# Corrigé du sujet Maths X-ENS (B) MP 2022

**Laurent Chaumard**

## Première partie

**1/** (a) Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, la suite $\left(\dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}\right)_{n \geqslant 1}$ existe, et $\dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n} = \dfrac{2x}{x^2-n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{2x}{n^2}$. Puisque la suite $\left(-\dfrac{2x}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$ est de signe constant et est de plus le terme général d'une série de Riemann convergente (à un facteur multiplicatif près), la série de terme général $\left(\dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}\right)_{n \geqslant 1}$ est convergente, si bien que la série définissant $g(x)$ est convergente.

(b) L'ensemble de définition de ces deux fonctions est bien symétrique par rapport à 0 puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $x$ n'est pas un entier, $-x$ n'en est pas un non plus. Alors

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{-x+n} + \frac{1}{-x-n} \right) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = -g(x).$$

$g$ est donc bien impaire. $f$ l'est clairement aussi puisque cos est paire et sin est impaire. Ainsi, $D$ est finalement impaire en tant que différence de deux fonctions qui le sont.

(c) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

- Puisque $\cos(\pi(x+1)) = \cos(\pi x + \pi) = -\cos(\pi x)$, et $\sin(\pi(x+1)) = \sin(\pi x + \pi) = -\sin(\pi x)$, $f(x+1) = f(x)$, et $f$ est bien $1-$périodique.
- Pour établir la $1-$périodicité de la fonction $g$, revenons aux sommes partielles de la série de somme $g(x+1) - \dfrac{1}{x+1}$, soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left( \frac{1}{(x+1)+n} + \frac{1}{(x+1)-n} \right)$. Soit $N \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{(x+1)+n} + \frac{1}{(x+1)-n} \right) &= \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{x+(n+1)} + \frac{1}{x-(n-1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+N+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-N}. \end{aligned}$$

En faisant maintenant tendre $N$ vers $+\infty$, on obtient

$$g(x+1) - \frac{1}{x+1} = \left[ g(x) - \frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}, \text{ soit } g(x+1) = g(x).$$

A nouveau, l'ensemble des fonctions $1-$périodiques étant un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $D$ est aussi $1-$périodique.

(d) Du fait de la périodicité, il suffit ici de prouver la continuité de ces deux fonctions sur l'ensemble $]0,1[$, pour conclure à la continuité sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. De plus, la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $]0,1[$ nous permet de nous contenter de prouver la continuité de $f$ et de $g$.

- Elle est évidente pour $f$ car cos et sin sont continues sur $]0,\pi[$ et sin ne s'y annule pas.
- Montrons celle de $g$. Notons déjà que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}$ est continue sur $]0,1[$. De plus, si on se donne un segment $[a,b]$ inclus dans $]0,1[$, pour tout $(x,n) \in [a,b] \times \mathbf{N}^*$, nous pouvons écrire

$$\left| \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right| = \frac{2x}{\left| x^2 - n^2 \right|} = \frac{2x}{n^2 - x^2} \leqslant \frac{2}{n^2 - b^2}, \text{ donc } \left\| f_n \right\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{2}{n^2 - b^2}.$$

Comme $\frac{2}{n^2-b^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, et que cette suite est positive et le terme général d'une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente, si bien que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0,1[$. Le théorème de continuité sous le signe $\sum$ nous permet alors d'affirmer que $x \mapsto g(x) - \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1[$, et donc $g$ aussi.

**2/** (a) Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. Notons déjà que ni $x/2$ ni $(x+1)/2$ ne sont des entiers. Alors

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi\frac{\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)\sin\left(\pi\frac{x+1}{2}\right)+\cos\left(\pi\frac{x+1}{2}\right)\sin\left(\pi\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{x}{2}\right)\sin\left(\pi\frac{x+1}{2}\right)} \\ &= \pi\frac{\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{x}{2}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{2}\right)} \text{ car } \begin{cases} \cos a\sin b+\cos b\sin a = \sin(a+b) \\ \sin(a+\pi/2)=\cos \end{cases} \\ &= 2\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2f(x) \text{ car } 2\sin a\cos a = \sin(2a). \end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. A nouveau, notons pour tout $N\geqslant 1$, $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)$. Alors,

$$\begin{aligned} S_N\left(\tfrac{x}{2}\right)+S_N\left(\tfrac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\frac{x}{2}+n}+\frac{1}{\frac{x}{2}-n}\right)+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\frac{x+1}{2}+n}+\frac{1}{\frac{x+1}{2}-n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{x+2n}+\frac{2}{x-2n}\right)+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{x+2n+1}+\frac{2}{x-2n+1}\right). \end{aligned}$$

