X-ENS-ESPCI 2015 Maths

CONCOURS D'ADMISSION 2015 FILIÈRE PC

Ceci est une proposition de corrigé établi pour l'UPS. HD

Première partie

1a. On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j égal à 1. Les matrices $(E_{i,i})_{i=1..n}$ et $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\le i<j\le n}$ forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On montre que cette famille est libre. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n+\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Toute matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le spectre d'une telle matrice A est l'ensemble des éléments diagonaux de D. $s^{\downarrow}(A)$ est bien défini.

1b. Si $n=1$, l'application $s^{\downarrow}$ est l'identité et elle est linéaire. Pour $n\ge 2$ le résultat est faux. Prenons D matrice diagonale, d'éléments diagonaux $1,0,\dots,0$. On a $s^{\downarrow}(D)=(1,0,\dots,0)$. Le spectre de $-D$ est $\{-1,0,\dots,0\}$ et $s^{\downarrow}(-D)=(0,\dots,0,-1)\neq -s^{\downarrow}(D)$. L'application $s^{\downarrow}$ n'est pas linéaire.

1c. Si $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et si $s^{\downarrow}(M)=(m_1,\dots,m_n)$, les valeurs propres de $-M$ sont $\{-m_1,\dots,-m_n\}$ et, en les réordonnant, $s^{\downarrow}(-M)=(-m_n,\dots,-m_1)$.

1d. Soit $M=\begin{pmatrix}\lambda & h\\ h & \mu\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
On a : $\chi_A(t)=(t-\lambda)(t-\mu)-h^2=t^2-t(\lambda+\mu)+\lambda\mu-h^2$.
$\Delta=(\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu+4h^2=(\lambda-\mu)^2+4h^2\ge 0$. Deux racines

$$t_2=\frac{\lambda+\mu-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}\le t_1=\frac{\lambda+\mu+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}\qquad s^{\downarrow}(M)=(t_1,t_2).$$

2a. Soit $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et $m=s^{\downarrow}(M)$ son spectre ordonné. On sait qu'il existe une base **orthonormée** de vecteurs propres de M, $(v_1,\dots,v_n)$ associés aux valeurs propres $m_1,\dots,m_n$. Pour tout vecteur v_k, $1\le k\le n$, on a :
$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i{}^t v_i\right)v_k=\sum_{i=1}^n m_i v_i{}^t v_i v_k=\sum_{i=1}^n m_i v_i\langle v_i,v_k\rangle.$$
Comme la base des v_i est orthonormée :
$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i{}^t v_i\right)v_k=m_k v_k\langle v_k,v_k\rangle=m_k v_k=Mv_k.$$
Les deux applications linéaires $x\mapsto Mx$ et $x\mapsto\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i{}^t v_i\right)x$ coïncident sur une base.
Elles sont égales et ont même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par suite :

$$M=\sum_{i=1}^n m_i v_i{}^t v_i.$$

2b. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En le décomposant sur la base $(v_1, \ldots, v_n)$, $x = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$.

$Mx = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i v_i$ et, comme on est dans une base orthonormée, $\langle x, Mx \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$.
Comme $m_1 \geq \cdots \geq m_n$ et que $y_i^2 \geq 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, Mx \rangle \leq \sum_{i=1}^{n} m_1 y_i^2 = m_1 ||x||^2$$

En particulier $\forall x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1$, $\langle x, Mx \rangle \leq m_1$. En prenant $x = v_1$ qui est de norme 1, on a alors $\langle v_1, Mv_1 \rangle = m_1$. Par suite :

$$\sup_{||x||=1} \langle x, Mx \rangle = m_1$$

2c. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$. $\mathcal{V}_j = Vect(v_1, \ldots, v_j)$. Comme dans la question précédente, pour $x = \sum_{i=1}^{j} y_i v_i$ vecteur quelconque de de norme 1 de $\mathcal{V}_j$:

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_{i=1}^{j} m_i y_i^2 \geq m_j \left(\sum_{i=1}^{j} y_j^2 \right) = m_j ||x||^2 = m_j$$

