ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

Direction du Concours d'Admission

**Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique 2019**

**Filière PC**

**Mathématiques**

---

Nous présentons une sélection d'exercices de mathématiques posés aux candidats de la filière PC lors du concours d'admission 2019. Pour chaque exercice, nous donnons des éléments d'une correction possible, les examinateurs étant évidemment ouverts à toutes les propositions des candidats dans le cadre du programme.

Certains exercices sont plus délicats et peuvent nécessiter des indications, qui seront apportées par les examinateurs au fil de l'interrogation (selon les besoins et les réactions des candidats), sans que ce soit a priori pénalisant.

---

**Exercice 1**

**Enoncé**

Soit $f$ une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $t$ un nombre réel. Montrer qu'il existe $x$ réel tel que

$$f(x+t) = f(x).$$

**Eléments de correction**

Soit $T > 0$ une période de $f$. L'image de $f$ est $f([0, T])$, donc f est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes. Soient $M$ et $m$ respectivement le maximum et le minimum de $f$, $u$ et $v$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$f(u) = m \ , \ f(v) = M.$$

La fonction

$$g(x) = f(x + t) - f(x)$$

est continue, prend une valeur positive ou nulle en $v$, négative ou nulle en $u$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit que $g$ s'annule, ce qui donne le résultat.

---

**Exercice 2**

**Enoncé**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que si les coefficients de $A$ valent 0 ou 2, alors $\det(A)$ est divisible par $2^n$.

2) Montrer que si les coefficients de $A$ valent 1 ou $-1$, alors $\det(A)$ est divisible par $2^{n-1}$.

3) Donner un exemple dans (2) où le déterminant vaut exactement $2^{n-1}$.

**Eléments de correction**

La formule de définition du déterminant avec les permutations n'est pas au programme, on ne l'utilise donc pas.

1) Récurrence sur $n$ en faisant un développement par rapport à une ligne ou une colonne.

2) Quitte à multiplier certaines lignes par $-1$, on peut supposer que la première colonne de la matrice est constante égale à 1. On l'ajoute aux autres colonnes et on obtient une matrice

dont tous les coefficients valent 0 ou 2, sauf pour la première colonne. On conclut avec un développement par rapport à la première ligne.

3) On peut s'inspirer de la méthode de la preuve de (2), avec la matrice de première colonne constante égale à 1, les autres coefficients diagonaux égaux à 2 et les autres coefficients nuls. On peut donc choisir la matrice dont tous les coefficients valent $-1$, sauf les coefficients de la diagonale et les coefficients de la première colonne qui valent 1.

---

**Exercice 3**

Soit $n \geq 3$. Discuter l'existence et l'unicité dans le plan d'un polygone à $n$ côtés dont les milieux des côtés sont fixés.

**Eléments de correction**

Soient $m_1, .., m_n$ les affixes des $n$ milieux qui sont des données du problème. Soit $z_0, ..., z_n$ les affixes du polygone recherché (par convention, on a $z_n = z_0$). On a pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$m_i = \frac{z_i + z_{i-1}}{2}.$$

En sommant les relations pour $i$ impair et en retranchant les relations pour $i$ pair on obtient

$$(1 + (-1)^{n-1})z_0 = 2(m_1 - m_2 + ... + (-1)^{n-1}m_n).$$

Si $n$ est impair alors $z_0$ est bien défini et on en déduit les $n-1$ autres points : la solution est unique.

Si $n$ est pair alors le système a des solutions si et seulement si

$$m_1 - m_2 + .. + m_{n-1} - m_n = 0.$$

On choisit alors $z_0$ quelconque et tous les autres $z_i$ s'en déduisent.

---

**Exercice 4**

**Enoncé**

Déterminer les fonctions continues

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

telles que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

**Eléments de correction**

Soit $0 \leq \alpha < 1$. La fonction continue $f$ est bornée et atteint ses bornes sur le segment $[0, \alpha]$. On obtient donc $x, y \in [0, \alpha]$ tels que

$$f(x) = \mathrm{Max}_{[0,\alpha]}(f) = M$$

et

$$f(y) = \mathrm{Min}_{[0,\alpha]}(f) = m.$$

La relation évaluée en $x$ implique que

$$f(x^n) = M \text{ pour tous } n \geq 0 \text{ entier.}$$

Donc $f(0) = M$. De même $f(0) = m$. Donc $f$ est constante sur $[0, \alpha]$. Donc $f$ constante sur $[0, 1]$.

---

**Exercice 5**

**Enoncé**

Soient $n, m$ des entiers positifs.

Déterminer un polynôme unitaire (de coefficient dominant 1) de degré maximal divisant

$$X^n - 1 \text{ et } X^m - 1.$$

**Eléments de correction**

La réponse est

$$D = X^{n \wedge m} - 1$$

avec $n \wedge m$ le plus petit diviseur commun de $n$ et $m$. On constate en effet directement que ce polynôme divise les polynômes, en utilisant la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique. Par exemple

$$X^n - 1 = D \times (1 + X^{n \wedge m} + X^{2(n \wedge m)} + \cdots + X^{n-(n \wedge m)}).$$

On constate ensuite qu'il est de degré maximal en considérant les racines. En effet, une racine $\omega$ d'un diviseur $P$ de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ doit satisfaire

$$\omega^n = \omega^m = 1$$

et donc $\omega^{n \wedge m} = 1$. De plus les racines de $X^n - 1$ sont simples, donc celles de $P$ aussi. Donc $P$ est divisible par $D$.

