ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2014 FILIÈRE PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (XEULC)

⋆ ⋆ ⋆

I. INTÉGRALES À PHASE RÉLLE.

1. Soit $d > 0$ et $g \in \mathcal{C}^0([0,d])$ telle que $g(0) \neq 0$.
   (a) Soit $t > 0$ fixé. Effectuons le changement de variable $u = tx$. La fonction $u : x \mapsto tx$ définit un C^1-difféomorphisme de $[0,d]$ dans $[0,td]$. On a :

$$\int_0^d e^{-tx} g(x)dx = \int_0^{td} e^{-u} g\left(\frac{u}{t}\right)\frac{1}{t}du$$

Notons g_t la fonction définie par :

$$\text{si } u \in [0,td],\ g_t(u) = g\left(\frac{u}{t}\right), \quad \text{et } g_t(u) = 0 \quad \text{si } u > td$$

g_t est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et par construction :

$$\int_0^d e^{-tx} g(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-u} g_t(u)du = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x)dx.$$

Déterminons la limite quand t tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x)dx$. Pour cela utilisons la caractérisation séquentielle de la limite. Soit donc $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$. Notons pour tout n de $\mathbb{N}$, $h_n : t \mapsto e^{-x} g_{t_n}(x)$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, h_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Par définition de fonctions g_t on a, comme g est continue donc bornée sur le segment $[0,d]$: $\forall x \in [0, dt_n]$, $|h_n(x)| \leq e^{-x}||g||_\infty$ et $\forall x > dt_n$, $|h_n(x)| \leq 0$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ |h_n(x)| \leq ||g||_\infty e^{-x}$$

  La fonction $x \mapsto e^{-x} \times ||g||_\infty$ est continue, positive, intégrable sur $[0,+\infty[$ (ce qui assure l'intégrabilité des h_n)
- Pour tout $x \geq 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $0 \leq x \leq dt_n$ et donc pour $n \geq N$, $h_n(x) = e^{-x} g\left(\dfrac{x}{t_n}\right)$. Par suite, comme $\lim t_n = +\infty$ et que g est continue en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = e^{-x}g(0)$ La suite (h_n) converge simplement sur $(0,+\infty[$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x}g(0)$, fonction qui est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées et on peut donc affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}g_{t_n}(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}g(0)dx = g(0)\times 1$$

La caractérisation séquentielle de la limite en $+\infty$ permet d'affirmer que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}g_t(x)dx = g(0)$$

Comme $g(0)\neq 0$, on a en reprenant les égalités précédentes :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_0^d e^{-tx}g(x)dx}{(1/t)g(0)} = 1$$

Finalement :

$$\int_0^d e^{-tx}g(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}.$$

(b) Pour $t>0$, effectuons le changement de variable $u = x\sqrt{t}$. Comme dans la question précédente :

$$\int_0^d e^{-tx^2}g(x)dx = \int_0^{d\sqrt{t}} e^{-u^2}g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)du$$

La même technique que celle utilisée en question 1)a) montre que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{d\sqrt{t}} e^{-u^2}g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)du = g(0)\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{g(0)\sqrt{\pi}}{2}$$

On obtient donc :

$$\int_0^d e^{-tx^2}g(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{g(0)}{\sqrt{t}}.$$

Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b]$ telle que $f(a)\neq 0$ et $\varphi\in\mathcal{C}^1([a,b])$. Pour tout paramètre $t\in\mathbb{R}$, on note

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)dx.$$

2. On suppose que $\varphi'(x)>0$ pour tout $x\in[a,b]$.

(a) Soit $\Phi : x\mapsto \varphi(x)-\varphi(a)$. Φ est de classe C^1 sur $[a,b]$ de dérivée $x\mapsto\varphi'(x)>0$. Φ est strictement croissante et continue sur $[a,b]$. Elle réalise une bijection de $[a,b]$ dans $[\Phi(a),\Phi(b)]$ avec $\Phi(a)=\varphi(a)-\varphi(a)=0$ et $\Phi(b)>\Phi(a)=0$. Notons $\beta=\Phi(b)>0$. Comme de plus pour tout x de $[a,b]$, $\Phi'(x)\neq 0$, Φ est un C^1 difféomorphisme de $[a,b]$ dans $[0,\beta]$.