Cette somme est égale $2\sum_{n\in I}(x+n)^{-1}$, où $I$ est l'ensemble des entiers $[\![-2N,-1]\!]\cup[\![2,2N+1]\!]$. Ainsi,

$$S_N\left(\tfrac{x}{2}\right)+S_N\left(\tfrac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{2N}\left(\frac{2}{x+n}+\frac{2}{x-n}\right)-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{2N+1}.$$

En faisant tendre $N$ vers $+\infty$, nous obtenons ainsi

$$\left[g\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{x}\right]+\left[g\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{2}{x+1}\right] = 2\left[g(x)-\frac{1}{x}\right]-\frac{2}{x+1}+0,$$

soit exactement l'égalité attendue.

**3/** (a)
- Effectuons un développement limité de $f$ au voisinage de 0. Il est notoire que tan est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un voisinage de 0, qu'elle est impaire et vérifie de plus $\tan 0 = 0, \tan'(0) = 0$. D'après la formule de Taylor-Young, $\tan t = t + o\left(t^2\right)$ quand $t \to 0$. Alors, quand $x \to 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{\pi x + o\left(x^2\right)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+o(x)} = \frac{1}{x}[1-o(x)] = \frac{1}{x}+o(1).$$

- Reprenons les arguments de la question 1d. Pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction $f_n$ est continue sur $J = [-0,5,0,5]$ et pour tout $x\in J$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n^2-0,5^2}$, si bien que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $J$. Ainsi sa somme $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue en 0. Comme elle est de plus nulle en 0, on en déduit que $g(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = o(1)$ quand $x \to 0$

Finalement, $D(x) = f(x) - g(x) = \left[\frac{1}{x} + o(1)\right] - \left[\frac{1}{x} + o(1)\right] = o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et $D$ se prolonge bien en une fonction continue en 0.
Par périodicité de $D$, en posant $\tilde{D}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$\lim_{x\to n} \tilde{D}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \tilde{D}(n+\epsilon)) = \lim_{\epsilon\to 0} \tilde{D}(\epsilon) = \lim_{x\to 0} \tilde{D}(x) = 0 = \tilde{D}(0),$$

si bien que $\tilde{D}$ est continue en tout point de $\mathbf{Z}$. Comme elle est de plus continue sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, elle est bien continue sur $\mathbf{R}$.

(b) $\tilde{D}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle y admet un maximum, ce qui était demandé.
Montrons l'égalité demandée par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, sachant que nous venons de faire l'initialisation.
Supposons donc qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$. Il est clair que $\tilde{D}$ vérifie la même équation fonctionnelle que celle vérifiée par $f$ et $g$ et qui apparaît dans la question 2. En posant $x = \frac{\alpha}{2^n}$, nous obtenons l'égalité

$$\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) + \tilde{D}\left(\frac{2^n+\alpha}{2^{n+1}}\right) = 2\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right), \text{ soit } \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \tilde{D}\left(\frac{2^n+\alpha}{2^{n+1}}\right) - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Or comme $\tilde{D}$ atteint en $\frac{\alpha}{2^n}$ son maximum sur $\mathbf{R}$ d'après l'hypothèse de récurrence (par 1−périodicité à nouveau), le premier terme de cette égalité est positif, et le second est négatif. Ils sont donc tous les deux nuls et ainsi $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$.

**4/** En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, et en utilisant la continuité de $\tilde{D}$ en 0, nous obtenons $M = \tilde{D}(0) = 0$. Mais comme $M$ est le maximum de $\tilde{D}$, ceci signifie que pour tout $x \in \mathbf{R}, \tilde{D}(x) \leqslant 0$. Or $\tilde{D}$ étant impaire d'après la question 1b, $\tilde{D}(x) = -\tilde{D}(-x) \geqslant 0$ également, si bien que $\tilde{D}$ est la fonction nulle.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}, f(x) = g(x)$, soit

$$\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) \quad = \quad x f(x) = x g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{x+n} + \frac{x}{x-n}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-n^2}.$$

**5/** (a) Soit $x$ non nul dans $]-2\pi, 2\pi[$. Alors $t = x/2\pi \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, et d'après la question 4,

$$\pi t \operatorname{cotan}(\pi t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^2}{t^2-n^2}, \text{ soit } \frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 - n^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\frac{x}{2\pi n}\right| < 1$, $\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}$, et donc $\frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}$.
Puisque la famille $\left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est positive, le théorème de Fubini discret permet de déduire de cette égalité d'une part qu'elle est sommable, d'autre part que sa somme est égale à $2\left(-\frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)$, ainsi que cette autre expression de sa somme :