---

**Exercice 6**

**Enoncé**

Soit $E$ un espace vectoriel complexe de dimension $n$, $f$ un endomorphisme diagonalisable de $E$. Montrer qu'il existe un élément $v$ de $E$ tel que

$$(v, f(v), ..., f^{n-1}(v))$$

soit une base si et seulement si $f$ possède $n$ valeurs propres distinctes.

**Eléments de correction**

Notons

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

les valeurs propres de $f$ et

$$B = (e_1, \cdots, e_n)$$

une base correspondante de vecteurs propres de $f$.

Supposons que les valeurs propres de $f$ sont distinctes. Soit

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

On a pour $p \geq 0$ :

$$f^p(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p (e_i).$$

On obtient que $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est libre puisqu'on reconnaît une matrice de Vandermonde de déterminant

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

qui est non nulle puisque les valeurs propres sont distinctes.

Supposons maintenant que les valeurs propres de $f$ ne soient pas distinctes. Soit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

avec des $x_i$ quelconques. On a comme ci-dessus

$$f^p(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p x_i e_i.$$

La matrice générée par $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est de type Vandermonde de déterminant

$$\left( \prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right) (\Pi_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)) = 0.$$

Donc, quelque soit $x$, on obtient que la famille

$$(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$$

est liée.

---

**Exercice 7**

Soit $q$ un réel non nul et

$$A(q) = \begin{pmatrix} q & q(q+1) \\ q(q-1) & -q \end{pmatrix}.$$

(a) Est-ce que pour tous $q \neq p \in \mathbb{R}^*$, $A(q)$ et $A(p)$ sont semblables ?

(b) Même question pour les

$$A'(q) = q^{-2}A(q).$$

(c) On considère les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$B^2 = (A(q))^2.$$

Combien parmi celles-ci ne sont pas semblables à $A(q)$ ?

**Eléments de correction**

(a) Non, les déterminants sont différents.

(b) Oui. On a

$$A'(q)^2 = I_2$$

et donc $A'(q)$ est une symétrie, donc diagonalisable. De plus $A'(q)$ n'est diagonale pour aucun $q \in \mathbb{R}^*$. Donc $A'(q)$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) De même, $q^{-2}B$ est une symétrie. Si elle n'est pas semblable aux matrices $A(q)$, alors

$$B = \pm q^2 I_2,$$

on obtient donc deux telles matrices.

**Exercice 8**

Enoncé

On considère une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = x^n + ax + b$$

avec $n \geq 2$ et $a, b$ réels.

a) Montrer que $f$ n'a pas plus de 3 racines réelles différentes.

b) Donner un exemple avec 3 racines réelles différentes.

c) Montrer que, si de plus $n$ est pair, $f$ n'a pas plus de 2 racines réelles différentes.

**Eléments de correction**

a) Si $n \leq 3$ c'est clair. Supposons $n \geq 4$ et que $f$ a 4 racines réelles différentes

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

D'après le théorème de Rolle, on a

$$x_1 < x_1' < x_2 < x_2' < x_3 < x_3' < x_4$$

tels que

$$f'(x_1') = f'(x_2') = f'(x_3') = 0.$$

Puis de même on a

$$x_1' < x_1'' < x_2' < x_2'' < x_3'$$

tels que

$$f''(x_1'') = f''(x_2'') = 0,$$

c'est-à-dire

$$0 = n(n-1)(x_1'')^{n-2} = n(n-1)(x_2'')^{n-2}.$$

Donc $x_1'' = x_2'' = 0$, contradiction.

b) Par exemple

$$f(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2).$$

c) Supposons que $n$ est pair. Supposons de plus que $f$ a 3 racines réelles différentes

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Alors d'après le théorème de Rolle, on a

$$x_1 < x_1' < x_2 < x_2' < x_3$$

tels que

$$f'(x_1') = f'(x_2') = 0.$$

Puis de même on a

$$x_1' < x_1'' < x_2'$$

tel que

$$f''(x_1'') = 0 = n(n-1)(x_1'')^{n-2}.$$

Donc $x_1'' = 0$. Donc $x_2' > 0$ et $x_1' < 0$. Mais

$$n(x_2')^{n-1} = -a = n(x_1')^{n-1}$$

avec $n(x_2')^{n-1} > 0$ et $n(x_1')^{n-1} < 0$ car $n-1$ impair, contradiction.

---

**Exercice 9**

Soit

$$P(X) = X^n + aX + b$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ les racines de ce polynôme. Montrer que

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1} a^n).$$

**Eléments de correction**

On observe d'abord que la quantité à calculer est :

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i\leq n} P'(x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i\leq n} (nx_i^{n-1}+a)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i\leq n} ((1-n)a - nbx_i^{-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n b^n Q((1-n)a/(nb)).$$

Avec

$$Q(X) = \prod_{1\leq i\leq n} (X - x_i^{-1}) = X^n + a/bX^{n-1} + 1/b.$$

On obtient le résultat

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n b^n (((1-n)a/(nb))^n + ((1-n)a/(nb))^{n-1} a/b + 1/b)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((1-n)^n a^n + a^n n(1-n)^{n-1} + n^n b^{n-1}).$$

---

**Exercice 10**

**Enoncé**

Soient $n \geq m$ deux entiers positifs. On lance $k$ fois un dé à $m$ faces numérotées de 1 à $m$.

Quelle est la probabilité que la somme soit égale à $n$ ?