(b) Le changement de variable $u=\Phi(x)$ est un changement de variable admissible et si h est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$

$$\int_a^b h(x)dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} h(\Phi^{-1}(u))\left(\frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(u))}\right)du = \int_0^\beta h(\Phi^{-1}(u))\left(\frac{1}{\varphi'(\Phi^{-1}(u))}\right)du$$

En particulier :

$$F(t) = \int_0^\beta e^{-t(u+\varphi(a))} f(\Phi^{-1}(u)) \left(\frac{1}{\varphi'(\Phi^{-1}(u))} \right) du$$

On peut alors utiliser le résultat de la question 1)a) avec $g : u \mapsto f(\Phi^{-1}(u)) \left(\frac{1}{\varphi'(\Phi^{-1}(u))} \right)$ et

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t\varphi(a)} \frac{g(0)}{t} = \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\varphi'(a)t} \quad \text{car} \quad \Phi^{-1}(0) = a$$

3. On suppose maintenant que $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b])$. $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$ et $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b]$.
   (a) Soit $\psi : x \mapsto \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$. Comme φ est croissante sur $[a,b]$, pour tout $x \in (a,b]$, $\varphi(x) \geq \varphi(a)$ et ψ est bien définie $[a,b]$. C'est clairement une bijection de $[a,b]$ dans $[0, \Psi(b)]$ avec $\Psi(b) = \sqrt{\varphi(b) - \varphi(a)} = \beta > 0$. La bijection réciproque est $y \mapsto \Phi^{-1}(y^2)$ où Φ est la fonction définie dans la question précédente.
   ψ est continue sur $[a,b]$ et ψ^{-1} sur $(0,\beta]$.
   ψ est de classe C^1 sur $]a,b]$ avec $\forall x \in]a,b]$:

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}}$$

   φ est de classe C^2 on peut appliquer la formule de Taylor à φ et φ' en a.

$$\varphi(x) \underset{a}{=} \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(a) + o((x-a)^2)$$

   Comme $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, $\varphi(x) - \varphi(a) \underset{a}{\sim} \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(a)$ De même :

$$\varphi'(x) \underset{a}{=} \varphi'(a) + (x-a)\varphi''(a) + o((x-a)) \quad \text{et} \quad \varphi'(x) \underset{a}{\sim} (x-a)\varphi''(a)$$

   Il vient pour $x > a$:

$$\psi'(x) \underset{a}{\sim} \frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{(x-a)^2\varphi''(a)/2}} = \frac{\sqrt{\varphi''(a)}}{\sqrt{2}}$$

   On dispose du théorème de prolongement du caractère dérivable d'une fonction : si f est continue sur $[a,b]$ à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si f' a une limite en a , alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$.
   On peut appliquer ce théorème à ψ. Cette fonction est de classe C^1 sur $[a,b]$ et

$$\psi'(a) == \frac{\sqrt{\varphi''(a)}}{\sqrt{2}}$$

   (b) On a vu déjà que ψ réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle de la forme $[0,\beta]$. De plus ψ' ne s'annule pas sur $[a,b]$. On a donc un C^1-difféomorphisme de $[a,b]$ dans $[0,\beta]$. On a un changement de variable admissible.

(c) Ce changement de variable $u = \psi(x)$ permet d'écrire :

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^\beta e^{-tu^2} f(\psi^{-1}(u)) \left(\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(u))} \right) du$$

D'après le résultat de la question 1)b) :

$$F(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} f(a) \frac{1}{\psi'(a)}$$

car $\psi^{-1}(0) = a$. En remplaçant on obtient :

$$F(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

On admettra que la résultat se généralise de la façon suivante :

Résultat 1. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$. On suppose qu'il existe un unique $c > 0$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On suppose de plus que $f(c) \neq 0$ et $\varphi''(c) > 0$. On suppose finalement que $\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(x)} |f(x)| dx$ converge. Alors,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}} \frac{e^{-t\varphi(c)} f(c)}{\sqrt{t}}$$

4. On montre facilement la convergence pour tout n $n \in \mathbb{N}^*$, de $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$.

