_2'$ donc $d_1\mid d_1'$ selon Gauss
et de même $d_1'\wedge d_1$ d'où $d_1=d_1'$ puis $d_2=d_2'$ d'où φ est injective
Enfin pour $d\in\mathrm{D}(mn)$ on a $(d\wedge m, d\wedge n)\in\mathrm{D}(m)\times\mathrm{D}(n)$ et $\varphi(d\wedge n, d\wedge m)=d$
Ainsi φ est surjective
Donc φ est bijective d'où

$$g(m)g(n)=\sum_{d\in\mathrm{D}(m)}\chi_4(d)\sum_{d'\in\mathrm{D}(n)}\chi_4(d')=\sum_{(d,d')\in\mathrm{D}(m)\times\mathrm{D}(n)}\chi_4(dd')=\sum_{(d,d')\in\mathrm{D}(m)\times\mathrm{D}(n)}\chi_4(\varphi(d,d'))=\sum_{d\in\mathrm{D}(mn)}\chi_4(d)$$

On a bien : $\boxed{g(mn)=g(m)g(n)}$

4b. On reprend les notations du 4a. On remarque que $\mathrm{D}(p^n)=\left\{p^k\mid k\in[\![0,n]\!]\right\}$ de sorte que

$$g(p^n)=\sum_{k=0}^{n}\chi_4(p^k)$$

Si $p=2$, alors $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \chi_4(p^k)=0$ car $2\mid p^k$ et donc $g(p^n)=\chi_4(p^0)+0=\rho(1)=1$

Si $p\equiv 1\,[4]$, alors $\forall k\in[\![0,n]\!],\ p^k\equiv 1\,[4]$ donc $g(p^n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\chi_4(p^k)=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$

Si $p\equiv 3\,[4]$, alors $\forall k\in[\![0,n]\!],\ p^k\equiv(-1)^k\,[4]$ donc $g(p^n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}$

Ainsi on a $\boxed{g(p^n)=\begin{cases}1 & \text{si } p=2,\\ n+1 & \text{si } p\equiv 1\,[4],\\ \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) & \text{si } p=3\,[4]\end{cases}}$

5. Comme $h(\mathrm{X})$ est d'espérance finie, alors , selon la formule de transfert,

on a existence des membres et égalité : $\mathbb{E}\left(h(\mathrm{X})\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$. Par hypothèse on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)| \leqslant h(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ et $|f(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)| \leqslant h(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ par passage à la limite

donc les séries $\sum_{k\geqslant 1} f_n(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ et $\sum_{k\geqslant 1} f(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ convergent absolument.

D'où les existences des espérances : $\mathbb{E}\left(f_n(\mathrm{X})\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ et $\mathbb{E}(f(\mathrm{X})) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$

On pose alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_k\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f_n(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) \end{array}\right.$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\varphi_k(n)| \leqslant h(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$$

or on vient de voir que la série $\sum_{k\geqslant 1} h(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ convergeait

Ainsi la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} \varphi_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}^*$ (voisinage de $+\infty$)

Je note S la fonction somme de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \mathbb{E}\left(f_n(\mathrm{X})\right)$$

De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_k(n) = \lim_{n\to+\infty} f_n(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = f(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$

Ainsi selon le théorème de la double limite : $\mathrm{S}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))$

Autrement dit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f_n(\mathrm{X})\right) = \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))}$

6a. On a $\zeta(s)^2 = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (qm)^{-s}$ par linéarité

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{m\geqslant 1} (qm)^{-s}$ converge et la série $\sum_{q\geqslant 1} \sum_{m=1}^{+\infty} (qm)^{-s}$

Comme les termes sont positifs, la famille double est sommable et on a donc $\zeta(s)^2 = \sum_{(q,m)\in\mathbb{N}^*} (qm)^{-s}$

En sommant par paquets on donc $\zeta(s)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(q,m)\in\mathbb{N}^* \\ qm=n}} (qm)^{-s} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(q,m)\in\mathbb{N}^* \\ qm=n}} n^{-s}$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $r(n) = \mathrm{Card}\left(\left\{(q,m) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2 \mid qm = n\right\}\right)$

Ainsi $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} r(n)n^{-s} \text{ converge et sa somme vaut } \zeta(s)^2}$

6b. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g(n)| = |r_1(n) - r_3(n)| \leqslant \sum_{i=0}^{3} r_i(n) = r(n)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g(n)n^{-s}| \leqslant r(n)n^{-s}$

Par comparaison à une série à termes positifs $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} g(n)n^{-s} \text{ converge absolument donc converge}}$

7a. Soit $x \in \mathbb{N}^*$. Par décomposition de produit en facteurs premiers il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $x = \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} p_k^{\nu_{p_k}(x)}$ puis