**Eléments de correction**

Le nombre total de tirages possibles est $m^k$. Il faut compter le nombre de tirages qui donnent une somme égale à $n$. Il s'agit du coefficient de $z^n$ dans le polynôme :

$$(z + z^2 + \cdots + z^m)^k = z^k \frac{(1-z^m)^k}{(1-z)^k}.$$

On peut développer en série entières pour $|z| \leq 1$ :

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{r\geq 0} z^r \binom{r+k-1}{k-1}.$$

(On peut obtenir cette formule par dérivation par exemple). Le résultat pour le nombre de tirage est donc

$$\sum_{0 \leq r \leq R} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n-rm-1}{k-1}$$

avec $R = \mathrm{Min}(k, \frac{n-k}{m})$.

---

**Exercice 11**

**Enoncé**

Soit

$$A = (A_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

une matrice antisymétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le déterminant de $A$ est égal au déterminant de la matrice

$$(A_{i,j} + \lambda)_{1 \leq i,j \leq 2n}.$$

**Eléments de correction**

On remarque d'abord que si $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, alors son déterminant est nul car

$$\det(M) = \det({}^tM) = -\det(M).$$

On construit une matrice $B$ dont les éléments sur la première colonne sont

$${}^tC = (1, -\lambda, \cdots, -\lambda),$$

la première ligne est

$$L = (1, 0, \cdots, 0)$$

et $A = (B_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n+1}$. On a

$$\det(B) = \det(A).$$

Par ailleurs, soit maintenant $B'$ est la matrice dont les éléments sur la première colonne sont

$$(0, -\lambda, \cdots, -\lambda),$$

la première ligne est $L$ et $A = (B'_{i,j})_{2\leq i,j\leq n+1}$. Alors le déterminant de la matrice $B'$ est $\lambda$ multiplié par le déterminant de la matrice où on a remplacé la première colonne par

$$^t(0, 1, \cdots, 1).$$

Il s'agit d'une matrice antisymétrique, donc $\det(B') = 0$ d'après la remarque préliminaire. Donc

$$\det(A) = \det(B) + \det(B')$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient que ce déterminant est

$$\det(B) + \det(B') = \det(D),$$

avec $D$ la matrice dont la première colonne est $C$, la première ligne est formée de coefficients 1 et $A = (D)_{2\leq i,j\leq n+1}$.

Maintenant en soustrayant la première colonne de $D$ aux autres colonnes de $D$ on trouve une matrice qui a pour déterminant celui de la matrice

$$(A_{i,j} + \lambda)_{1\leq i,j\leq 2n},$$

ce qui donne le résultat.

---

**Exercice 12**

On suppose que le graphe d'un polynôme de degré 6 est tangent à une droite en trois points $A$, $B$, $C$ avec $B$ milieu de $[AC]$. Montrer que les aires délimitées par les segments $[AB]$, $[BC]$ et la courbe sont égales.

**Eléments de correction**

Supposons, sans perdre de généralité, que le point $B$ est l'origine. Le polynôme peut s'écrire alors sous la forme

$$P(X) = (a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4)X^2 + a_5X.$$

L'équation $y = a_5 x$ est donc celle de la tangente à la courbe à l'origine. Les abscisses de $A$ et $B$ sont respectivement $a$ et $-a$ avec $a > 0$. Les réels $a$ et $-a$ sont racines doubles du polynôme

$$a_0 X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4$$

et donc

$$a_0 X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4 = a_0 (X^2 - a)^2$$

et

$$P(X) = a_0 (X^2 - a)^2 X^2 + a_5 X.$$

L'égalité des aires est alors conséquence de l'égalité :

$$\int_{-a}^{0} a_0 (x^2 - a)^2 x^2 dx = \int_{0}^{a} a_0 (x^2 - a)^2 x^2 dx.$$

---

## Exercice 13

### Enoncé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n$ entier strictement positif. Trouver l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$B + B^t = 2tr(B)A.$$

### Eléments de correction

La relation implique que $A$ doit être symétrique si $tr(B) \neq 0$. Par ailleurs en prenant la trace de l'égalité, on obtient

$$2tr(B) = 2tr(B)tr(A)$$

donc

$$tr(B) = 0 \text{ ou } tr(A) = 1.$$

Si $tr(B) = 0$, on obtient

$$B + B^t = 0,$$

c'est-à-dire que $B$ est dans l'espace $AS_n$ des matrices antisymétriques.

Si $tr(A) = 1$, on pose:

$$Y = B - tr(B)A.$$

Alors

$$Y + Y^t = 0$$

et $Y$ est antisymétrique donc

$$B \in Vect(A) + AS_n.$$

Réciproquement toute matrice de $Vect(A) \bigoplus AS_n$ est solution.

En conclusion:

1. si $A$ n'est pas symétrique alors $B = 0$ est la seule solution.
2. si $A$ est symétrique et $tr(A) \neq 1$ alors $AS_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des solutions.
3. si $A$ est symétrique et $tr(A) = 1$ alors $Vect(A) \bigoplus AS_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des solutions.

---

**Exercice 14**

**Enoncé**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur $I$ à valeurs réelles, et convergeant uniformément sur $I$. On pose

$$g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge uniformément sur $I$.

**Eléments de correction**

Clairement, la suite de fonctions $g_n$ converge simplement, disons vers $g$ (qui vaut $\frac{f}{1+f^2}$ pour $f$ la limite de $f_n$).

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, posons
$$A = \frac{a}{1+a^2} \text{ et } B = \frac{b}{1+b^2}.$$
On a alors la majoration
$$|A - B| = \frac{|a-b||1-ab|}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq |a-b|$$
car
$$(1+a^2)(1+b^2) \geq 1 + a^2 + b^2 \geq 1 + |ab| \geq |1 - ab|.$$
On a ainsi, pour tous $t \in I$, $n, p \in \mathbb{N}$ :
$$|g_n(t) - g_p(t)| \leq |f_n(t) - f_p(t)|.$$
Lorsqu'on fait tendre $n$ vers l'infini on obtient
$$|g(t) - g_p(t)| \leq |f(t) - f_p(t)|,$$
et on en déduit la convergence uniforme.