(a) Une intégration par parties entre 0 et $X > 0$ donne :

$$\int_0^X e^{-x} x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n} e^{-x} \right]_0^X - \int_0^X \frac{x^n}{n} (-e^{-x}) dx = \frac{X^n}{ne^X} + \frac{1}{n} \int_0^X e^{-x} x^n dx$$

En faisant tendre X vers $+\infty$ on a :

$$\Gamma(n-1) = \frac{1}{n} \Gamma(n)$$

Comme $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \Gamma(n) = (n-1)!$$

(b) Avec le changement de variable $x = nu$:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-nu} (nu)^n \, ndu$$

$$n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-n(x - \ln x)} dx \quad \text{car} \quad x^n = e^{n \ln x}$$

Appliquons le résultat énoncé avec $\varphi : x \mapsto x - \ln x$ et $f : x_mapsto1$. φ est C^2 sur $]0, +\infty[$ de dérivée $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ qui ne s'annule que pour $x = 1$. $\varphi''(1) = 1/1^2 = 1$.
On obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(x-\ln x)} \times 1dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(1)}} \frac{e^{-t\varphi(1)}}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{2\pi}e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

Par composition :

$$\frac{n!}{n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}e^{-n}}{\sqrt{n}}$$

On retrouve l'équivalent donné par la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}$$

II. FONCTIONS PÉRIODIQUES.

5. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction périodique de période 2π, de classe C^1.
   (a)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\pi c_n(\phi') = \int_0^{2\pi} e^{int}\phi'(t)dt = \left[e^{-int}\phi(t)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-in)e^{-int}\phi(t)dt$$

$$2\pi c_n(\phi') = 0 + (in)2\pi c_n(\phi) \quad \text{car} \quad t \mapsto e^{-int}\phi(t) \quad \text{est } 2\pi\text{-périodique}$$

Par suite : pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(\phi) = \dfrac{c_n(\phi')}{in}$.

   (b) Comme ϕ' est continue, 2π périodique, la formule de Parseval appliquée à ϕ' donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi'(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\Phi')|^2$$

Il en résulte que les deux séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(\phi')|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |c_{-n}(\phi')|^2$ sont convergentes.
Or pour $n \neq 0$:

$$|c_n(\phi)| = \frac{|c_n(\phi')|}{|n|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(\phi')|^2\right)$$

La majoration assure la convergence des deux séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(\phi)|$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |c_{-n}(\phi)|$.
La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)|$ converge.

(c) Comme ϕ est continue de classe C^1 (le résultat subsiste si ϕ est de classe C^1 par morceaux) sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers ϕ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\phi)e^{inx}$$

Pour tout entier N :

$$\left|\sum_{k=-N}^{N} c_k(x)e^{ikx}\right| \leq \sum_{k=-N}^{N} |c_k(\phi)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\phi(x)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)| \quad \text{et donc} \quad ||\phi||_\infty \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)|.$$

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, périodique de période 2π, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Pour tout paramètre $\varepsilon > 0$ on pose

$$J_\varepsilon = \int_a^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)dx.$$

6 On suppose de plus que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f est à support compact dans $[a,b]$.

(a)

$$J_\varepsilon - c_0(\psi)\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \left(\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - c_0(\psi)\right) f(x)dx$$

Or pour tout x :

$$\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = c_0(\psi) + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n(\psi)e^{inx/\varepsilon}$$

$$J_\varepsilon - c_0(\psi)\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n(\psi)e^{-inx/\varepsilon}\right) f(x)dx$$

Soit $g_n : x \mapsto e^{-inx/\varepsilon}f(x)c_n(\psi)$; $||g_n||_\infty = |c_n(\psi)| \times ||f||_\infty$. On a convergence normale de cette série de fonctions continues sur $[a,b]$ et :

$$J_\varepsilon - c_0(\psi)\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \int_a^b c_n(\psi)e^{-inx/\varepsilon}f(x)dx$$