$\forall n \geqslant \mathrm{N},\ x = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}$ Ainsi $\boxed{\left(x \mapsto \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\geqslant 1} \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ converge simplement vers la fonction identité}}$

7b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a d'après 4b, $\forall x \in \mathbb{N}^*,\ g\left(p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right) \leqslant \nu_{p_k}(x) + 1$ donc $0 \leqslant g\left(p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right) \leqslant \nu_{p_k}(\mathrm{X}) + 1$

or $\nu_{p_k}(\mathrm{X}) + 1$ suit une loi géométrique (3a) donc $\nu_{p_k}(\mathrm{X}) + 1$ puis $g\left(p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right)$ est d'espérance finie

De plus, les $\nu_{p_k}(\mathrm{X})$ $(k \in [\![1, n]\!])$ sont mutuellement indépendantes selon 3c

Ainsi les $g\left(p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right)$ $(k \in [\![1, n]\!])$ le sont également d'après le lemme des coalitions

donc $\prod_{k=1}^{n} g\left(p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right)$ est d'espérance finie et en utilisant 4a. on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} g\left(p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right)\right) = \mathbb{E}\left(g\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right)\right)$$

Je pose $f_n : x \longmapsto g\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$ de sorte que (f_n) converge simplement vers g sur $\mathbb{N}^*$ (suites stationnaires)

En utilisant 4a et 4b et comme $\forall x \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geqslant x,\ p_k \geqslant k$ et $\nu_{p_k}(x) = 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} g\left(p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\nu_{p_k}(x) + 1\right) \leqslant \prod_{k=1}^{x} \left(\nu_{p_k}(x) + 1\right) \leqslant r(x)$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leqslant r(x)$ et $r(\mathrm{X})$ est d'espérance finie qui vaut $\zeta(s)$ d'après 6a

D'où $\boxed{\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \lim_{n\to+\infty} = \mathbb{E}(f_n(\mathrm{X})) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(\mathrm{X})}\right)\right)}$ selon 5

8a. On suppose que p est un nombre premier tel que $p \equiv 1\,[4]$.

On a $g\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right) = \nu_p(\mathrm{X}) + 1$ (4b) et $\nu_p(\mathrm{X}) + 1 \sim \mathcal{G}(1 - p^{-s})$ selon 2b donc $\boxed{\mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right)\right) = \frac{1}{1-p^{-s}}}$

8b. Si p est un nombre premier vérifiant $p \equiv 3\,[4]$, alors on a $g\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right) = \dfrac{1 + (-1)^{\nu_p(\mathrm{X})}}{2}$ (4b)

$(-1)^{\nu_p(\mathrm{X})}$ est bornée donc admet une espérance et $(-1)^{\nu_p(\mathrm{X})} = -(-1)^{1+\nu_p(\mathrm{X})}$

Comme $1 + \nu_p(\mathrm{X}) \sim \mathcal{G}(1 - p^{-s})$ selon 2b, alors selon la formule de transfert, par somme géométrique :

$$\mathbb{E}\left((-1)^{\nu_p(\mathrm{X})}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (1 - p^{-s}) \left(p^{-s}\right)^{k-1} = -\frac{-(1 - p^{-s})}{1 + p^{-s}} = \frac{1 - p^{-s}}{1 + p^{-s}}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 - p^{-s}}{1 + p^{-s}}\right) = \frac{1}{1 + p^{-s}}}$

8c. Si $p \equiv 3\,[4]$ alors $\chi_4(p) = -1$ et si $p \equiv 1\,[4]$ alors $\chi_4(p) = 1$

Ainsi pour p premier impair on vient de voir (8a et 8b) que : $\mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right)\right) = \dfrac{1}{1 + \chi_4(p)p^{-s}}$

Par ailleurs, on a : $g\left(2^{\nu_2(\mathrm{X})}\right) = 1$ donc $\mathbb{E}\left(g\left(2^{\nu_2(\mathrm{X})}\right)\right) = 1 = \dfrac{1}{1 + \chi_4(2)2^{-s}}$

Avec 7b, on peut alors conclure que : $\boxed{\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \chi_4\left(p_k\right) p_k^{-s}}}$

9a. On remarque que $\chi_4\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right) = \chi_4(p)^{\nu_p(\mathrm{X})}$

Si $p=2$, alors $\chi_4(p)=0$ et donc $\chi_4(p)^{\nu_p(\mathrm{X})} = 0^{\nu_p(\mathrm{X})}$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\chi_4(p)^{\nu_p(\mathrm{X})}\right) = 0\mathbb{P}(\nu_p(\mathrm{X}) \geqslant 1) + 1\mathbb{P}(\nu_p(\mathrm{X})=0) = 1-\mathbb{P}(2 \mid \mathrm{X}) = 1-2^{-s} = \dfrac{1-2^{-s}}{1-\chi_4(2)2^{-s}}$