---

### Exercice 15

### Enoncé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que
$$A = \lambda U + \mu V \ , \ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \text{ et } A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V.$$
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a
$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

### Eléments de correction

Si $\lambda = \mu = 0$ c'est évident.

Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, on a $A = \mu V$ et

$$\mu^2 V = A^2 = \mu A V.$$

Donc $AV = \mu V$ ce qui donne le résultat

$$A^p = \mu A^{p-1} V = \mu^p V.$$

Si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$ c'est analogue.

Si $\lambda = \mu \neq 0$, on fait de même avec $U + V$.

Si $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, on remarque que

$$A^2 = \lambda A U + \mu A V = \lambda^2 U + \mu^2 V$$

et de même

$$A^3 = \lambda^2 A U + \mu^2 A V = \lambda^3 U + \mu^3 V$$

donc

$$AU = \lambda U \text{ et } AV = \mu V$$

et on peut conclure par récurrence sur $p$.

---

**Exercice 16**

**Enoncé**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Déterminer toutes les lois possibles de $X$ telles que pour tous $m, n$ entiers positifs

$$P(X \geq n + m | X \geq n) = P(X \geq m).$$

**Eléments de correction**

On a

$$P(X \geq n + m | X \geq n) P(X \geq n) = P(X \geq n + m)$$

et donc

$$P(X \geq n+m) = P(X \geq m)P(X \geq n).$$

Pour $m = 1$, on obtient

$$P(X \geq n+1) = P(X \geq 1)P(X \geq n)$$

et donc

$$P(X \geq n) = \alpha^n$$

pour

$$\alpha = P(X \geq 1) \in [0, 1].$$

En prenant la limite $n \to +\infty$, on obtient $\alpha \in [0, 1[$.

On obtient condition nécessaire :

$$P(X \geq n) = \alpha^n$$

pour un certain $\alpha \in [0, 1[$. On vérifie directement que c'est une condition suffisante.

On obtient donc les lois géométriques de paramètre dans $[0, 1[$.

---

**Exercice 17**

**Enoncé**

Soit $E$ l'espace des fonctions réelles deux fois dérivables sur $[0, 1]$. Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que, si

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$$

pour toute fonction $g \in E$, alors $f$ est la fonction nulle.

**Eléments de correction**

Soit $F$ la primitive de $f$ nulle en 0. Alors

$$F(1) = 0 \text{ car } \int_0^1 f(t)dt = 0$$

puisque $1 \in E$.

Pour $g \in E$ et $G$ une primitive de $g$, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 F(t)g(t)dt = [FG]_0^1 - \int_0^1 f(t)G(t)dt = 0.$$

On choisit $g \in E$ telle que $g' = F$ et on obtient

$$\int_0^1 F^2(t)dt = 0.$$

On obtient que $F$ continue est nulle et donc que $f$ est nulle.

---

**Exercice 18**

**Enoncé**

Soit $E$ un espace vectoriel complexe de dimension finie et $f$, $g$ deux endomorphismes de $E$. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g.$$

Montrer que $f$ et $g$ ont un vecteur propre commun.

**Eléments de correction**

On va montrer que si

$$f \circ g - g \circ f = f$$

alors il existe $k \geq 0$ tel que $f^k = 0$. On montre par récurrence sur $k$ que

$$f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k.$$

Donc puisque l'endomorphisme de $\text{End}(E)$ défini par

$$u \mapsto u \circ g - g \circ u$$

n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe $k$ tel que $f^k = 0$.

On en déduit qu'alors $f$ n'est pas inversible. Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(g(x)) = 0$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par $g$ donc $f$ et $g$ ont un vecteur propre commun.

Ceci nous permet de conclure si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Sinon on écrit
$$f \circ \left(g + \frac{\alpha}{\beta} f\right) - \left(g + \frac{\alpha}{\beta} f\right) \circ f = \beta \left(g + \frac{\alpha}{\beta} f\right).$$
Donc $\mathrm{Ker}\left(g + \frac{\alpha}{\beta} f\right)$ n'est pas nul et est stable par $f$.

On trouve donc $x \neq 0$ tel que
$$\left(g + \frac{\alpha}{\beta} f\right)(x) = 0$$
et il existe $\lambda$ tel que
$$f(x) = \lambda x \text{ et } g(x) = -\frac{\lambda \alpha}{\beta} x.$$

---

**Exercice 19**

**Enoncé**

Déterminer les fonctions
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
de classe $\mathcal{C}^2$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$
On pourra éventuellement considérer la fonction
$$g(u, v) = f(u + v, u - v).$$

**Eléments de correction**

On écrit $u$, $v$ en fonction de $x$, $y$ :

$$u = \frac{x+y}{2}\ ,\ v = \frac{x-y}{2}.$$

Donc

$$f(x,y) = g\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

Puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

L'équation devient alors équivalente à

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0.$$

Donc $g$ est la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une variable

$$g(u,v) = H(v) + K(u)$$

et donc

$$f(x,y) = H\left(\frac{x-y}{2}\right) + K\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

On vérifie que, réciproquement de telles fonctions conviennent.

---

**Exercice 20**

On considère l'ensemble $E$ des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ formant une famille libre.

Montrer que cet ensemble est ouvert dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

**Eléments de correction**

Soit
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to ||x \wedge y||_2.$$
$f$ est clairement une fonction continue, c'est la norme du produit vectoriel $x \wedge y$.

