ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2013 FILIÈRE PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (XEULC)

Proposition de corrigé.

⋆⋆⋆

1 Préliminaires

1. $n = 3$. La matrice $R_{p,q}(\theta)$ est une matrice de rotation. Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien, la rotation étudié est d'axe la droite dirigée par e_i avec $i \in \{1, 2, 3\}$ et $i \neq p$, $i \neq q$. La rotation est d'angle θ, l'axe étant orienté par $e_p \wedge e_q$.
2. Notons $C_1, ..., C_n$ les vecteurs colonnes de $R_{p,q}(\theta)$.
   Le coefficient général de ${}^t(R_{p,q}(\theta))R_{p,q}(\theta)$ est le produit scalaire $\langle C_i, C_j\rangle = {}^tC_iC_j$. (On utilise ici le produit scalaire canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). En notant $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique on a :
   - Si $i \neq p$ et $i \neq q$, $C_i = E_i$.
   - $C_p = \cos\theta E_p + \sin\theta E_q$.
   - $C_q = -\sin\theta E_p + \cos\theta E_q$.

   D'où les différents cas pour les produits scalaires deux à deux :
   - i, j tous deux distincts de p, q ; $\langle C_i, C_j\rangle = \langle E_i, E_j\rangle = \delta_i^j$.
   - $i \neq p$, $i \neq q$;
     $\langle C_i, C_q\rangle = \langle E_i, -\sin\theta E_p + \cos\theta E_q\rangle = -\sin\theta\langle E_i, E_p\rangle + \cos\theta\langle E_i, E_q\rangle = 0$
   - $j \neq p$, $j \neq q$, même calcul $\langle C_j, C_p\rangle = 0$.
   - $\langle C_p, C_p\rangle = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$
   - $\langle C_q, C_q\rangle = (-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

   Les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. La matrice étudiée est orthogonale.
   Le calcul direct du produit nous donne rapidement ${}^t(R_{p,q}(\theta))R_{p,q}(\theta) = I_n$.
3. $S \in \mathbf{S}_n$ et $R \in \mathbf{O}_n$. ${}^t\left({}^tRSR\right) = {}^tR{}^tS{}^t({}^tR) = {}^tRSR$. Cette matrice est symétrique. Comme R est orthogonale ${}^tR = R^{-1}$ et les deux matrices S et ${}^tRSR$ sont donc semblables.
4. $A \in \mathbf{M}_n$, $U, V \in \mathbf{O}_n$.
   $||UAV||^2 = Tr({}^t(UAV)UAV) = Tr({}^tV{}^tA{}^tUUAV) = Tr({}^tV{}^tAAV)$ car ${}^tU = U^{-1}$.
   Comme de plus, pour tout couple de matrices (M, P), $Tr(MP) = Tr(PM)$ on a :
   $||UAV||^2 = Tr({}^tAAV{}^tV) = Tr({}^tAA) = ||A||^2$ car ${}^tV = V^{-1}$.
   Finalement $||UAV|| = ||A||$.
5. $a \leq b \leq c \leq d$ avec $a + d = b + c$.
   Donnons l'expression de la fonction $f := x \mapsto |x - a| - |x - b| - |x - c| + |x - d|$ suivant les intervallles de définition.

- Si $x \leq a$, $f(x) = -x + a - (-x + b) - (-x + c) - x + d = a - b - c + d = 0$
- Si $a \leq x \leq b$, $f(x) = x - a - (-x + b) - (-x + c) - x + d = 2x - a - b - c + d$.
  f est croissante sur cet intervalle.
- Si $a \leq x \leq b$, $f(x) = x - a - (-x + b) - (-x + c) - x + d = 2x - a - b - c + d$.
  f est croissante sur cet intervalle.
- Si $b \leq x \leq c$, $f(x) = x - a - (x - b) - (-x + c) - x + d = -a + b - c + d$.
  f est constante sur cet intervalle.
- Si $c \leq x \leq d$, $f(x) = x - a - (x - b) - (x - c) - x + d = -2x - a + b + c + d$.
  f est décroissante sur cet intervalle.
- Si $d \leq x$, $f(x) = x - a - (x - b) - (x - c) + x - d = -a + b + c - d = 0$.
  f est constante sur cet intervalle.