En intégrant par parties et comme $f(a) = f(b) = 0$:

$$\int_a^b e^{-inx/\varepsilon}f(x)dx = 0 - \int_a^b \frac{\varepsilon}{-in}e^{-inx/\varepsilon}f'(x)dx$$

$$\left|\int_a^b c_n(\psi)e^{-inx/\varepsilon}f(x)dx\right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon|c_n(\psi)|}{|n|}|f'(x)|dx \leq \varepsilon(b-a)\frac{|c_n(\psi)|}{n}||f'||_\infty$$

Pour tout n non nul, $\dfrac{|c_n(\psi)|}{|n|} \leq |c_n(\psi|$ et comme $\sum |c_n(\psi)|$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(\psi)|}{|n|}$ est également convergente.
On obtient pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| J_\varepsilon - c_0(\psi)\left(\int_a^b f(x)dx\right)\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_a^b c_n(\psi)e^{-inx/\varepsilon}f(x)dx\right| \leq \varepsilon(b-a)||f'||_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{|c_n(\psi)|}{|n|}$$

(b) La quantité majorante tend vers 0.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon = c_0(\psi)\left(\int_a^b f(x)dx\right)$$

7. On suppose maintenant seulement que $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est périodique de période 2π, et $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. $\varepsilon > 0$. $N_\varepsilon = E\left(\dfrac{b-a}{2\pi\varepsilon}\right)$.

$$x_k^\varepsilon = a + 2k\pi\varepsilon, \quad \text{pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq N_\varepsilon$$

(a) Par définition de la partie entière : $N_\varepsilon \leq \dfrac{b-a}{2\pi\varepsilon} < N_\varepsilon + 1$

$$a + 2\pi\varepsilon\left(\frac{b-a}{2\pi\varepsilon} - 1\right) < x_{N_\varepsilon}^\varepsilon = a + 2N_\varepsilon\pi\varepsilon \leq a + 2\pi\varepsilon\frac{b-a}{2\pi\varepsilon} = b$$

$$b - 2\pi\varepsilon < x_{N_\varepsilon}^\varepsilon \leq b \quad \text{et donc} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} x_{N_\varepsilon}^\varepsilon = b.$$

(b) f est bornée sur $[a,b]$, ψ est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\left|\int_{x_{N_\varepsilon}}^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)dx\right| \leq (b - x_{N_\varepsilon})||f||_\infty \times ||\psi||_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_{N_\varepsilon}}^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)dx = 0.$$

(c) Soit k entier tel que $0 \leq k \leq N_\varepsilon - 1$ et $x \in [x_k^\varepsilon, x_{k+1}^\varepsilon]$. L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|f(x) - f(x_k^\varepsilon)| \leq |x - x_k^\varepsilon| \sup_{[a,b]} |f'| \leq 2\pi\varepsilon ||f'||_\infty$$

(d) Pour chaque k :

$$\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x_k^\varepsilon)dx = f(x_k^\varepsilon)\int_{x_k^\varepsilon/\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon/\varepsilon} \psi(u)\,\varepsilon du$$

Comme ψ est 2π-périodique et que $x_{k+1}^\varepsilon/\varepsilon - x_k^\varepsilon/\varepsilon = 2\pi$

$$\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x_k^\varepsilon)dx = \varepsilon f(x_k^\varepsilon)\int_0^{2\pi}\psi(u)du$$

Par sommation :

$$\sum_{k=0}^{N_\varepsilon - 1}\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x_k^\varepsilon)dx = \left(\int_0^{2\pi}\psi(y)dy\right)\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} f(x_k^\varepsilon)\right)$$

(e) En utilisant la majoration de la question c) et le changement de variable déjà utilisé :

$$\left|\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(f(x)-f(x_k^\varepsilon))dx\right| \leq \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon}\left|\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(f(x)-f(x_k^\varepsilon))\right|dx$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(f(x)-f(x_k^\varepsilon))dx\right| \leq 2\pi\varepsilon N_\varepsilon||f'||_\infty\varepsilon\int_0^{2\pi}|\psi(u)|du$$

Comme $2\pi\varepsilon N_\varepsilon \leq b-a$, on a bien :

$$\left|\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(f(x)-f(x_k^\varepsilon))dx\right| \leq \varepsilon(b-a)||f'||_\infty\left(\int_0^{2\pi}|\psi(y)|dy\right)$$