Or
$$(x,y) \in E \text{ si et seulement si } f(x,y) > 0.$$
Donc
$$E = f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$$
est l'image réciproque par une application continue de $R^{+*}$ qui est ouvert donc c'est un ouvert.

---

**Exercice 21**

**Enoncé**

Soit $E$ l'ensemble des fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant
$$f(0) = f(1) = 1 \text{ et } \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2.$$
On définit
$$H : E \to \mathbb{R},$$
$$H : f \mapsto \int_{-1}^{1} f^2(x)dx.$$
Montrer que le minimum de $H$ sur $E$ est atteint et le calculer.

**Eléments de correction**

Pour
$$g = f - 1$$
on a
$$\int_{-1}^{1} g^2(x)dx = \int_{1}^{1} f^2(x)dx - 2.$$

Minimiser $H$ revient donc à minimiser $\int_{-1}^{1} g^2(x)dx$ avec la contrainte

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0.$$

Le minimum est clairement atteint en $g = 0$. Ce minimum est unique car l'intégrale d'une fonction positive continue est nulle si et seulement elle est nulle.

Le minimum est donc atteint pour $f = 1$ et vaut 2.

---

**Exercice 22**

**Enoncé** On munit l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, n\}$ de la distribution uniforme. On note $P_n$ la probabilité pour qu'une permutation n'ait aucun point fixe. Calculer $P_n$ et sa limite pour $n \to +\infty$.

**Eléments de correction**

On obtient d'abord

$$n! = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} D_k$$

pour

$$D_0 = 0 \text{ et } D_n = P_n n! \text{ pour } n \ge 1.$$

Cette formule est obtenue en dénombrant le nombre de permutations selon leur nombre $k$ de points fixes.

Ceci implique

$$1 = \sum_{1 \le k \le n} \frac{P_k}{(n-k)!}.$$

Comme $0 \le P_k \le 1$, la série entière

$$P(z) = \sum_{k \ge 0} P_k z^k$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. La formule ci-dessus est un produit de Cauchy entre des séries entières de rayon de convergence strictement positif :

$$\frac{1}{1-z} = P(z) \times \exp(z).$$

On obtient

$$P(z) = \frac{\exp(-z)}{1-z}$$

et

$$P_n = \sum_{0 \le k \le n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La limite pour $n \to +\infty$ est $\exp(-1)$.

---

**Exercice 23**

On place $n$ points $A_1, \cdots, A_n$ sur le cercle unité.

Montrer qu'il existe un point $M$ sur ce cercle tel que

$$\prod_{1 \le i \le n} A_i M = 1.$$

**Eléments de correction**

On note $z_i$ l'affixe du point $A_i$. Soit

$$P(z) = \prod_{1 \le i \le n} (z - z_i) = z^n + \cdots + a_0.$$

On a

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Donc pour

$$M = \mathrm{Max}_{z,|z|=1} |P(z)|,$$

on a

$$1 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta$$

et donc $M \geq 1$.

Par ailleurs P est nulle en les $z_i$ donc, par le théorème des valeurs intermédaires et continuité de $P$, il existe $z$ tel que $|P(z)| = 1$.

---

### Exercice 24

#### Enoncé

Quelle est la limite de la suite

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

lorsque $n$ tend vers l'infini.

#### Eléments de correction

On remarque d'abord que

$$S_n = Re\left(\sum_{k=0}^{n} \exp\left(i\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right) = Re\left(\frac{1-\exp\left(\frac{2i\pi(n+1)}{2n+1}\right)}{1-\exp\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

$$= Re\left(\exp\left(\frac{i\pi n}{2n+1}\right)\frac{\exp\left(\frac{-i\pi(n+1)}{2n+1}\right)-\exp\left(\frac{i\pi(n+1)}{2n+1}\right)}{\exp\left(\frac{-i\pi}{2n+1}\right)-\exp\left(\frac{i\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

Ceci permet de calculer

$$S_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{2}.$$

La suite $S_n$ est donc constante et tend vers $1/2$ en l'infini.

---

### Exercice 25

#### Enoncé

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$e^x + x = n.$$

Montrer qu'il existe une unique solution $u_n$ réelle positive.

Étudiez la suite ainsi définie. Trouvez un équivalent en $+\infty$ puis un développement asymptotique.

**Eléments de correction**

Soit la fonction réelle

$$f_n(x) = e^x + x - n.$$

On a $f_n(0) = 1 - n \leq 0$ et pour $x$ réel :

$$f_n'(x) = e^x + 1 > 0.$$

De plus,

$$\lim_{x->+\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f_n$ s'annule en un point, et un seul, noté $u_n$. Par ailleurs la fonction $e^x + x$ étant strictement croissante, la suite $u_n$ l'est aussi. Si elle converge vers une limite finie, $e^x + x$ tend aussi vers une limite finie quand $n$ tend vers l'infini, contradiction. Par conséquent $u_n$ tend vers l'infini.

On a

$$e^{u_n} = n - u_n.$$

Or $u_n/e^{u_n}$ tend vers 0 donc

$$e^{u_n} \sim_{+\infty} n \text{ et } u_n \sim_{+\infty} \ln(n).$$

En réutilisant l'équivalent dans la relation on obtient:

$$e^{u_n} =_{+\infty} n - \ln(n) + o(ln(n)).$$

Par composition:

$$u_n =_{+\infty} \ln(n - \ln(n) + o(ln(n)))$$

$$=_{+\infty} ln(n) + ln(1 - ln(n)/n + o(ln(n)/n))$$

$$=_{+\infty} \ln(n) - \ln(n)/n + o(ln(n)/n).$$

---

**Exercice 26**

**Enoncé**

Soit $n$ un entier. Soit $P_n$ le polynôme défini par

$$P_n(X) = X^{2n} + X^2 - 1.$$

Montrer que $P$ possède deux racines réelles de signes opposés.