D'après le tableau de variations, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

2 Conjugaison par une matrice de rotation

On se donne une matrice $\in \mathbf{S}_n$, un angle $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et des entiers $1 \leq p < q \leq n$ tels que $s_{pq} \neq 0$. On définit $S' = {}^tR_{p,q}(\theta) S R_{p,q}(\theta)$ et on note s'_{ij} ses coefficients.

6. Soit f endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice S dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, base notée $\mathcal{B}_c = (e_1, ..., e_n)$. Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de passage de la base canonique à cette base soit $R_{p,q}(\theta)$. Comme R est orthogonale, cette nouvelle base est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
   S' est la matrice de f dans $\mathcal{B}'$. Par définition :
   $$\forall j \in \{1, ..., n\}, f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} e_i \quad \text{et} \quad \forall i, \quad s_{ij} = \langle f(e_j), e_i \rangle$$
   car la base $\mathcal{B}_c$ est orthonormale. De même :
   $$\forall j \in \{1, ..., n\}, f(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} s'_{ij} \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \forall i, \quad s'_{ij} = \langle f(\varepsilon_j), \varepsilon_i \rangle$$
   Par construction , pour $i \neq p$ et $i \neq q$, $\varepsilon_i = e_i$ donc $s'_{ii} = \langle f(\varepsilon_i), \varepsilon_i \rangle = \langle f(e_i), e_i \rangle = s_{ii}$.
   On obtient donc :
   $$Tr(S') = \sum_{i=1, i\neq p, i\neq q}^{n} s'_{ii} + s'_{pp} + s'_{qq} = \sum_{i=1, i\neq p, i\neq q}^{n} s_{ii} + s'_{pp} + s'_{qq} = Tr(S) + s'_{pp} + s'_{qq} - s_{pp} - s_{qq}$$
   Comme S et S' sont semblables $Tr(S) = Tr(S')$, on a : $s'_{qp} + s'_{pq} = s_{qp} + s_{pq}$.
7. Étudions les différents cas.
   - $i \notin \{p, q\}$ et $j \notin \{p, q\}$. $s'_{ij} = \langle f(\varepsilon_i), \varepsilon_j \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = s_{ij}$.
   - $i \notin \{p, q\}$; $s'_{ip} = s'_{pi} = \langle f(\varepsilon_i), \varepsilon_p \rangle = \langle f(e_i), \cos\theta e_p + \sin\theta e_q \rangle$
     $s'_{ip} = \cos\theta \langle f(e_i), e_p \rangle + \sin\theta \langle f(e_i), e_q \rangle = \cos\theta s_{ip} + \sin\theta s_{iq}$.
   - $i \notin \{p, q\}$; $s'_{iq} = s'_{qi} = \langle f(\varepsilon_i), \varepsilon_q \rangle = \langle f(e_i), -\sin\theta e_p + \cos\theta e_q \rangle$
     $s'_{ip} = -\sin\theta \langle f(e_i), e_p \rangle + \cos\theta \langle f(e_i), e_q \rangle = -\sin\theta s_{ip} + \cos\theta s_{iq}$.

- $s'_{pp} = \langle f(\varepsilon_p), \varepsilon_p \rangle = \langle \cos\theta f(e_p) + \sin\theta f(e_q), \cos\theta e_p + \sin\theta e_q \rangle$.
  $s'_{pp} = \cos^2\theta s_{pp} + 2\cos\theta\sin\theta s_{pq} + \sin^2\theta s_{qq}$
- De même $s'_{qq} = \sin^2\theta s_{pp} - 2\cos\theta\sin\theta s_{pq} + \cos^2\theta s_{qq}$.
- $s'_{pq} = s'_{qp} = \langle \cos\theta f(e_p) + \sin\theta f(e_q), -\sin\theta e_p + \cos\theta e_q \rangle$.
  $s'_{pq} = -\cos\theta\sin\theta s_{pp} + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) s_{pq} + \cos\theta\sin\theta s_{qq}$