Si $p \equiv 3\,[4]$ alors $\chi_4(p)=-1$ et on a vu en 8b que $\mathbb{E}\left(\chi_4(p)^{\nu_p(\mathrm{X})}\right) = \dfrac{1-p^{-s}}{1+p^{-s}} = \dfrac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}$

Si $p \equiv 1\,[4]$ alors $\chi_4(p)=1$ et $\mathbb{E}\left(\chi_4(p)^{\nu_p(\mathrm{X})}\right) = 1 = \dfrac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}$

Dans tous les cas si p est un nombre premier, $\boxed{\mathbb{E}\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right)\right) = \dfrac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}}$

9b. On procède comme en 7b. on sait déjà que $\mathbb{E}\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(\mathrm{X})}\right)\right)$ existe et aussi $\forall m,n \in \mathbb{N}^*,\ \chi_4(nm)) = \chi_4(n)\chi_4(m)$

On pose $f_n : x \longmapsto \chi_4\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$ de sorte que la suite (f_n) converge simplement vers χ_4 sur $\mathbb{N}^*$ (suites stationnaires).

Il suffit de trouver une fonction h positive tel que $h(\mathrm{X})$ est d'espérance finie et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(k)| \leqslant h(k)$
La fonction constante égale à 1 fait l'affaire.

Ainsi comme en 7b : $\mathbb{E}(\chi_4(\mathrm{X})) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1-p_k^{-s}}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}$ or $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1-p_k^{-s}\right) = \dfrac{1}{\zeta(s)} \neq 0$ selon 2b

donc $\left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}\right)_n$ converge et

ainsi $\boxed{\mathbb{E}(\chi_4(\mathrm{X})) = \dfrac{1}{\zeta(s)} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}}$

9c. Donc avec 8c et le transfert, on a

$$\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \zeta(s)\mathbb{E}(\chi_4(\mathrm{X})) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(s)\chi_4(k)\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(k)}{k^s}$$

Comme $\chi_4(\mathrm{X})$ est d'espérance finie, la série est absolument convergente, on peut regrouper et ré-indexer (famille sommable) donc

$$\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\chi_4(k)}{k^s} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\chi_4(k)}{k^s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\chi_4(2n+1)}{(2n+1)^s} + 0$$

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \text{ est convergente et que sa somme vaut } \mathbb{E}(g(\mathrm{X}))}$

Partie II

10a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\theta} = (\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{i}^k \sin^k(\theta)\cos^{2n+1-k}(\theta)$

En séparant termes pairs et impairs :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\theta} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}\mathrm{i}(-1)^p \sin^{2p+1}(\theta)\cos^{2(n-p)}(\theta) + \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p}(-1)^p\sin^{2p}(\theta)\cos^{2(n-p)+1}(\theta)$$

En prenant la partie imaginaire : $\sin((2n+1)\theta) = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\sin^{2p+1}(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)^{n-p}$

Je pose $\boxed{\mathrm{P}_n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}\mathrm{X}^p(1-\mathrm{X})^{n-p} \text{ de sorte que } \forall\theta\in\mathbb{R},\ \sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)\mathrm{P}_n\left(\sin^2(\theta)\right)}$

10b. On remarque que P_n est unique car caractérisé par les valeurs prises sur $]0,1]$ qui est infini.
En évaluant en $\theta=\pi/2$ l'identité du 10a, on voit que P_n est non nul de plus $\deg(\mathrm{P}_n)\leqslant n$ par somme.
Soit $\theta\in]0,\pi/2]$. On a $\sin(\theta)\neq 0$ et $(2n+1)\theta\in]0,n\pi+\pi/2]$ donc

$$\mathrm{P}_n\left(\sin^2(\theta)\right)=0 \iff \sin((2n+1)\theta)=0 \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ (2n+1)\theta=k\pi \iff \exists k\in[\![1,n]\!],\theta=\frac{k\pi}{2n+1}$$

La fonction sin est strictement croissante sur $]0,\pi/2]$ et positive donc $\sin^2$ y est injective.
On a donc trouvé au moins n racines distincts de P_n : les $\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour k parcourant $[\![1,n]\!]$

Ainsi $\boxed{\mathrm{P}_n \text{ est exactement de degré } n \text{ de racines distinctes les } \sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \text{ pour } k\in[\![1,n]\!]}$

On peut donc écrire $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})=\mu\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\mathrm{X}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$ avec $\mu\in\mathbb{R}^*$.