On note $r_n$ la racine positive. Démontrer que la suite $r_n$ est bornée et converge.

Déterminer sa limite.

**Eléments de correction**

Le polynôme $P_n$ définit une fonction paire de dérivée

$$P_n'(X) = 2nX^{2n-1} + 2X$$

qui ne s'annule qu'en 0 sur $\mathbb{R}$. Donc $P_n$ est strictement décroissante jusqu'en 0 puis strictement croissante. Elle possède au plus deux racines réelles. Or

$$P_n(0) = -1 \text{ et } P_n(1) = P_n(-1) = 1.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $P_n$ possède deux racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$ et $r_n$ est bien définie et appartient à $[0, 1[$.

$$\text{Pour } x \in [0,1]\ ,\ x^{2n+2} \leq x^{2n},$$

donc

$$\forall x \in [0,1[,\ P_{n+1}(x) \leq P_n(x).$$

Donc $r_{n+1} > r_n$. Ainsi la suite $(r_n)$ est strictement croissante et bornée donc elle converge vers une limite $l$.

Si $l < 1$ alors $r_n^{2n}$ tend vers 0 donc $l$ vérifie $l^2 - 1 = 0$, contradiction. Donc

$$l = 1.$$

---

**Exercice 27**

**Enoncé**

Étudier la nature de la série terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}.$$

On pourra commencer par regarder le comportement de $u_n + u_{n+1}$.

**Eléments de correction**

On calcule

$$\begin{aligned}(-1)^n(u_n + u_{n+1}) &= \frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(n+1))}{n+1} \\ &= \frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(n))}{n+1} + \frac{\sin(\ln(n))}{n+1} - \frac{\sin(\ln(n+1))}{n+1}\end{aligned}$$

Or

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2}).$$

Donc

$$v_n = \frac{\sin(\ln(n))}{n+1} - \frac{\sin(\ln(n+1))}{n+1} = \frac{2}{n+1}\sin\left(\frac{1}{2}\ln(1-\frac{1}{n})\right)\cos(\ln(n^2+1)).$$

Le terme en $\frac{2}{n+1}$sinus est équivalent à $-\frac{1}{n(n+1)}$. Ainsi

$$v_n = O(\frac{1}{n^2})$$

et

$$(-1)^n(u_n + u_{n+1}) = O(\frac{1}{n^2}) + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2}).$$

En sommant, on a

$$S_{2p} = \sum_{i=1}^{2p} u_i = \sum_{i=1}^{p} (u_{2i-1} + u_{2i})$$

qui converge donc et

$$S_{2p+1} = \sum_{i=1}^{2p+1} u_i = u_1 + \sum_{i=1}^{p} (u_{2i+1} + u_{2i})$$

qui converge donc aussi. De plus

$$S_{2p+1} - S_{2p} = (-1)^{2p+1} \frac{\sin(\ln(2p+1))}{2p+1} \rightarrow_{p->+\infty} 0.$$

Par conséquent $S_p$ converge quand $p$ tend vers l'infini.

---

**Exercice 28**

Peut-on truquer un dé numéroté de 1 à $n$ ($n \geq 3$) de sorte que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $\{2, .., 2n\}$ ?

**Eléments de correction**

La fonction de partition $g_X$ du dé et celle $g_S$ de la somme vérifient

$$g_X^2 = g_S.$$

Ceux sont des polynômes et la condition demandée est

$$g_S(x) = \sum_{i=2}^{2n} \frac{1}{2n-1} x^i.$$

Les racines de ce polynôme sont 0 (racine double) et des racines de l'unité qui sont simples. Donc il ne peut pas s'agir du carré d'un polynôme.

---

**Exercice 29**

**Enoncé**

Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$u^3 = 0$$

et $u^2$ soit non nul.

Trouver l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec $u$.

**Eléments de correction**

Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(x)$ soit non nul. Alors on vérifie que

$$B = (u^2(x), u(x), x)$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ avec $\mu \neq 0$ tels que

$$u^2(x) = \lambda u(x) + \mu x.$$

En appliquant $u^2$ on obtient $u^2(x) = 0$, contradiction. C'est analogue si $x$, $u(x)$ sont liés ou si $x$, $u^2(x)$ sont liés.

Maintenant on écrit la matrice dans la base $B$ :

$$A = Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $v$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui commute avec $u$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2)$

sont stables par $v$ donc la matrice de $v$ est de la forme :

$$C = Mat_B(v) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

En effectuant les produits de matrice on obtient $a = d = f$ et $b = e$ d'où

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On obtient un espace d'endomorphisme de dimension 3 engendré par $Id$, $u$ et $u^2$.

---

## Exercice 30

### Enoncé

Trouver les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$|f| + |1 + f'| \leq 1.$$

### Eléments de correction

L'inégalité implique immédiatement que :

$$|f| \leq 1 \text{ et } -2 \leq f' \leq 0.$$

Par conséquent $f$ est décroissante et possède soit des limites finies soit des limites infinies en l'infini : elles sont finies car $f$ est bornée.

Si il existe $x$ tel que $f(x) > 0$ alors

$$\forall y \leq x \ , \ f(y) \geq f(x) > 0$$

donc

$$|1+f'(y)| \leq 1-f(x) < 1.$$

Ainsi $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, x]$ de dérivée strictement majorée par un réel strictement positif donc elle tend vers $+\infty$ en $-\infty$. Ce qui est impossible.