8. Pour $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta \neq 0$.
   (a) En divisant par $\cos^2\theta$ on obtient :
   $$s'_{pq} = 0 \Leftrightarrow -\tan\theta s_{pp} + \left(1 - \tan^2\theta)\right) s_{pq} + \tan\theta s_{qq} = 0$$
   En notant $t = \tan\theta$ et comme $s_{pq} \neq 0$ on a :
   $$s'_{pq} = 0 \Leftrightarrow t\frac{s_{pp} - s_{qq}}{s_{pq}} + t^2 - 1 = 0$$
   (b) Le discriminant de l'équation précédentes est $\left(\dfrac{s_{pp} - s_{qq}}{s_{pq}}\right)^2 + 4 > 0$. On a deux racines distinctes t_0, t_1 de produit égal à -1.
   On ne peut donc avoir à la fois $|t_0| > 1$ et $|t_1| > 1$. Si $t_0 = 1$ (resp. $t_1 = 1$) alors $t_1 = -1$ (resp. $t_0 = -1$). D'autre part si $|t_0| < 1$ alors $|t_1| > 1$.
   On a toujours une solution $t_0 \in]-1, 1]$ et une autre $t_1 \notin]-1, 1]$. Comme $t_0 = \tan\theta_0$, on a donc $\theta_0 \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   $t_0 t_1 = -1 = \tan\theta_0 \tan\theta_1$. $\tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_0} = \tan(\theta_0 + \pi/2) = \tan(\theta_0 - \pi/2)$
   Si $t_0 \geq 0$, $\theta_1 = \theta_0 - \pi/2$ sinon $\theta_1 = \theta_0 + \pi/2$.
   (c) D'après les calculs faits précedemment :
   $$s'_{pp} - s_{pp} = (\cos^2\theta_0 - 1)s_{pp} + 2\cos\theta_0\sin\theta_0 s_{pq} + \sin^2\theta_0 s_{qq}.$$
   $$s'_{pp} - s_{pp} = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)(s_{pp} - s_{qq}) + 2\frac{t}{1+t^2}s_{pq}$$
   $$s'_{pp} - s_{pp} = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{(1-t^2)}{t}s_{pq} + \frac{2t}{1+t^2}s_{pq} = \frac{t^2(1+t^2)}{t(1+t^2)}s_{pq} = ts_{pq}$$
   De même $s'_{qq} - s_{qq} = -(s'_{pp} - s_{pp}) = -ts_{pq}$.
   (d) $S = D + E$, D diagonale et E á diagonale nulle. Idem $S' = D' + E'$.
   $$||E'||^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} (s'_{ij})^2$$
   $$||E'||^2 = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j \\ i \notin \{p,q\}, \quad j \notin \{p,q\}}} s_{ij}^2 + 2\sum_{1 \leq i \leq n, i \notin \{p,q\}} (s'_{ip})^2 + 2\sum_{1 \leq i \leq n, i \notin \{p,q\}} (s'_{iq})^2 + 2(s'_{pq})^2$$
   Mais, pour $i \neq p$, $i \neq q$:
   $(s'_{ip})^2 + (s'_{iq})^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)s_{ip}^2 + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)s_{iq}^2 = s_{ip}^2 + s_{iq}^2$.
   Enfin $(s'_{pq})^2 = 0$ par choix de t. On retrouve donc tous les termes de E sauf s_{pq}.
   $||E'||^2 = ||E||^2 - 2s_{pq}^2$.

(e) D'après la question 4., $||S'|| = ||S||$. On a facilement

$$||D'||^2 = \sum_{i=1}^{n} (s'_{ii})^2 = ||S'||^2 - ||E'||^2 = ||S||^2 - ||E||^2 + 2s_{pq}^2 = ||D||^2 + 2s_{pq}^2$$

.