(f)

$$J_\varepsilon = \int_a^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(x)dx = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(x)dx + \int_{x_{N_\varepsilon}}^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(x)dx$$

D'après la question b), la deuxième quantité majorante tend vers 0.
D'après la question e) et l'égalité de d) la première quantité majorante peut s'écrire
$\displaystyle\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}\int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(x_k^\varepsilon)dx+o(1) = \left(\int_0^{2\pi}\psi(y)dy\right)\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}f(x_k^\varepsilon)\right)+o(1)$. Mais on a fait apparaître une quasi-somme de Riemann à pas constant et on montre que, comme $x_{k+1}^\varepsilon - x_k^\varepsilon = 2\pi\varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(2\pi\varepsilon\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}f(x_k^\varepsilon)) = \int_a^b f(t)dt$$

Par suite : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(y)dy\right)\left(\int_a^b f(x)dx\right)$.

8. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} u''(t)+u(t) = g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \\ u(0)=\alpha,\ u'(0)=0. \end{cases} \qquad (1)$$

(a) On a une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme $(E) :\ y''+ay'+by = c$ avec a, b, c des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy permet d'affirmer que $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution y de (E) définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$.

D'où l'existence et l'unicité d'une solution de (1) définie pour $t \in \mathbb{R}$.

(b) Une base de solutions de l'équation homogène $u''+u = 0$ est $(\cos, \sin)$.
Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple de fonctions $(\lambda,\mu) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda\cos+\mu\sin = u \\ -\lambda\sin+\mu\cos = u' \end{cases}$$

On a donc $\lambda' \cos + \mu' \sin = 0$.
Un calcul simple donne $u'' + u = -\lambda' \sin + \mu' \cos$.
Notons $g_\varepsilon : t \mapsto g(t/\varepsilon)$. u est solution de (1) si et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda' \cos + \mu' \sin = 0 \\ -\lambda' \sin + \mu' \cos = g_\varepsilon \\ u(0) = \alpha,\ u'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = -g_\varepsilon \sin \\ \mu' = g_\varepsilon \cos \\ u(0) = \alpha,\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} \lambda(t) = \int_0^t (-\sin(u) g_\varepsilon(u))\, du + k_1 \\ \mu(t) = \int_0^t (\cos(u) g_\varepsilon(u))\, du + k_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(0) = \alpha \\ u'(0) = 0 \end{cases}.$$

Mais $u(0) = \lambda(0) = \alpha$ et $u'(0) = \mu(0) = 0$
La solution u_ε est donc définie par :

$$u_\varepsilon : t \mapsto \alpha \cos t + \cos t \int_0^t (-\sin(u) g_\varepsilon(u))\, du + \sin t \int_0^t (\cos(u) g_\varepsilon(u))\, du$$

(c) On suppose que g est 2π-périodique . L'expression de u_ε fait apparaître deux expressions du type J_ε comme dans la question précédente. Les hypothèses de cette question sont vérifiées.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^t (-\sin(u) g_\varepsilon(u))\, du = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) dy \right) \left(\int_0^t (-\sin(x)) dx \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^t (\cos(u) g_\varepsilon(u))\, du = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) dy \right) \left(\int_0^t (\cos(x)) dx \right)$$

On obtient donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, la limite quand $\varepsilon \to 0^+$ de $u_\varepsilon(t)$ avec :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} u_\varepsilon(t) = \cos t \left(\alpha - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) dy \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) dy$$

III. INTÉGRALES OSCILLANTES.

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^∞.