Le raisonnement est le même si $f$ prend des valeurs strictement négatives.

Donc $f$ ne peut être que la fonction nulle.

---

**Exercice 31**

**Enoncé**

Résoudre l'équation différentielle

$$f(x) = -f'(1/x) \text{ pour } x > 0,$$

pour une fonction $f$ réelle.

On pourra effectuer un changement de variable pour trouver une solution éventuelle.

**Eléments de correction**

Soit $f$ une solution. On a alors

$$f'(x) = -f(1/x)$$

donc $f'$ est dérivable et

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}f'(1/x) = -\frac{1}{x^2}f(x).$$

Soit

$$g(t) = f(\exp(t)).$$

Alors

$$g'(t) = f'(e^t)e^t$$

et

$$g''(t) = f''(e^t)e^{2t} + g'(t).$$

On obtient:

$$g''(t) = g'(t) - g(t)$$

Donc il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tes que $g$ est de la forme

$$g(t) = \mathrm{Re}(a\mathrm{exp}(r_1 t) + b\mathrm{exp}(r_2 t))$$

avec

$$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

On obtient

$$f(x) = \mathrm{Re}(ax^{r_1} + bx^{r_2}).$$

Ainsi $f$ est de la forme

$$f(x) = \lambda\sqrt{x}\mathrm{cos}(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu\sqrt{x}\mathrm{sin}(\frac{\sqrt{3}x}{2}),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On constate que seule la fonction nulle est solution.

---

**Exercice 32**

**Enoncé**

Trouver les fonctions strictement positives de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(\sqrt{(x^2 + y^2)}) = f(x)f(y)$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et telles que

$$\ln(|f(x)|) \sim_{+\infty} \alpha x^2,$$

pour un réel $\alpha$ non nul.

**Eléments de correction.**

On effectue un changement de variable en polaire. On a pour $r, \theta \in \mathbb{R}$

$$f(|r|) = f(r\cos(\theta))f(r\sin(\theta)).$$

Soit $g = \ln(IfI)$. On a pour $r \neq 0$ et $\theta = \pi/4$ :

$$g(|r|) = 2g(r\frac{\sqrt{2}}{2})$$

pour $\theta = \pi/4$ et donc

$$\frac{1}{2}g(\sqrt{2}|r|) = g(r).$$

Par récurrence sur $n$ entier on obtient

$$g(r) = 2^{-n}g\left(|r|\left(\sqrt{2}\right)^n\right).$$

Supposons $r > 0$. Comme $\left(r\left(\sqrt{2}\right)^n\right)$ tend vers l'inifini, on obtient :

$$g(r) \sim_{n+\infty} 2^{-n}\alpha r^2 2^n \sim_{n\to+\infty} \alpha r^2$$

donc $g(r) = \alpha r^2$ (indépendant de $n$) et

$$f(r) = \exp(\alpha r^2).$$

C'est analogue pour $r > 0$, et on obtient la valeur en $r = 0$ par continuité de la fonction.

---

**Exercice 33**

**Enoncé**

Soit $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique satisfaisant pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

$${}^tXAX \geq 0.$$

Montrer que

$$\mathrm{Max}_{1\leq i,j\leq n}|A_{i,j}| = \mathrm{Max}_{1\leq i\leq n}A_{i,i}.$$

**Eléments de correction**

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a

$$A_{i,i} = e_i^t A e_i \geq 0.$$

On considère des réels $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Considérons maintenant le vecteur $X_{i,j}$ pour $i \neq j$ valant $x_i$ en $i$, $x_j$ en $j$ et 0 ailleurs. On a

$$X_{i,j}^t A X_{i,j} \geq 0.$$

Or cette quantité vaut

$$A_{ii}x_i^2 + A_{jj}x_j^2 + 2A_{ij}x_i x_j \geq 0.$$

Les coefficients diagonaux étant positifs cela implique que ce polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en $x_i$ (ou $x_j$) est toujours positif. Si $A_{ii}$ ou $A_{jj}$ est non nul le discriminant doit être positif donc

$$A_{ii}A_{jj} \geq |A_{ij}|^2.$$

Sinon, on obtient $A_{i,j} = 0$ et l'inégalité est également satisfaite.

On a bien au final

$$\max_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}| = \max_{1\leq i\leq n} A_{i,i}.$$

---

**Exercice 34**

**Enoncé**

Déterminer la limite de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}} dt$$

quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Eléments de correction.**

Il faut d'abord justifier que $I_n$ est bien défini pour $n \geq 2$. En effet la fonction $f_n$ intégrée est équivalente à $1/\sqrt{t}$ en 0 et à $t^{-n}$ en $+\infty$.

$f_n$ converge simplement vers

$$\frac{\mathbf{1}_{]0,1]}(t)}{\sqrt{t}}.$$

On applique le théorème de convergence dominée avec la fonction dominatrice

$$g(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} \text{ si } t \leq 1$$

et

$$g(t) = \frac{2}{t^2} \text{ si } t \geq 1.$$

La limite est donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$

---

**Exercice 35**

Soit $A$ matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux.

(a) $A$ est elle diagonalisable?

(b) Sous quelle condition $A^p$ possède une limite quand $p$ tend vers l'infini ?

**Eléments de correction**

(a) Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a

$$A(e_i - e_j) = 0 \text{ si } i \neq j,$$

donc on a $(n-1)$ vecteurs propres libres associés à la valeur 0. La dernière valeur propre correspond au vecteur propre

$$\sum_{i=1}^{n} e_i$$

et vaut $na$ avec $a$ le coefficient de la matrice. $A$ est donc diagonalisable.