9. Les coefficients de S' s'expriment en fonction de ceux de S et de $\cos\theta_0$ et $\sin\theta_0$ avec $\theta_0 = \arctan(t_0)$. Idem si on choisit θ_1.
10. On suppose dans cette question que s_{pq} est le coefficient de plus grande valeur absolue de E.
   (a) Par choix de s_{pq}, pour tout couple i, j avec $i \neq j$, $|s_{ij}|^2 = s_{ij}^2 \leq s_{pq}^2$.
   $||E||^2 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} s_{ij}^2 \leq (n^2 - n)s_{pq}^2$ et $-2s_{pq}^2 \leq \dfrac{-2||E||^2}{(n^2 - n)}$.

$$||E'||^2 = ||E||^2 - 2s_{pq}^2 \leq ||E||^2 \left(1 - \frac{2}{n^2 - n}\right) \leq \frac{n^2 - n - 2}{n^2 - n}||E||^2$$

   Pour $n \geq 2$ on a $n^2 - n - 2 \geq 0$ et $n^2 - n - 2 < n^2 - n$ d'où
   $||E'|| \leq \rho||E||$ avec $\rho = \sqrt{\dfrac{n^2 - n - 2}{n^2 - n}} < 1$.
   (b) On choisit la racine t_0.
   $||D' - D||^2 = (s'_{pp} - s_{pp})^2 + (s'_{qq} - s_{qq})^2 = 2t_0^2 s_{pq}^2$. (question 8.c)
   Comme $|t_0| \leq 1$, $||D' - D||^2 \leq 2s_{pq}^2 \leq ||E||^2 = \displaystyle\sum_{i_n otj} s_{i,j}^2$.
   Par suite $||D' - D|| \leq ||E||$.
11. En reprenant les expressions trouvées en 7. et en notant $\tan\theta_0 = t$ on a :
   $s'_{qq} - s'_{pp} = (\sin^2\theta_0 - \cos^2\theta_0)s_{pp} - 4\cos\theta_0 \sin\theta_0 s_{pq} + (\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)s_{qq}$.
   $s'_{qq} - s'_{pp} = \cos^2(\theta_0)\left((t^2 - 1)s_{pp} - 4ts_{pq} + (1 - t^2)s_{qq}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}(s_{qq} - s_{pp}) - \frac{4t}{1+t^2}s_{pq}$
   $s'_{qq} - s'_{pp} + s_{qq} - s_{pp} = \frac{2}{1+t^2}(s_{qq} - s_{pp}) - \frac{4t}{1+t^2}s_{pq}$
   Comme 0 n'est pas racine de (1), $t \neq 0$:
   $s'_{qq} - s'_{pp} + s_{qq} - s_{pp} = \frac{2s_{pq}}{t(1+t^2)}\left(\frac{s_{qq}-s_{pp}}{s_{pq}}t - 2t^2\right) = \frac{2s_{pq}}{t(1+t^2)}(t^2 - 1 - 2t^2) = \frac{-2s_{pq}}{t}$
   $(s'_{qq} - s'_{pp})^2 - (s_{qq} - s_{pp})^2 = (s'_{qq} - s'_{pp} + s_{qq} - s_{pp})(s'_{qq} - s'_{pp} - s_{qq} + s_{pp})$.
   Comme de plus $s'_{pp} - s_{pp} = ts_{pq} = s_{qq} - s'_{qq}$ on obtient :

$$(s'_{qq} - s'_{pp})^2 - (s_{qq} - s_{pp})^2 = \frac{-2s_{pq}}{t}(-2ts_{pq}) = 4s_{pq}^2 \geq 0$$

$$|s'_{qq} - s'_{pp}| \geq |s_{qq} - s_{pp}|.$$

12. (a) On a $\dfrac{s_{pp} - s_{qq}}{s_{pq}} = \dfrac{1 - t_0^2}{t_0}$ et $s'_{pp} - s_{pp} = t_0 = s_{pq} = s_{qq} - s'_{qq}$.
   Comme $1 - t_0^2 \geq 0$, les quantités $s_{pp} - s'_{pp}$, $s'_{qq} - s_{qq}$ et $s_{qq} - s_{pp}$ sont de même signe, celui de $-t_0 s_{pq}$.

(b) Supposons par exemple ce signe positif. On a alors :

$$s'_{pp} \leq s_{pp} \leq s_{qq} \leq s'_{qq}$$

On peut appliquer le résultat de la question 5. et, si $1 \leq i \leq n$:

$$|s_{ii} - s'_{qq}| + |s_{ii} - s'_{pq}| - |s_{ii} - s_{pp}| - |s_{ii} - s_{qq}| \geq 0.$$

Même étude dans le deuxième cas.