À l'aide de 10a et comme $t\mapsto \mathrm{P}_n(t)$ est continue et que $\sin(t)\underset{t\to 0}{\sim} t$, on a :

$$\mu=\mathrm{P}_n(0)=\lim_{\theta\to 0}\mathrm{P}_n\left(\sin^2(\theta)\right)=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}=2n+1$$

On en déduit que : $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(x)=(2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$.

10c. On applique 10a à $\theta=\pi x/(2n+1)$ puis 10b

et on obtient : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(\pi x)=(2n+1)\sin\left(\dfrac{\pi x}{2n+1}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$

11a. Soit $k\in[\![1,m]\!]$. À l'aide de l'équivalent de sin en 0, on a

$$\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-\frac{x^2}{k^2}\quad\text{et}\quad(2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pi x$$

donc par produit fini : $u_{m,n}(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pi x\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\frac{(-1)^m\displaystyle\prod_{k=-m}^{m}(x-k)}{(m!)^2}$

Comme $x\notin\mathbb{Z}$, on a $\dfrac{(-1)^m\displaystyle\prod_{k=-m}^{m}(x-k)}{(m!)^2}\neq 0$ donc $\boxed{(u_{m,n}(x))_{n>m}\text{ est convergente dans }\mathbb{R}^*}$

Ainsi il existe un rang n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0,\ u_{m,n}(x)\neq 0$
Pour $n\geqslant n_0$, on a selon 10c :

$$v_{m,n}(x)=\frac{v_{m,n}(x)u_{m,n}(x)}{u_{m,n}(x)}=\frac{\sin(\pi x)}{u_{m,n}(x)}$$

or $\sin(\pi x)\neq 0$ donc $\boxed{(v_{m,n}(x))_{n>m}\text{ est convergente dans }\mathbb{R}^*}$ par quotient

11b. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$. Soit $k \in [\![m+1, n]\!]$.

On a par concavité de sin sur $[0, \pi/2]$: $\forall \theta \in]0, \pi/2]$, $0 < \dfrac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta$

Comme $m > |x|$, alors on a $k > |x|$ et $0 < \dfrac{|x|\pi}{2n+1} < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \pi/2$

Comme $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et sin est croissante sur $]0, \pi/2]$ à valeurs positives.

On obtient :

$$0 \leqslant \frac{\sin^2\left(\frac{|x|\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \frac{\left(\frac{|x|\pi}{(2n+1)}\right)^2}{\left(\frac{2k\pi}{(2n+1)\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2 x^2}{4k^2} < 1$$

d'où par parité de $\sin^2$, on a : $1 \geqslant 1 - \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \geqslant 1 - \dfrac{\pi^2 x^2}{4k^2} > 0$

Par produit de réels positifs : $\boxed{1 \geqslant v_{m,n}(x) \geqslant \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right) > 0}$

En passant au ln avec des quantités > 0, on a : $0 \geqslant \ln(v_{m,n}(x)) \geqslant \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$

Comme $-\ln\left(1 - \dfrac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2 x^2}{4k^2}$, alors par comparaison entre séries à termes positifs,

la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant m+1} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$ converge

Comme ln est continue sur $]0, +\infty[$ et que $v_m(x) > 0$ en tant que limite non nulle de réels positifs, on obtient par prolongement des inégalités :

$$0 \geqslant \ln(v_m(x)) \geqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ (reste d'une série convergente)

Ainsi par théorème des gendarmes : $\ln(v_m(x)) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ puis par continuité de exp : $\boxed{\lim_{m \to +\infty} v_m(x) = 1}$

11c. Si $x = 0$, on a $\sin(\pi x) = 0 = \pi x \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 0$ car $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 1$

Si $x \in \mathbb{Z}^*$, alors pour $n \geqslant |x|$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 0$ donc $\sin(\pi x) = 0 = \pi x \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$

Si $x \notin \mathbb{Z}$. On considère m et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $|x| < m < n$, on a $\sin(\pi x) = u_{m,n}(x) v_{m,n}(x)$ selon 11a.

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $\sin(\pi x) = \pi x \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) v_m(x)$ selon 11a encore

Pour m assez grand, on a $v_m(x) \neq 0$ car $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} v_m(x) = 1$ selon 11b

Ainsi $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x v_m(x)}$ et on en déduit que $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

et que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi x) = \pi x \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}$

Partie III

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 < 1 + xk^{-1}$ donc $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{e^{xk^{-1}}}{1+xk^{-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(xk^{-1} - \ln(1+xk^{-1})\right)$.