(b) Il existe une matrice diagonale $D$ et $P$ inversible telle que

$$A = P^{-1}DP \text{ avec } D = diag(na, 0, ..., 0).$$

Mais $A^p$ converge si et seulement si $D^p$ converge. Or $D^p$ converge si et seulement si

$$|na| < 1 \text{ ou } na = 1.$$

En effet, si $|na| > 1$ elle diverge grossièrement. Pour $na = -1$ la suite est périodique $A^p$ est périodique de période 2.

---

**Exercice 36**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices de même rang. Montrer que

$$A^2B = A$$

si et seulement si

$$B^2A = B.$$

**Eléments de correction**

Il suffit de montrer une implication. On suppose

$$A^2B = A$$

et

$$r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B).$$

La relation implique

$$\mathrm{rg}(A^2) \geq \mathrm{rg}(A)$$

et

$$\mathrm{rg}(A^2) = r.$$

Donc

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2).$$

Mais

$$\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$$

par la relation, donc cet espace est aussi $\mathrm{Ker}(B)$. Maintenant, pour $X$ un vecteur, on a

$$0 = (A^2B - A)AX = A^2(BAX - X).$$

Donc

$$0 = B(BAX - X)$$

et

$$B^2A = B.$$

---

**Exercice 37**

Déterminer l'ensemble

$$N_n = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) | \forall N \in O_n(\mathbb{R}), MNM^{-1} \in O_n(\mathbb{R})\}.$$

**Eléments de correction**

Montrons que

$$N_n = \{\lambda O | \lambda \in \mathbb{R}, O \in O_n(\mathbb{R})\},$$

(c'est-à-dire l'ensemble des matrices de similitudes).

Soit $U \in N_n$. Soit

$$(X_1, \cdots, X_n)$$

la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A_k$ la matrice d'une symétrie orthogonale telle que

$$A_kX_i = X_i \text{ pour } i \neq k,$$

$$A_kX_k = -X_k.$$

Alors la matrice

$$S_k = UA_kU^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$$

est une symétrie (car $S_k^2 = I_n$). Puisque

$$S_k U X_k = -U X_k$$

et

$$S_k U X_i = U X_i \text{ pour } i \neq k,$$

on obtient que les $UX_k$ forment une famille orthogonale.

De plus, on remarque que, pour $k \neq i$ :

$$X_i - X_k \text{ et } X_i + X_k$$

sont orthogonaux donc il en est de même (en reproduisant le raisonnement précédent) de

$$UX_i - UX_k \text{ et } UX_i + UX_k.$$

Donc les $UX_i$ sont de même norme. Notons $\lambda > 0$ cette norme. Ainsi

$$\lambda^{-1} u \in O_n(\mathbb{R}).$$

---

**Exercice 38**

**Enoncé**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans un ensemble dénombrable.

1) Est-ce qu'il existe toujours $\alpha$ réel tel que

$$P(X \leq \alpha) = P(X \geq \alpha) = 1/2 \text{ ?}$$

2) Si il existe, est-ce qu'il est nécessairement unique ?

3) Si il existe, est-ce que $\alpha$ est toujours non unique ?

**Eléments de correction**

1) Non, par exemple si la variable aléatoire $X$ satisfait

$$P(X = 0) = 1/3 \text{ et } P(X = 1) = 2/3.$$

2) Pour une variable aléatoire $X$ telle que

$$P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$$

on voit que $\alpha$ n'est pas unique.

3)Pour le dernier point, on peut poser pour $n \geq 1$ entier

$$P(X = 1/n) = P(X = -1/n) = 1/(n^2 2S)$$

où

$$S = \sum_{n \geq 1} 1/n^2.$$

Alors $\alpha = 0$ est unique.

---

**Exercice 39**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f$ est inversible et

$$f \circ g + g \circ f = 0.$$

(a) Montrer que si $g$ est diagonalisable, alors le rang de $g$ est pair.

(b) Même question si le noyau et l'image de $g$ sont en somme directe.

(c) Est-ce vrai en général ?

**Eléments de correction**

(a) On écrit

$$f \circ g \circ f^{-1} = -g,$$

et donc $g$ et $-g$ ont le même polynôme caractéristique. En particulier, pour $\lambda$ racine de ce polynôme, $-\lambda$ est racine de même mutiplicité. Donc la somme des multiplicités correspondant à des racines non nulles est paire. Ceci permet de conclure pour la question (a).

(b) C'est analogue en écrivant la matrice de $g$ par blocs diagonaux.

(c) En général, on obtient un contre-exemple en remarquant que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

---

**Exercice 40**

Soit $X$ une variable aléatoire positive telle que

$$E(X^2) = 1 \text{ et } E(X) > a > 0.$$

Montrer que pour $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$P(X \geq \lambda a) \geq (1-\lambda)^2 a^2.$$

**Eléments de correction**

Posons

$$Y = X/a.$$

On a

$$E(Y) > 1$$

et on veut montrer que

$$E(Y^2)P(Y \geq \lambda) \geq (1-\lambda)^2.$$

On applique Cauchy-Schwarz :

$$\sqrt{E(Y^2)E(\mathbf{1}_{Y\geq\lambda})} \geq E(Y\mathbf{1}_{Y\geq\lambda})$$

ce qui vaut

$$E(Y) - E(Y\mathbf{1}_{Y<\lambda}) > 1 - \lambda E(\mathbf{1}_{Y<\lambda}) \geq 1 - \lambda.$$

On obtient l'inégalité souhaitée en élevant au carré.