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2k} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}.$$

(b) Pour les mêmes valeurs de $x$,

$$\begin{aligned}
\frac{ix}{e^{ix}-1}-1+\frac{ix}{2} &= \frac{ix}{2}\left[\frac{2}{e^{ix}-1}+1\right]-1=\frac{ix}{2}\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1}-1\\
&= \frac{ix}{2}\frac{e^{ix/2}+e^{-ix/2}}{e^{ix/2}-e^{ix/2}}-1=\frac{ix}{2}\frac{2\cos(x/2)}{2i\sin(x/2)}-1\\
&= \frac{x}{2}\text{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)-1 \text{ d'après les formules d'Euler,}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k} \text{ d'après 5a.}
\end{aligned}$$

**6/** ► Notons $\varphi : z\in\mathbf{C}\mapsto 1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}z^{2k}$. Nous venons de montrer que pour tout réel $x\in]0,2\pi[$, la série définissant $h(ix)$ était convergente. Comme c'est une série entière, son rayon de convergence est par conséquent au moins égal à $2\pi$, si bien que $h$ est définie sur le disque $D$ ouvert de centre 0 et de rayon $2\pi$.

► La fonction $H : z\in D\mapsto (e^z-1)\varphi(z)-z$ est alors aussi la somme d'une série entière sur $D$, car $z\mapsto H(z)+z$ est le produit de deux sommes de séries entières de rayon supérieur ou égal à $2\pi$.

► Enfin, la question 5b prouve de plus que pour tout $x\in[0,2\pi[$, $H(ix)=0$, égalité qui implique la nullité de tous les coefficients de la série entière définissant $H$, et donc la nullité de $H$ sur $D$. En effet, dans le cas contraire, en notant $H(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$, il existerait $p\in\mathbf{N}$ tel que $a_p\neq 0$ et $a_k=0, \forall k\in[\![0,p-1]\!]$, et alors

$$H(ix)=a_p(ix)^p\left[1+\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{a_n}{a_p}(ix)^{n-p}\right]\underset{x\to 0^+}{\sim}a_p(ix)^p,$$

et $H$ serait non nulle sur un voisinage de 0.

**7/** (a) $h$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-2\pi,2\pi[$ en tant que somme d'une série entière d'après la question 6, et en-dehors de cet intervalle en tant que rapport de deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, d'après la formule de Taylor pour les séries entières, on sait que $\frac{h^{(2n)}(0)}{(2n)!}$ est le coefficient d'indice $2n$ de cette série entière, pour tout $n\in\mathbf{N}$.

(b) D'après la question 6, pour tout $z\in D, z=\left(e^z-1\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n\right)$. Puisque ces deux séries entières ont un rayon de convergence plus grand que $2\pi$, d'après le théorème sur les produits de Cauchy, $z=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!(n-k)!}\right)z^n$. Enfin, de l'unicité du développement en série entière, on déduit que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!(n-k)!}=\begin{cases}1 & \text{si } n=1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

(c) En posant $n=23$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\frac{1}{3!}+\frac{-1/2}{2}+\frac{b_2}{2}=0, \text{ soit } b_2=\frac{1}{6}.$$

En faisant de même avec $n=4$ puis $n=6$, on obtient $b_4=-\frac{1}{30}$ et $b_6=\frac{1}{42}$.

On en déduit, toujours avec la question 7b, que $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}, \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$.

## DEUXIÈME PARTIE

**8/** (a) Une mesure sur l'espace probabilisable $\big(E,\mathscr{P}(E)\big)$ est une fonction de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$, donc une fonction bornée de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathbf{R}$.

(b) C'est du cours : la norme infinie sur l'espace des fonctions bornées d'un ensemble $X$ dans $\mathbf{R}$ est une norme.

**9/** C'est classique : toute suite de fonctions convergeant uniformément sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ converge simplement sur $\mathscr{P}(E)$ vers sa limite uniforme. Or pour tout $x \in E, \{x\} \in \mathscr{P}(E)$.