Or quand $k \to +\infty$, $xk^{-1} - \ln(1+xk^{-1}) = \frac{\left(xk^{-1}\right)^2}{2} + o\left(xk^{-1}\right)^2 = \mathrm{O}\left(1/k^2\right)$

Ainsi la série $\sum_{k\geqslant 1}^{n} \left(xk^{-1} - \ln(1+xk^{-1})\right)$ converge. On note S sa somme ainsi

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \left(xk^{-1} - \ln(1+xk^{-1})\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{x} e^{-\gamma x} e^{S} > 0$$

d'où $\boxed{\text{la suite de fonctions } (\Gamma_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[\text{ vers une fonction } \Gamma :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[}$

13. Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln\left(x\Gamma_n(x)\right) = \ln(x) - \ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{n} \left(xk^{-1} - \ln(1+xk^{-1})\right)$

donc $\ln\left(x\Gamma_n(x)\right) - \ln\left(\Gamma_n(x+1)\right) = \ln(x+1) + \gamma + \sum_{k=1}^{n} \left(-k^{-1} - \ln(1+xk^{-1}) + \ln(1+(x+1)k^{-1})\right)$

ainsi $\ln\left(x\Gamma_n(x)\right) - \ln\left(\Gamma_n(x+1)\right) = \ln(x+1) + \gamma + \sum_{k=1}^{n} \left(-k^{-1} + \ln(k+(x+1)) - \ln(k+x)\right)$

donc $\ln\left(x\Gamma_n(x)\right) - \ln\left(\Gamma_n(x+1)\right) = +\gamma + \ln(n+1+x) - \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ après télescopage

d'où $\ln\left(x\Gamma_n(x)\right) - \ln\left(\Gamma_n(x+1)\right) = \ln(n+1+x) - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln(n) - \gamma\right)$

Comme $\ln(n+1+x) - \ln(n) = \ln(1+(1+x)/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln(n) - \gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (selon le rappel III)

Ainsi en passant à la limite $\ln\left(x\Gamma(x)\right) - \ln\left(\Gamma(x+1)\right) = 0$ et on a bien $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$

14a. Je note $g_0 : x \longmapsto -\ln(x) - \gamma x$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{e^{xk^{-1}}}{1+xk^{-1}}\right) = xk^{-1} - \ln\left(1+xk^{-1}\right)$

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$
de dérivées : $g_0' : x \longmapsto -\frac{1}{x} - \gamma$ et $g_k' : x \longmapsto k^{-1} - \frac{k^{-1}}{1+xk^{-1}} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ si $k > 0$
et de dérivées secondes : $g_0'' : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ et $g_k'' : x \longmapsto \frac{1}{(k+x)^2}$ si $k > 0$

(ii) Selon 12, la série $\sum_{k\geqslant 0} g_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ de somme $\ln(\Gamma)$

(iii) Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $|g_k'(x)| = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$
Ainsi la série $\sum_{k\geqslant 0} g_k'(x)$ converge donc la série $\sum_{k\geqslant 0} g_k'$ converge simplement sur $]0,+\infty[$

(iv) Soit $a < b$ dans $]0,+\infty[$. On a

$$\forall x \in [a,b],\ \forall k \in \mathbb{N},\ |g_k''(x)| \leqslant \frac{1}{(k+a)^2}$$

Or la série $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{(k+a)^2}$ converge donc la série $\sum_{k\geqslant 0} g_k''$ converge normalement sur $[a,b]$
Ainsi la série $\sum_{k\geqslant 0} g_k''$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$

Par théorème de cours, avec (i), (ii), (iii) et (iv), la fonction $\ln(\Gamma) = \ln\circ\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\ \ \ln(\Gamma)''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}}$$

Par composition $\boxed{\text{la fonction } \Gamma = \exp\circ\ln(\Gamma) \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[}$

14b. En reprenant les notations du 14a et la majoration $\forall x \in [1,+\infty[\ \ \forall k \in \mathbb{N},\ |g_k''(x)| \leqslant \dfrac{1}{(k+1)^2}$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g_k''$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ de somme $\ln(\Gamma)''$

De plus $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_k''(x) = 0$

Alors le théorème de la double limite nous donne l'existence des membres et l'égalité : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(\Gamma)''(x) = 0}$

15a. Soit $x>0$, on a $\mathrm{S}(x+1) = \ln\left(\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right) = \ln\left(x\frac{f(x)}{x\Gamma(x)}\right) = \mathrm{S}(x)$

Ainsi $\boxed{\text{S est est 1-périodique}}$

On a $f'(x+1) = f(x) + xf'(x)$ donc $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{f'(x+1)}{xf(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{f'(x+1)}{f(x+1)} - \dfrac{1}{x}$

Ainsi $\ln(f)'(x) = \ln(f)'(x+1) - \dfrac{1}{x}$ d'où $\ln(f)''(x) = \dfrac{1}{x^2} + \ln(f)''(x+1)$

Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(f)''(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} = \ln(f)''(x+n+1) \geqslant 0$ par convexité de $\ln(f)$

Ainsi on par passage à la limite $\mathrm{S}''(x) = \ln(f)''(x) - \ln(\Gamma)''(x) \geqslant 0$

d'où $\boxed{\text{la fonction S est convexe}}$

15b. Soit $x \in [3,4]$. Comme S est convexe, en utilisant l'inégalité des pentes on a

$$\frac{\mathrm{S}(2)-\mathrm{S}(1)}{2-1} \leqslant \frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(2)}{x-2} \leqslant \frac{\mathrm{S}(4)-\mathrm{S}(2)}{4-2}$$

donc comme S est 1-périodique alors $\mathrm{S}(1) = \mathrm{S}(2) = \mathrm{S}(4)$ puis $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(2)$.
Ainsi S est constante sur $[3,4]$ d'où S est constante sur $]0,+\infty[$
or $\mathrm{S}(1) = \ln(1/1) = 0$ donc $\mathrm{S} = \ln(f/\Gamma)$ est identiquement nulle d'où $\boxed{f = \Gamma}$

16. Soit $a>0$. On a $\Gamma(a) > 0$ selon 12.

Je pose $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\mathrm{d}t,\ f : x \longmapsto \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} g(x)$ et $\mathrm{G}\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} \end{array}\right.$.

(i) Soit $t \in]0,+\infty[$. La fonction $\mathrm{G}(\cdot,t) : x \mapsto \mathrm{G}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$
de dérivées successives $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(\cdot,t) : x \mapsto \ln\left(\dfrac{t}{1+t}\right)\dfrac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$ et $\dfrac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x^2}(\cdot,t) : x \mapsto \ln\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^2 \dfrac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$
En utilisant le fait que pour $\alpha>0$, la fonction $x \mapsto \alpha^x = \exp(\ln(\alpha)x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée : $x \mapsto \ln(\alpha)\alpha^x$.

(ii) Soit $x \in]0,+\infty[$. Les fonctions $\mathrm{G}(x,\cdot)$, $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,\cdot)$ et $\dfrac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x^2}(x,\cdot)$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

On a $\mathrm{G}(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{a+1}}$ et $a+1>1$ donc $\mathrm{G}(x,\cdot)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On a $\mathrm{G}(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x<1$ donc $\mathrm{G}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1]$. Ainsi $\mathrm{G}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On a $\ln\left(\dfrac{t}{1+t}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par composition ainsi $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{a+1}}\right)$ donc $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On a $\ln\left(\dfrac{t}{1+t}\right) = \ln(t) - \ln(t+1) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ donc $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)\dfrac{1}{t^{1-x}} = \ln(t)t^{x/2}\dfrac{1}{t^{1-x/2}}$

ainsi par croissance comparée, $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1-x/2}}\right)$ et $1-x/2<1$ donc $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,1]$

d'où $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,\cdot)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(iii) Soit $\alpha<\beta$ dans $]0,+\infty[$. Je pose : $\varphi\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{t}{1+t}\right)^2 \left(\dfrac{t}{1+t}\right)^{\alpha} \dfrac{1}{t(1+t)^a} \end{array}\right.$.

La fonction φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ en faisant comme en (ii).

De plus comme $\forall t > 0,\ 0 < \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$, on a l'hypothèse de domination (sur tous segments) :

$$\forall t \in]0,+\infty[\,,\ \forall x \in [\alpha,\beta],\ \left|\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème des intégrales à paramètre s'applique
ainsi g est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ puis par produit f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ $(\bullet)$
Soit $x > 0$, on a $\mathrm{G}(x,\cdot)$ continue, positive et non identiquement nulle donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{G}(x,t)\mathrm{d}t$ est à valeurs > 0
Il en est de même pour Γ puis par produit

$$f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[\quad (\bullet\bullet)$$

En utilisant 13, on a :

$$f(1) = \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{1+a}}\mathrm{d}t = a\left[\frac{1}{a(1+t)^a}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = 1 \quad (\bullet\bullet\bullet)$$

Soit $x > 0$. On a $f(x+1) = \dfrac{\Gamma(x+1+a)}{\Gamma(a)} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^{x+1+a}}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{(x+a)t^x}{(1+t)^{x+1+a}}\mathrm{d}t$.
On effectue alors une intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sous réserve de validité. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+a)t^x}{(1+t)^{x+1+a}}\mathrm{d}t = \left[\frac{-t^x}{(1+t)^{x+a}}\right]_{t\to0^+}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-xt^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\mathrm{d}t$$