13.

$$R = \sum_{i,j=1}^{n} |s_{jj} - s_{ii}| \quad \text{et} \quad R' = \sum_{i,j=1}^{n} |s'_{jj} - s'_{ii}|.$$

Si $i \neq p, q$ $s'_{ii} = s_{ii}$. Par suite :

$$R' - R = \sum_{i=1}^{n} |s'_{ii} - s'_{pp}| - \sum_{i=1}^{n} |s_{ii} - s_{pp}| + \sum_{i=1}^{n} |s'_{ii} - s'_{qq}| - \sum_{i=1}^{n} |s_{ii} - s_{qq}|$$

$$R' - R = \sum_{i=1}^{n} \left(|s'_{ii} - s'_{pp}| - |s_{ii} - s_{pp}| + |s'_{ii} - s'_{qq}| - |s_{ii} - s_{qq}| \right)$$

D'après la question précédente tous ces termes sont positifs et on minore en ne conservant que les termes où $i = p$ ou q. On obtient :
$R' - R \geq A + B$ avec $A = B = |s'_{qq} - s'_{pp}| - |s_{qq} - s_{pp}| + |s'_{qq} - s'_{qq}| - |s_{qq} - s_{qq}|$.
$A = |s'_{qq} - s'_{pp}| - |s_{qq} - s_{pp}|$. Mais $s'_{qq} - s'_{pp} = (s'_{qq} - s_{qq}) + (s_{qq} - s_{pp}) + (s_{pp} - s'_{pp})$.
D'après la question 12.a ces trois réels sont de même signe et donc :

$$|s'_{qq} - s'_{pp}| = |s'_{qq} - s_{qq}| + |s_{qq} - s_{pp}| + |s_{pp} - s'_{pp}|$$

$$A = |s'_{qq} - s_{qq}| + |s_{pp} - s'_{pp}|$$

On a donc bien :

$$R' - R \geq 2 \left(|s'_{qq} - s_{qq}| + |s'_{pp} - s_{pp}| \right) = 2 \sum_{i=1}^{n} |s'_{ii} - s_{ii}|.$$

3 Algorithme de Jacobi incomplet

14. Soit m fixé. En appliquant le résultat de la question 13. à $S = \Sigma^{(m)}$ et $S' = \Sigma^{(m+1)}$ on a directement :

$$R' - R = R_{m+1} - R_m \geq 2 \sum_{i=1}^{n} |\sigma_{ii}^{(m+1)} - \sigma_{ii}^{(m)}| = 2\varepsilon_m$$

La série $\sum (R_{m+1} - R_m)$ est une série télescopique de somme partielle
$S_p = \sum_{k=0}^{p} (R_{k+1} - R_k) = R_{p+1} - R_0$. La suite (R_m) est croissante. Il reste à montrer qu'elle est majorée. Notons $||\Sigma^{(m)}||_\infty = \max_{i,j} |\sigma_{ij}^{(m)}|$.

$$0 \leq R_m \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(|\sigma_{jj}^{(m)}| + |\sigma_{jj}^{(m)}| \right) \leq 2n^2 ||\Sigma^{(m)}||_\infty$$

Comme toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbf{M}_n$, il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall M \in \mathbf{M}_n, ||M||_\infty \leq K||M||$$

Par suite, $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq R_m \leq 2n^2K||\Sigma^{(m)}||$.
Or on a vu dans la construction de S' à partir de S que $||S|| = ||S'||$. Donc pour tout m, $||\Sigma^{m+1)}|| = ||\Sigma^{(m)}|| = ... = ||\Sigma^{(0)}|| = ||\Sigma||$. On a donc :

$$\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq R_m \leq 2n^2K||\Sigma||$$

La suite (R_m) est croissante et majorée. Elle converge. La série $\sum(R_{m+1} - R_m)$ est convergente. Par majoration la série $\sum 2\varepsilon_m$ est convergente.

$$R_m = \sum_{i,j=1}^{n} |\sigma_{jj}^{(m)} - \sigma_{ii}^{(m)}|, \qquad \varepsilon_m = \sum_{i=1}^{n} |\sigma_{ii}^{(m+1)} - \sigma_{ii}^{(m)}|$$