En prenant $x = v_j$, vecteur de norme 1 de $\mathcal{V}_j$: $\langle x, Mx \rangle = m_j$.
On a donc : $\inf_{x \in \mathcal{V}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$.
De même avec $\mathcal{W}_j = Vect(v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$, en majorant les quantités étudiées :

$$\sup_{x \in \mathcal{W}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$$

3a. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) > n$. On sait que : $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V})$.
Si on avait $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{0\}$ on aurait $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) > n$, impossible pour un sev de $\mathbb{R}^n$. Donc $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.
3b. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $m = s^{\downarrow}(M)$. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension j. D'après la question précédente $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}_j$ contient au moins un vecteur non nul. Comme c'est un sev, il contient au moins un vecteur x_0 de norme 1.
Par définition, comme $x_0 \in \mathcal{V}$ et est de norme 1 : $\inf_{x \in \mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle \leq \langle x_0, Mx_0 \rangle$.
Mais $x_0 \in \mathcal{W}_j$ et est de norme 1, donc : $\langle x_0, Mx_0 \rangle \leq \sup_{x \in \mathcal{W}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$.
En réunissant les deux inégalités on a bien :

$$\inf_{x \in \mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle \leq m_j.$$

3c. Pour $\mathcal{V}$ sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension j, notons $\varphi(\mathcal{V}) = \inf_{x \in \mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle$.
On vient de voir que pour $\mathcal{V}$ quelconque, $\varphi(\mathcal{V}) \leq m_j$. On a donc par définition de la borne supérieure d'un ensemble non vide et majoré de réels : $\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n,\, \dim \mathcal{V} = j} \varphi(\mathcal{V}) \leq m_j$.
On a donc :

$$\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n,\, \dim \mathcal{V} = j} \inf_{x \in \mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle \leq m_j.$$

Mais pour $\mathcal{V} = \mathcal{V}_j$, la valeur m_j est atteinte et c'est la borne supérieure.

$$\sup_{\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n,\, \dim \mathcal{V}=j} \; \inf_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j.$$

Remarquons que le même raisonnement peut être fait avec $\mathcal{W}$ sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-j+1$ et on a alors :

$$\inf_{\mathcal{W}\subset\mathbb{R}^n,\, \dim \mathcal{W}=n-j+1} \; \sup_{x\in\mathcal{W},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j.$$

borne atteinte pour $\mathcal{W} = \mathcal{W}_j$.
Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant la matrice $-M$.
4. Soient m et l deux n-uplets de réels. On note

$$l \preccurlyeq m \quad \text{si et seulement si, pour tout entier } j, 1 \leq j \leq n,\ l_j \leq m_j.$$

4a. Soient $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $(0,\ldots,0) \preccurlyeq s^{\downarrow}(M-L)$. Les valeurs propres de $M-L$ sont donc toutes positives. Notons $s^{\downarrow}(M-L) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. On a vu dans les questions précédentes que, pour tout vecteur x de norme 1, $0 \leq \alpha_n \leq \langle x, (M-L)x\rangle x \leq \alpha_1$.
Soit $\mathcal{V}$ un sev quelconque de dimension j de $\mathbb{R}^n$:
Soit x un vecteur de norme 1 de $\mathcal{V}$: $\langle x, (M-L)x\rangle + \langle x, Lx\rangle = \langle x, Mx\rangle$.
$\forall x \in \mathcal{V}, ||x|| = 1 : 0 + \inf\limits_{y\in V, ||y||=1} \langle y, Ly\rangle \leq \langle x, (M-L)x\rangle + \langle x, Lx\rangle = \langle x, Mx\rangle$.
Par définition de la borne supérieure (plus grand des minorants) on a :
$\inf\limits_{y\in V, ||y||=1} \langle y, Ly\rangle \leq \inf\limits_{x\in V, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle \leq \sup\limits_{\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n,\, \dim \mathcal{V}=j} \; \inf\limits_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j$.
Et finalement :

$$l_j = \sup_{\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n,\, \dim \mathcal{V}=j} \; \inf_{y\in V, ||y||=1} \langle y, Ly\rangle \leq m_j$$

On a donc : $s^{\downarrow}(L) \preccurlyeq s^{\downarrow}(M)$.