Le bloc tout intégré étant nul, le calcul est valide. Ainsi

$$f(x+1) = x\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\mathrm{d}t = xf(x) \quad (\bullet\bullet\bullet\bullet)$$

Enfin on a $\ln(f)' = \dfrac{f'}{f}$ et $\ln(f)'' = \dfrac{f''f - (f')^2}{f^2}$.
Pour établir la convexité de $\ln(f)$ il suffit d'établir que $\ln(f)'' \geqslant 0$.
Soit $x > 0$. On a $\ln(f(x)) = \ln(\Gamma(x+a)) - \ln(\Gamma(a)) + \ln(g(x))$
Ainsi $\ln(f)''(x) = \ln(\Gamma)''(x+a) + \ln(g)''(x) = \ln(\Gamma)''(x+a) + \dfrac{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{g(x)^2}$.
Il suffit donc d'établir que : $(g'(x))^2 \leqslant g(x)g''(x)$.
Je pose $\varphi_1 : t \longmapsto \sqrt{\mathrm{G}(x,t)}$ et $\varphi_2 : t \longmapsto \ln\left(\dfrac{t}{1+t}\right)\sqrt{\mathrm{G}(x,t)}$ qui sont continues sur $]0,+\infty[$
Soit $\alpha < \beta$ dans $]0,+\infty[$.
Selon Cauchy-Schwarz, on a : $\left(\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi_1\varphi_2\right)^2 \leqslant \left(\int_\alpha^\beta \varphi_1^2\right)\left(\int_\alpha^\beta \varphi_2^2\right)$ donc

$$\left(\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\mathrm{G}(x,t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)^2 \mathrm{G}(x,t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{G}(x,t)\mathrm{d}t\right)$$

Les intégrandes sont toutes intégrables sur $]0,+\infty[$ ce qui permet de passer aux limites $\alpha \to 0$ et $\beta \to +\infty$.
Ainsi on a bien $(g'(x))^2 \leqslant g(x)g''(x)$
donc $\ln(f)$ est convexe $(\bullet\bullet\bullet\bullet)$
Avec 15, on peut alors conclure que $f = \Gamma$ ce qui donne $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}}$

17. Soit $x \in]0,1[$. En posant $a = 1-x$, on a $a>0$ et comme $\Gamma(1)=1$, on d'après 16 et 12 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \dfrac{1}{x(1-x)}\mathrm{e}^{-\gamma(x+(1-x))}\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{(x+1-x)k^{-1}}}{(1+xk^{-1})\,(1+(1-x)k^{-1})}$ donc

$$\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \gamma\right)(n!)^2 \left(\prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i-x}\right)\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k+x}\right) = \frac{\exp\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \gamma\right)}{(n+1-x)x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}$$

d'où

$$\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \frac{n}{n+1-x} \times \frac{\exp\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln(n) - \gamma\right)}{x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}$$

En passant à la limite à l'aide de 12 et 11c, on obtient par opérations sur les limites : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$

Partie IV

18a. Soit $x \in]0,1[$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0,1[$. Par somme géométrique, on a :

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (-1)^n t^{n+x-1} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (-1)^n t^{n+x-1} + (-1)^{\mathrm{N}} \frac{t^{\mathrm{N}+x-1}}{1+t}$$

Comme on a une somme de $\mathrm{N}+1$ fonctions intégrables sur $]0,1[$, on a

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (-1)^n \int_0^1 t^{n+x-1}\mathrm{d}t + (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}+x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{(-1)^n}{n+x} + (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}+x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{(-1)^n}{n+x}\right| = \int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}+x-1}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{N}+x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{N}+x}$$

Or $\dfrac{1}{\mathrm{N}+x} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ ainsi les gendarmes nous donnent l'existence des membres et l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \qquad (\star)$$

On effectue un changement de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant bijectif : $t = 1/u$; $\mathrm{d}t = -(1/u)^2\mathrm{d}u$. Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_1^0 \frac{-(1/u)^{x-1+2}}{1+1/u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{t^{1-x+1-2}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{(1-x)-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

Comme $1-x \in]0,1[$, on peut lui appliquer $(\star)$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

Avec la relation de Chasles, on a $\boxed{\displaystyle\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}}$

On remarque que la semi-convergence des séries nous annonce que les théorèmes d'interversion série-intégrale ne s'appliquent pas. On aurait pu utiliser le théorème de convergence dominée.