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx. \quad \lambda > 0$$

9. On suppose dans cette question que $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (a) $L : \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{C})$; $M : \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{C})$
   pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{C})$, tout $x \in [a,b]$,

$$Lg(x) = \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} g'(x), \quad Mg(x) = -\left(\frac{g}{i\varphi'} \right)'(x).$$

   i. Les fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{C})$ telles que $Lg = g$ sont les solutions de l'équation différentielle

$$y' - i\lambda\varphi'(x) y = 0.$$

   Ce sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto k e^{i\lambda\varphi(x)}$, $k \in \mathbb{C}$.

ii. Soit $g, h \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{C})$. On suppose que h est à support compact dans $]a,b[$. On a donc $h(a) = h(b) = 0$. Par une intégration par parties :

$$\int_a^b h(x)Lg(x)dx = \int_a^b \frac{h(x)}{i\lambda\varphi'(x)}g'(x)dx = \left[\frac{h(x)}{i\lambda\varphi'(x)}g(x)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g(x)Mh(x)dx.$$

$$\int_a^b h(x)Lg(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_a^b g(x)Mh(x)dx.$$

(b) Soit f à support compact dans $]a,b[$. La fonction $g : x \mapsto e^{i\lambda\varphi(x)}$ vérifie $Lg = g$. On peut écrire :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)Lg(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_a^b g(x)Mf(x)dx$$

Comme f est de classe C^∞ à support compact dans $]a,b[$, toutes ses dérivées sont à support compact dans $]a,b[$ et de même Mf.

On peut donc itérer la formule obtenue et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^N}\int_a^b g(x)M^N f(x)dx$$

On obtient la majoration :

$$|I(\lambda)| \leq \gamma_N \lambda^{-N} \quad \text{avec} \quad \gamma_N = \left|\int_a^b g(x)M^N f(x)dx\right|.$$

10. (a) On suppose que $|\varphi'(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a,b]$ et φ' est monotone sur $[a,b]$.

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx = \int_a^b i\lambda\varphi'(x)e^{i\lambda\varphi(x)}\frac{1}{i\lambda\varphi'(x)}dx = \left[e^{i\lambda\varphi(x)}\frac{1}{i\lambda\varphi'(x)}\right]_a^b + J.$$

avec $J = \dfrac{1}{i\lambda}\displaystyle\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\left(\frac{-\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2}\right)dx$

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx = e^{i\lambda\varphi(b)}\frac{1}{i\lambda\varphi'(b)} - e^{i\lambda\varphi(a)}\frac{1}{i\lambda\varphi'(a)} + J$$

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq \frac{1}{\lambda|\varphi'(b)|} + \frac{1}{\lambda|\varphi'(a)|} + |J| \leq \frac{2}{\lambda} + |J|$$

Comme φ' est monotone, φ'' est de signe constant sur $[a,b]$. Supposons par exemple $\varphi'' \geq 0$

$$|J| \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b \frac{|-\varphi''(x)|}{\varphi'^2(x)}dx = \frac{1}{\lambda}\int_a^b \frac{-\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)}dx = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\varphi'(x)}\right]_a^b$$

$$|J| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{|\varphi'(b)|} + \frac{1}{|\varphi'(a)|}\right) \leq \frac{2}{\lambda}$$

Même méthode si $\varphi'' \leq 0$. En regroupant :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq c_1\lambda^{-1} \quad \text{avec} \quad c_1 = 4$$

(b) Soit $\delta > 0$. On suppose que $|\varphi'(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [a, b]$ et que φ' est monotone sur $[a, b]$.

On applique le résultat précédent à $\varphi_1 = \varphi/\delta$ et $\lambda_1 = \delta\lambda$. On a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1(\lambda\delta)^{-1}.$$

11. On suppose ici que $|\varphi''(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

(a) Comme φ'' est continue et ne s'annule pas sur $[a, b]$, elle reste de signe constant sur cet intervalle. φ' est strictement monotone sur $[a, b]$. Elle ne peut s'annuler qu'au plus une fois sur $[a, b]$.

On a différents cas :

- φ' strictement croissante avec $\varphi'(a)\varphi'(b) > 0$.
  Si $\varphi' > 0$, $c = a$ est l'unique élément de $[a, b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)[$.
  Si $\varphi' < 0$, $c = b$ est l'unique élément de $[a, b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)[$.
- φ' strictement décroissante avec $\varphi'(a)\varphi'(b) > 0$.
  Si $\varphi' > 0$, $c = b$ est l'unique élément de $[a, b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)[$.
  Si $\varphi' < 0$, $c = a$ est l'unique élément de $[a, b]$ tel que $|\varphi'(c)| = \inf\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)[$.
- Si $\varphi'(a)\varphi'(b) \leq 0$, φ' s'annule en un point c unique dans $[a, b]$ et $|\varphi'(c)| = 0 = \inf\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)[$.