**10/** (a) Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de la limite monotone probabiliste, $\mu\big(\{x_1,\dots,x_p\}\big) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mu(E) = 1$, donc il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\mu\big(\{x_1,\dots,x_p\}\big) \geqslant 1-\epsilon$. Posons $F_\epsilon = \{x_1,\dots,x_p\}$.
D'après l'hypothèse (1), pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, il existe $N_k \in \mathbf{N}$ tel que

$$\text{pour tout entier } n \geqslant N_k, \big|\mu_n(x_k) - \mu(x_k)\big| < \frac{\epsilon}{p}.$$

Il suffit de poser $N_\epsilon = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} N_k$ pour obtenir que pour tout entier $n \geqslant N_\epsilon$,

$$\sum_{x\in F_\epsilon} \big|\mu_n(x) - \mu(x)\big| < \sum_{x\in F_\epsilon} \frac{\epsilon}{p} = \epsilon.$$

(b) En notant $F^c$ le complémentaire de $F$,

$$\begin{aligned}
\big|\mu_n(A) - \mu(A)\big| &= \big|\mu_n(A\cap F_\epsilon) - \mu(A\cap F_\epsilon) + \mu_n(A\cap F_\epsilon^c) - \mu(A\cap F_\epsilon^c)\big| \\
&\leqslant \big|\mu_n(A\cap F_\epsilon) - \mu(A\cap F_\epsilon)\big| + \mu_n(A\cap F_\epsilon^c) + \mu(A\cap F_\epsilon^c) \text{ par inégalité triangulaire,} \\
&\leqslant \big|\mu_n(A\cap F_\epsilon) - \mu(A\cap F_\epsilon)\big| + \mu_n(F_\epsilon^c) + \mu(F_\epsilon^c) \text{ par croissance des mesures,}
\end{aligned}$$

ce qui constitue la première inégalité demandée. Majorons chacun de ces trois termes.

- Le premier terme se majore ainsi :
$$\big|\mu_n(A\cap F_\epsilon) - \mu(A\cap F_\epsilon)\big| = \left|\sum_{x\in A\cap F_\epsilon} \big(\mu_n(x) - \mu(x)\big)\right| \leqslant \sum_{x\in A\cap F_\epsilon} \big|\mu_n(x) - \mu(x)\big| \leqslant \sum_{x\in F_\epsilon} \big|\mu_n(x) - \mu(x)\big| < \epsilon.$$
- Le troisième ainsi : $\mu(F_\epsilon^c) = 1 - \mu(F_\epsilon) < \epsilon$.
- Enfin, le deuxième :

$$\begin{aligned}
\mu_n(F_\epsilon^c) &= 1 - \mu_n(F_\epsilon) = \big[1 - \mu(F_\epsilon)\big] + \mu(F_\epsilon) - \mu_n(F_\epsilon) = \big[\mu(F_\epsilon^c)\big] + \mu(F_\epsilon) - \mu_n(F_\epsilon) \\
&\leqslant \big[\mu(F_\epsilon^c)\big] + \big|\mu(F_\epsilon) - \mu_n(F_\epsilon)\big| \leqslant \epsilon + \left|\sum_{x\in F_\epsilon} \big(\mu_n(x) - \mu(x)\big)\right| \\
&\leqslant \epsilon + \sum_{x\in F_\epsilon} \big|\mu_n(x) - \mu(x)\big| \leqslant 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Leur somme est donc bien majorée par $4\epsilon$.

(c) On montré le sens direct dans la question 9. Dans la question 10, nous avons montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existait $N_\epsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$ et tout entier $n \geqslant N_\epsilon, \big|\mu_n(A) - \mu(A)\big| \leqslant 4\epsilon$, soit que pour tout $\epsilon > 0$,, il existait $N_\epsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout tout entier $n \geqslant N_\epsilon, 1 \big\|\mu_n - \mu\big\| \leqslant 4\epsilon$. C'est bien la définition de la convergence de la suite $\big(\mu_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\mu$ pour la norme $\|.\|$.

**11/** Non, cette suite ne converge pas. En effet, dans le cas contraire, il existerait une mesure $\mu$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\delta_k(\{x_n\}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mu(x_n).$$

Ceci impliquerait la nullité de $\mu(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ puisque la suite $(\delta_k(\{x_n\}))_{k\geqslant 1}$ stationne à 0. Donc $\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(x_n)$ serait nul, ce qui est impossible.