15. $\Sigma^{(m)} = D^{(m)} + E^{(m)}$. Soit k un entier fixé de $\{1, ..., n\}$. On a :

$$0 \leq |\sigma_{kk}^{(m+1)} - \sigma_{kk}^{(m)}| \leq 2\varepsilon_m.$$

La série $\sum |\sigma_{kk}^{(m+1)} - \sigma_{kk}^{(m)}|$ est convergente par majoration. La série $\sum \left(\sigma_{kk}^{(m+1)} - \sigma_{kk}^{(m)}\right)$ est une série de réls absolument convergente, donc convergente. Comme c'est une série télescopique, la suite $(\sigma_{kk}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente. Ceci est vrai pour chaque k. La suite $(D^{(m)})_{m\in N}$ a donc une limite qui est une matrice diagonale.

4 Convergence et polynôme caractéristique

16. La relation de similitude de matrice est transitive. C'est-à -dire, si A et B sont semblables, B et C semblables, alors A et C sont semblables. En effet on peut alors écrire avec des matrices inversibles :

$$B = P^{-1}AP, \quad C = Q^{-1}BQ \Rightarrow C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

Par hypothèse les matrices $A^{(m)}$ sont donc toutes semblables entre elles et donc semblables à $A^{(0)}$.

17. Les coefficients de P_m sont obtenus comme somme et produit des coefficients de $A^{(m)}$ par l'intermédiaire d'une fonction continue. Par passage à la limite, on obtient les coefficients du polynôme caractéristique de la limite.
Comme toutes la matrices sont semblables, elles ont toutes le même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique de D est égal à celui de $A^{(0)}$.

18. Notons $a_1, ..., a_n$ les éléments diagonaux de D. Le polynôme caractéristique de D est $\chi_D(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \lambda)$. C'est celui de $A^{(0)}$. Les éléments diagonaux de D sont donc les valeurs propres de $A^{(0)}$, la multiplicité correspond au nombre de fois où l'on rencontre le même élément diagonal.

5 Algorithme de Jacobi : version optimale

19. On peut appliquer à chaque étape les résultats de la question 10. Pour tout entier m, $||E^{(m+1)}|| \leq \rho||E^{(m)}||$. On a par récurrence immédiate :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ ||E^{(m)}|| \leq \rho^m ||E^{(0)}|| \quad \text{avec} \quad 0 \leq \rho < 1$$

On obtient $\lim\limits_{m \to +\infty} ||E^{(m)}|| = 0$. La suite $(E^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge donc vers la matrice nulle.
Comme, pour tout m, $\Sigma^{(m)} = D^{(m)} + E^{(m)}$, et compte-tenu du résultat de la question 15., la suite $(\Sigma^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers D.

20. D'après la question 17., les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de $\Sigma = \Sigma^{(0)}$.

21. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $M > m$, M entier. En appliquant l'inégalité de la question 10.b :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ ||D^{(k+1)} - D^{(k)}|| \leq ||E^{(k)}|| \leq \rho^k ||E^{(0)}||$$

En sommant les inégalités on a :

$$||D^{(M+1)} - D^{(m)}|| = \left|\left|\sum_{k=m}^{M} (D^{(k+1)} - D^{(k)})\right|\right| \leq \sum_{k=m}^{M} ||D^{(k+1)} - D^{(k)}|| \leq \sum_{k=m}^{M} \rho^k ||E^{(0)}||$$

$$||D^{(M+1)} - D^{(m)}|| \leq \rho^m \frac{1-\rho^{M-m+1}}{1-\rho} ||E^{(0)}||$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, comme $0 \leq \rho < 1$:

$$||D - D^{(m)}|| \leq \frac{\rho^m}{1-\rho} ||E^{(0)}||.$$

22. La convergence des $d_{ii}^{(m)}$ vers les valeurs propres de Σ est rapide en première analyse car l'écart est dominé par ρ^m. Cependant dès que n est assez grand, ρ est très proche de 1. De plus cette méthode nécessite le choix optimal du coefficient d'indices (p_m, q_m). Cela implique une recherche de maximum dans un tableau qui est à prendre en compte dans la vitesse d'exécution de l'algorithme.

⋆ ⋆
⋆

N.B. : version TEX reconstituée à partir de la version PDF du sujet original. Avril 2013. HD