(b) Soit $x \in [a, b]$. Comme φ' est de classe C^1 sur $[x, c]$, il existe $d \in]x, c[$ tel que $\varphi'(x) - \varphi'(c) = (x - c)\varphi''(d)$

- Si $\varphi'(c) = 0$, comme $|\varphi''(d)| \geq 1$ on a $|\varphi'(x)| \geq |x - c|$.
- Si par exemple $\varphi'' \geq 0$ et $c = a$, $\varphi'(a) \geq 0$ et $\varphi'(x) \geq \varphi'(a)$.
  $|\varphi'(x)| = \varphi'(x) \geq \varphi'(x) - \varphi'(a) = (x - a)\varphi''(d) \geq (x - a) = |x - c|$
- Étude identique dans tous les autres cas.

On a toujours $|\varphi'(x)| \geq |x - c|$.

(c) Si la phase n'est pas stationnaire on est ramené au cas de la question 10).

Sinon soit $\delta > 0$ avec $2\delta < b - a$.

On peut dans le pire des cas (celui où $c \in]a, b[$) découper [a,b] en trois segments, $[a, c - \delta], [c - \delta, c + \delta], [c + \delta, b]$. Sur les deux segments extrêmes φ n'est pas stationnaire et on peut appliquer l'inégalité de 11). avec sur chaque segment $|\varphi'(x)| \geq |x - c| \geq \delta$.

On a donc

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq \left| \int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| + \left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| + \left| \int_{c+\delta}^{b} e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right|$$

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c(\lambda\delta)^{-1} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} 1dx + c(\lambda\delta)^{-1} \leq 2c(\lambda\delta)^{-1} + 2\delta$$

Si $2\delta \geq b-a$ on a $\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq \int_a^b 1dx = b-a \leq 2\delta$.
On a donc pour tout $\delta > 0$,

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq 2c_1(\lambda\delta)^{-1} + 2\delta.$$

(d) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$, $F : \delta \mapsto 2c_1(\lambda\delta)^{-1} + 2\delta$. F est C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $F'(\delta) = \dfrac{2c_1}{\lambda}\left(\dfrac{-1}{\delta^2}\right) + 2$.

F admet un minimum atteint en $\delta = \sqrt{\dfrac{c_1}{\lambda}}$. En prenant dans la majoration de la question c) cette valeur de δ on obtient :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \leq 2c_1\,(\lambda\delta)^{-1/2} + 2\sqrt{\frac{c_1}{\lambda}} = c_2\lambda^{-1/2}$$

(e) Pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = f(b) + \int_b^x f'(t)dt$. On a donc :

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}f(x)dx = \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}f(b)dx + \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\left(\int_b^x f'(t)dt\right)dx$$

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}f(b)dx\right| = \left|f(b)\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| = |f(b)| \times \left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right|$$

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}f(b)dx\right| \leq |f(b)|c_2\lambda^{-1/2}$$

D'autre part :

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\left(\int_x^b f'(t)dt\right)dx = \iint_\Delta e^{i\lambda\varphi(x)}f'(t)dtdx$$

avec $\Delta = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b, x \leq t \leq b\}$. Mais on a également :

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\left(\int_x^b f'(t)dt\right)dx = \int_{t=a}^{t=b}\int_{x=a}^{x=t} e^{i\lambda\varphi(x)}dxf'(t)dt$$

Par suite :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\left(\int_x^b f'(t)dt\right)dx\right| \leq \int_a^b \left|\int_a^t e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right| \times |f'(t)|dt \leq c_2\lambda^{-1/2}\int_a^b |f'(t)|dt$$

En regroupant les majorants des deux intgrales :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}f(x)dx\right| \leq c_2\lambda^{-1/2}\left(|f(b)| + \int_a^b |f'(x)|dx\right).$$

⋆ ⋆
⋆

N.B. : Corrigé rédigé pour l'UPS par Hugues Demongeot. Merci de signaler toute erreur ou omission.
Avril 2014. HD