**12/** (a) Construisons cette suite par récurrence sur $k$.

- La suite $\left(\mu_n(x_1)\right)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans le compact $[0,1]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_1 : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que $\left(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
- Supposons qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que pour tout entier $i \in [\![1,k]\!]$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n\geqslant 1}$ converge. La suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(x_{k+1})\right)_{n\geqslant 1}$ étant à valeurs dans le compact $[0,1]$, toujours d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_{k+1} : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}(n)}(x_{k+1})\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
  De plus, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}(n)}(x_i)\right)_{n\geqslant 1}$ converge également en tant que suite extraite de la suite convergente $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n\geqslant 1}$.
  On a bien prouvé que pour tout entier $i \in [\![1,k+1]\!]$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}(n)}(x_i)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

(b) Soit $k \geqslant i$. Notons pour y voir plus clair $(\alpha_i(n))_{n\geqslant 1}$ la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_i(n)}(x_i)\right)_{n\geqslant 1}$. Notons que cette suite est convergente d'après la question précédente. Notons $\mu_\infty(x_i)$ sa limite. Alors

$$\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n\geqslant 1} = \left(\alpha_i(\varphi(n))\right)_{n\geqslant 1} \text{ où } \varphi = \varphi_{i+1}\circ\varphi_{i+2}\circ\cdots\circ\varphi_k.$$

$\varphi$, en tant que composée d'extractrices, est également une extractrice, si bien que la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de la suite convergente $(\alpha_i(n))_{n\geqslant 1}$. Nous savons alors que

$$\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(x_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty(x_i).$$

(c)
- Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Comme $k \leqslant \varphi_{k+1}(k)$ et qu'une composée d'extractrices -donc de fonctions croissantes- est croissante,

  $$\psi(k) = \varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k(k) \leqslant \varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k\left[\varphi_{k+1}(k)\right] = \varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}(k).$$

  Enfin, la fonction $\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}$ étant strictement croissante,

  $$\psi(k) < \varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_k\circ\varphi_{k+1}(k+1) = \psi(k+1),$$

  i.e $\psi$ est strictement croissante.
- Soit $i \in \mathbf{N}^*$ et $\epsilon > 0$. Par définition de $\lim_{k\to+\infty} \mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_i(k)}(x_i) = \mu_\infty(x_i)$, il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $k \geqslant N$, $\left|\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_i(k)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)\right| \leqslant \epsilon$. Soit alors $k \geqslant \max\{N, i+1\}$. Puisque $\varphi_{i+1}\circ\varphi_{i+2}\circ\cdots\circ\varphi_k$ est une extractrice, $\tilde{k} := \varphi_{i+1}\circ\varphi_{i+2}\circ\cdots\circ\varphi_k(k) \geqslant k \geqslant N$, et donc

  $$\left|\mu_{\psi(k)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)\right| = \left|\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_i(\tilde{k})}(x_i) - \mu_\infty(x_i)\right| \leqslant \epsilon$$

Ceci prouve bien que la suite $\left(\mu_{\psi(k)}(x_i)\right)_{k\geqslant 1}$ converge vers $\mu_\infty(x_i)$.

(d) En tant que limite d'une suite positive, $\mu_\infty(x_i)$ est positif. De plus, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{i=1}^{N} \mu_n(x_i) \leqslant \mu_n(E) = 1$. En passant à la limite sur $n$, on obtient $\sum_{i=1}^{N} \mu_\infty(x_i) \leqslant 1$. Ainsi, la série de terme général positif $\left(\mu_\infty(x_i)\right)_{i\geqslant 1}$ a une suite de sommes partielles bornées par 1. Ceci implique sa convergence et le fait que sa somme est majorée par 1.

(e) Puisque $F_\epsilon$ est une partie finie de $E$, $\mu_\infty(F_\epsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(F_\epsilon)$, et donc $\mu_\infty(F_\epsilon) \geqslant 1-\epsilon$. Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_\infty(x_i) \geqslant \sum\limits_{x\in F_\epsilon} \mu_\infty(x) \geqslant 1-\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre $\epsilon$ vers $0^+$ et en tenant compte de la question 12d, on obtient $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_\infty(x_i) = 1$. Avec le fait que $\mu_\infty(x_i) \geqslant 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a toutes les propriétés qui garantissent que $\mu_\infty$ appartient à $\mathscr{M}(E)$.

Comme $\mu_{\psi(k)}(x_i) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mu_\infty(x_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ d'après la question 12c, la question 10c nous garantit que la suite $\left(\mu_{\psi(k)}\right)_{k\geqslant 1}$ converge vers $\mu_\infty$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbf{R})$.

Or, $\psi$ est une extractrice (toujours d'après la question 12c), donc $\mu_\infty$ est une valeur d'adhérence de la suite $\left(\mu_k\right)_{k\geqslant 1}$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbf{R})$.