18b. Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a $\cos(\pi x) > 0$. À l'aide de la question précédente appliqué à $1/2 - x \in]0,1[$:

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi/2 - \pi x)} = \frac{\pi}{\sin\left(\pi(1/2 - x)\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1/2 - x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1/2 + x}$$

or pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{2x}{2n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ et donc

$$\frac{(-1)^n}{n + 1/2 - x} = \frac{2(-1)^n}{2n+1} \times \frac{1}{1 - 2x/(2n+1)} = \frac{2(-1)^n}{2n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(2x/(2n+1)\right)^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{p+1}(-1)^n x^p}{(2n+1)^{p+1}}$$

En remarquant que $-x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on a donc $\displaystyle\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{2^{p+1}(-1)^n x^p}{(2n+1)^{p+1}} + \frac{2^{p+1}(-1)^n(-x)^p}{(2n+1)^{p+1}}\right)$

puis pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{p+1}\left((-1)^n x^p + (-x)^p\right)}{(2n+1)^{p+1}} = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{p=0}^{2\mathrm{N}} \frac{2^{p+1}\left((-1)^n x^p + (-x)^p\right)}{(2n+1)^{p+1}} = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{2^{2k+1}\left((-1)^n x^{2k} + (-x)^{2k}\right)}{(2n+1)^{2k+1}}$$

d'où par linéarité

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^2(-1)^n}{(2n+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}$$

On va maintenant montrer la sommabilité de la famille double pour utiliser Fubini.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k+2} x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{8x^2}{(2n+1)^3\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2}\right)} = \frac{8x^2}{(2n+1)^3 - 4x^2(2n+1)}$

De plus la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{8x^2}{(2n+1)^3 - 4x^2(2n+1)}$ converge car $\displaystyle\frac{8x^2}{(2n+1)^3 - 4x^2(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{n^3}$ si $x \neq 0$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{+\infty} \left|\frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}\right|$ converge

et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}\right|$ converge

Ainsi la famille $\displaystyle\left(\frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ donc selon Fubini

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^2(-1)^n}{(2n+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}$$

on peut alors conclure que $\displaystyle\boxed{\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right) 2^{2k+2} x^{2k}}$

Remarque : on n'a pas la sommabilité de la famille indexée sur $\mathbb{N}^2$ car la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^2(-1)^n}{2n+1}$ ne converge pas absolument.

18c. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a $x/\pi \in]-1/2, 1/2[$ donc selon la question précédente :

$$v(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right)2^{2k+2}\frac{x^{2k}}{\pi^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right)\frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}}x^{2k}$$

Ainsi $\boxed{v \text{ est développable en série entière sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors par unicité du développement en série entière : $\dfrac{\mathrm{E}_{2k}}{(2k)!} = \dfrac{v^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right)\frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}}$.

d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}\mathrm{E}_{2k}}$

19a. Les séries entières $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{\mathrm{E}_{2k}x^{2k}}{(2k)!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ ont respectivement pour sommes v et cos de rayons $\geqslant \pi/2$.

Ainsi par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$1 = \cos(x)v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{E}_{2k}x^{2k}}{(2k)!}\times\frac{(-1)^{n-k}x^{2(n-k)}}{(2(n-k))!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2n)!}{(2n-2k)!(2k)!}\mathrm{E}_{2k}\right)x^{2n}$$

Par unicité du développement en série entière, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}\mathrm{E}_{2k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2n)!}{(2n-2k)!(2k)!}\mathrm{E}_{2k} = 0}$

Par définition on a $\boxed{\mathrm{E}_0 = v(0) = 1}$

Puis $0 = (-1)^0\binom{2}{0}\mathrm{E}_0 + (-1)^1\binom{2}{2}\mathrm{E}_2 = 1 - \mathrm{E}_2$ donc $\boxed{\mathrm{E}_2 = 1}$

et $0 = (-1)^0\binom{4}{0}\mathrm{E}_0 + (-1)^1\binom{4}{2}\mathrm{E}_2 + (-1)^2\binom{4}{4}\mathrm{E}_4$

donc $0 = 1 - 6 + \mathrm{E}_4$ donc $\boxed{\mathrm{E}_4 = 5}$

19b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi zêta de paramètre $s = 3$. Alors selon 9(c)

$$\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\times1+1}} = \frac{\pi^{2\times1+1}}{2^{2\times1+2}(2\times1)!}\mathrm{E}_{2\times1} = \frac{\pi^3}{2^5}$$

donc $\boxed{\text{lorsque le paramètre est 3, } \mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \dfrac{\pi^3}{32}}$

Si le paramètre est $s = 5$, alors

$$\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\times2+1}} = \frac{\pi^{2\times2+1}}{2^{2\times2+2}(2\times2)!}\mathrm{E}_{2\times2} = \frac{\pi^5}{2^6\times4!}\times5$$

Si le paramètre est $s = 5$ $\boxed{\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) = \dfrac{5\pi^5}{2^9\times3}}$