## TROISIÈME PARTIE

**13/** C'est du cours.

**14/** ► On sait que $\mu_X(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1_{X\in A}})$. Ainsi, d'après la linéarité de l'espérance et l'inégalité triangulaire,

$$\left|\mu_X(A) - \mu_Y(A)\right| = |\mathbf{E}(\mathbf{1_{X\in A}}) - \mathbf{E}(\mathbf{1_{Y\in A}})| = |\mathbf{E}(\mathbf{1_{X\in A}} - \mathbf{1_{Y\in A}})| \leqslant \mathbf{E}\,|\mathbf{1_{X\in A}} - \mathbf{1_{Y\in A}}|\,.$$

► Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X(\omega) \neq Y(\omega)$, $\mathbf{1}_{X\neq Y}(\omega) = 1$ est supérieur ou égal à $|\mathbf{1_{X\in A}}(\omega) - \mathbf{1_{Y\in A}}(\omega)|$ puisque cette dernière quantité appartient à $[0,1]$ en tant que distance entre deux réels appartenant à $[0,1]$.
- Si $X(\omega) = Y(\omega)$, $\mathbf{1}_{X\neq Y}(\omega) = 0$ et $|\mathbf{1_{X\in A}}(\omega) - \mathbf{1_{Y\in A}}(\omega)|$ est aussi nul (car $X(\omega) \in A$ si et seulement si $Y(\omega) \in A$).

On a donc démontré que $\mathbf{1}_{X\neq Y} \geqslant |\mathbf{1_{X\in A}} - \mathbf{1_{Y\in A}}|$. Par croisasnce de l'espérance, on obtient donc

$$\mathbf{P}(X \neq Y) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{X\neq Y}\right) \geqslant \mathbf{E}\left(|\mathbf{1_{X\in A}} - \mathbf{1_{Y\in A}}|\right) \geqslant \left|\mu_X(A) - \mu_Y(A)\right|,$$

et ce pour toute $A \in \mathscr{P}(E)$. En prenant la borne supérieure de ces inégalités sur toutes les valeurs de $A$, on obtient bien $\left\|\mu_X - \mu_Y\right\| \leqslant \mathbf{P}(X \neq Y)$.

**15/** (a) La seule justification à donner est l'existence du maximum. Or on se trouve dans le cas où il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $X_{n_0}(\omega) \neq X(\omega)$, si bien que $\{n \in \mathbf{N} \mid X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$. De plus, l'hypothsèe sur la suite de variables aléatoires implique que cet ensemble est majoré, et toute partie majorée non vide de $\mathbf{N}$ admet un maximum.

(b) Si $X_n(\omega) \neq X(\omega)$, par définition de $L, L(\omega) \geqslant n$, donc $\{X_n \neq X\} \subset \{L \geqslant n\}$ et on conclut grâce à la croissance de la probabilité $\mathbf{P}$.

(c) Les questions 14 et 15b nous permettent d'écrire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left\|\mu_{X_n} - \mu_X\right\| \leqslant \mathbf{P}(L \geqslant n)$, et il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(L \geqslant n) = 0$. Or, la suite d'événements $(\{L \geqslant n\})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante si bien que d'après le théorème de limite monotone probabiliste,

$$\mathbf{P}(L \geqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (L \geqslant n)\right) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0,$$

car $L$ étant à valeurs dans $\mathbf{N}$, elle ne prend aucune valeur supérieure à tous les entiers naturels.

**16/** ► Soit $y \in \mathbf{N}^*$, et $k \in \mathbf{N}^* = \max\limits_{j\geqslant 1}\{p_j$ divise $y\}$ l'indice du plus grand nombre premier qui divise $y$. Alors, puisque $v_{p_i}(y) = 0$ pour tout $i \in [\![k+1, +\infty[\![$, on a pour tout $n \geqslant k, \psi_n(y) = \psi_k(y)$.

► En fixant maintenant $\omega \in \Omega$ et en posant $y = X(\omega)$, on voit donc que la suite $\left(\psi_n(X(\omega))\right)_{n\geqslant 1}$ stationne et converge vers $X(\omega)$. D'après le résultat de la question 15c, on obtient alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\mu_{X_n} - \mu_X\right\| = 0$ où $X_n = \psi_n \circ X$. La question 10c permet alors de conclure que

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{N}^*, \qquad \mathbf{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X = x).$$

## Quatrième partie

**17/** (a) Procédons par double inclusion. Pour cela notons

$$A=\bigcup_{i=1}^{n+1}\mathbf{N}^* r p_i \text{ et } B=\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)\cup\left(\mathbf{N}^* r p_{n+1}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i\right).$$

- $\boxed{\subset}$ Soit $x\in A$. S'il appartient à $\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i$, il appartient évidemment à $B$. Sinon, il est divisible par $r p_{n+1}$ sans l'être par aucun des $r p_{n+1} p_i$ pour $i\in[\![1,n]\!]$ (sans quoi il serait divisible par un $r p_i$). Donc $x$ appartient aussi à $B$ dans ce cas.
- $\boxed{\supset}$ Ce sens est trivial.

(b) Montrons donc par récurrence sur $n\in\mathbf{N}^*$ le prédicat

$$\mathscr{P}(n):\left(\forall r\in\mathbf{N}^*,\quad \mu_1\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)=\mu_2\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)\right)$$

- Pour $n=1$, $\mu_1\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)=\mu_1\left(\mathbf{N}^* r\setminus\mathbf{N}^* 2r\right)=\mu_1\left(\mathbf{N}^* r\right)-\mu_1\left(\mathbf{N}^* 2r\right)$ car $\mathbf{N}^* 2r\subset\mathbf{N}^* r$. Mais notre hypothèse sur $\mu_1$ et $\mu_2$ donne alors $\mu_1\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)=\mu_2\left(\mathbf{N}^* r\right)-\mu_2\left(\mathbf{N}^* 2r\right)$, quantité dont on montre avec les mêmes arguments qu'elle est égale à $\mu_2\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)$.
- Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Supposons que $\mu_1\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)=\mu_2\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)$. Commençons par noter que les deux événements $\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)$ et $\left(\mathbf{N}^* r p_{n+1}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i\right)$ sont disjoints. En effet, si un entier est divisible par un $r p_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ et qu'il est divisible par $r p_{n+1}$, alors du fait du lemme de Gauss et de l'égalité $p_i\wedge p_{n=1}=1$, il est divisible par $r p_{n+1} p_i$. Cette remarque justifie la deuxième égalité :

$$\begin{aligned}
\mu_1\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n+1}\mathbf{N}^* r p_i\right) &= \mu_1\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)\cup\left(\mathbf{N}^* r p_{n+1}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i\right)\right] \text{ par 17a,}\\
&= \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)+\mu_1\left(\mathbf{N}^* r p_{n+1}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i\right)\\
&= \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)+\mu_1\left(\mathbf{N}^* r p_{n+1}\right)-\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i\right),
\end{aligned}$$

car $\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i\subset\mathbf{N}^* r p_{n+1}$. On montre évidemment de même que

$$\mu_2\left(\mathbf{N}^* r\setminus\bigcup_{i=1}^{n+1}\mathbf{N}^* r p_i\right)=\mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_i\right)+\mu_1\left(\mathbf{N}^* r p_{n+1}\right)-\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i\right)$$

et on conclut sans difficulté avec l'hypothèse de récurrence.

(c) Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Puisque la suite d'événements $\left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{N}^* r p_i\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\mu_1\left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{N}^* r p_i\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_1\left[\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{N}^* r p_i\right)\right] = \mu_1(r).$$

La dernière égalité provient du fait que si $x \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{N}^* r p_i\right)$, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $x = kr$. Mais comme $x$ n'appartient à aucun $\mathbf{N}^* r p_i$ pour $i \in \mathbf{N}^*$, $k$ n'est divisible par aucun nombre premier. Or, seul $k = 1$ vérifie cette propriété.

En faisant le même sort à $\mu_2$, on obtient $\mu_1(r) = \mu_2(r)$ pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, soit $\mu_1 = \mu_2$.

**18/** Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite $\left(\mu_{X_n}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers $\mu_X$ dans $\mathscr{B}\left(\mathscr{P}(\mathbf{N}^*), \mathbf{R}\right)$. Alors,

- il existe un réel $\epsilon > 0$ et une extractrice $\varphi$ tels que $\left\|\mu_{X_{\varphi(n)}} - \mu_X\right\| \geqslant \epsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Nous noterons $Y_n := X_{\varphi(n)}$. Evidemment, la suite $\left(\mu_{Y_n}\right)_{n\geqslant 1}$ est tendue et pour tout $r \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}(r \mid Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(r \mid X)$.
- D'après la question 12e, il existe une extractrice $\psi$ et une mesure $\mu_\infty$ telles que $\left\|\mu_{Y_{\psi(n)}} - \mu_\infty\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier, par définition de cette norme, pour tout $r \in \mathbf{N}^*, \mu_{Y_{\psi(n)}}\left(\mathbf{N}^* r\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty\left(\mathbf{N}^* r\right)$.
- $\mu_{Y_{\psi(n)}}\left(\mathbf{N}^* r\right) = \mathbf{P}\left(Y_{\psi(n)} \in r\mathbf{N}^*\right) = \mathbf{P}\left(r \mid Y_{\psi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(r \mid X) = \mu_X(\mathbf{N}^* r)$.
- Des deux précédents items, on déduit que pour tout $r \in \mathbf{N}^*, \mu_X(\mathbf{N}^* r) = \mu_\infty\left(\mathbf{N}^* r\right)$, ce qui conduit à l'égalité des deux mesures $\mu_X$ et $\mu_\infty$ d'après la question 17.
- Ainsi, nous avons à la fois $\left\|\mu_{Y_{\psi(n)}} - \mu_X\right\| \geqslant \epsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $\left\|\mu_{Y_{\psi(n)}} - \mu_X\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire notre absurdité.

**19/**
- Par définition de la loi uniforme, $\mathbf{P}(r \mid X_n^{(i)}) = \dfrac{1}{n}\mathrm{Card}\left\{r\mathbf{N}^* \cap [\![1, n]\!]\right\} = \dfrac{\lfloor n/r \rfloor}{n}$, qui est bien inférieur à $n^{-1}$ car pour tout réel $x$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x$.
- puisque $r$ divise $Z_n^{(s)}$ si et seulement si $r$ divise tous les $X_n^{(i)}$,

$$\mathbf{P}\left(r \mid Z_n^{(s)}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{s}\left(r \mid X_n^{(i)}\right)\right) = \prod_{i=1}^{s}\mathbf{P}\left(r \mid X_n^{(i)}\right) = \left[\frac{\lfloor n/r \rfloor}{n}\right]^s \xrightarrow[n\to+\infty]{} r^{-s}.$$

**20/** (a) $\mathbf{P}(k \mid Z) = \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}(Z = ik) = \sum_{i=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\zeta(s) i^s k^s} = k^{-s}$.

(b) Puisque nous venons de montrer que la suite $(Z_n^{(s)})_{n\geqslant 1}$ vérifiait pour tout $r \in \mathbf{N}^*, \mu_{Z_n^{(s)}}(r\mathbf{N}^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_s(r\mathbf{N}^*)$, il suffit d'après la question 18 de prouver que la suite $\left(\mu_{Z_n^{(s)}}\right)_{n\geqslant 1}$ est tendue.

Pour cela fixons $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sum_{r=N}^{+\infty}\dfrac{1}{r^s} \leqslant \epsilon$. Si $Z_n$ est supérieur ou égal à $N$, il existe un entier $r \geqslant N$ qui divise tous les $X_n^{(i)}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_n \geqslant N) &\leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{r\geqslant N}\left[\bigcap_{i=1}^{s}(r \mid X_n^{(i)})\right]\right) \leqslant \sum_{r=N}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\left[\bigcap_{i=1}^{s}(r \mid X_n^{(i)})\right]\right) \\
&\leqslant \sum_{r=N}^{+\infty}\prod_{i=1}^{s}\mathbf{P}\left(r \mid X_n^{(i)}\right) \leqslant \sum_{r=N}^{+\infty}\frac{1}{r^s} \leqslant \epsilon,
\end{aligned}$$

l'avant-dernière inégalité provenant de la question 19. Ainsi, en posant $F_\epsilon = [\![1, N-1]\!]$, on a bien $\mathbf{P}\left(Z_n^{(s)} \in F_\epsilon\right) \geqslant 1 - \epsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

**21/** $P_n(s)$ est égal à $\mathbf{P}(Z_n^{(s)}=1)$. Comme $\left(\mu_{Z_n^{(s)}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\mu_s$ d'après la question 20b, d'après la question 9, $\mathbf{P}_n(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_s(1)$ qui est bien égal à $\zeta(s)^{-1}$ d'après la question 20a. Finalement, d'après la question 7c,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(2) = \frac{6}{\pi^2} \simeq 0,607, \lim_{n\to+\infty} P_n(4) = \frac{90}{\pi^4} \simeq 0,924, \lim_{n\to+\infty} P_n(6) = \frac{945}{\pi^6} \simeq 0,983.$$

FIN