4b. Soit α une valeur propre de $||M||I_n - M$ et x un vecteur propre associé de norme 1.
$(||M||I_n - M)x = \alpha x = ||M||x - Mx$.
D'où $Mx = (||M|| - \alpha)x$ et $||Mx|| = |\,||M|| - \alpha| \times ||x|| = |\,||M|| - \alpha|$.
Or, par définition de $||M|[|$, $||Mx|| \leq ||M||$. On a donc : $|\,||M|| - \alpha| \leq ||M||$.
De plus $||M|| - \alpha \leq |\,||M|| - \alpha| \leq ||M||$ donc $\alpha \geq 0$.
Toutes les valeurs propres sont positives et on a donc $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(0,\ldots,0) \preccurlyeq s^{\downarrow}(||M||I_n - M)$.

4c. Soit $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^{\downarrow}(M)$ et $l = s^{\downarrow}(L)$.
D'après la question précédente $(0,\ldots,0) \preccurlyeq s^{\downarrow}(||L-M||I_n - (L-M))$ et d'après la question **4a** $s^{\downarrow}(L-M) \preccurlyeq s^{\downarrow}(||L-M||I_n)$.
Si on note $s^{\downarrow}(L-M) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, comme $||L-M||I_n$ possède une seule valeur propre égale à $||L-M||$, on a $\alpha_n \leq \cdots \leq \alpha_1 \leq ||L-M||$.
Soit $j \in [[1,n]]$. On a $\dim(\mathcal{V}_j(L)) + \dim(\mathcal{W}_j(M)) = n+1 > n$. Il existe donc au moins un vecteur non nul (que l'on peut choisir de norme 1) dans l'intersection de ces deux espaces.
Soit x un tel vecteur. On sait que : $\langle x, Lx\rangle \geq l_j \quad \langle x, Mx\rangle \leq m_j$.
$l_j - m_j \leq \langle x, Lx\rangle - \langle x, Mx\rangle = \langle x, (L-M)x\rangle \leq \alpha_1 \leq ||L-M||$.
En échangeant le rôle de L et M on a aussi $l_j - m_j \leq ||M-L|| = ||L-M||$. Finalement : $\forall j \in [[1,n]]$, $|l_j - m_j| \leq ||L-M||$. Il en résulte que

$$\max_{1\leq j\leq n} |l_j - m_j| \leq ||L-M||$$

4d. Prenons dans $\mathbb{R}^n$ la norme 1 associée à la base canonique. On vient de montrer que

$$||l-m||_1 \leq ||L-M||$$

avec $l = s^{\downarrow}(L)$ et $m = s^{\downarrow}(M)$, L et M quelconques dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
La fonction $s^{\downarrow} : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne donc continue.

5. On note $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ dont toutes les valeurs propres sont simples.

5a. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$. Soit $m = s^{\downarrow}(M)$. On a donc $m_1 > m_2 > \cdots > m_n$.
Soit $r > 0$ et L élément de la boule ouverte de $\mathcal{S}_n(_R)$ centrée en M et de rayon r. Avec les notations précédentes : $\forall j \in [[1,n]]$, $|l_j - m_j| \leq ||L-M|| < r$. On a donc :
pour tout $j > 1$, $m_j - r < l_j < m_j + r$. Pour que les valeurs propres de L soient distinctes il suffit que les intervalles $]m_j - r, m_j + r[$ soient distincts. Comme $m_1 > m_2 > \cdots > m_n$ il suffit qu'on ait pour tout j, $m_j + r < m_{j-1} - r$.
Soit donc $\varepsilon = \min\{m_1 - m_2, m_2 - m_3, \ldots, m_{n-1} - m_n\}$. On sait que $\varepsilon > 0$. Prenons $r = \varepsilon/3$. On a pour tout j, $2r = 2\varepsilon/3 < \varepsilon \leq m_j - m_{j-1}$.
La boule ouverte de $\mathcal{S}_n(_R)$ centrée en M et de rayon r est incluse dans $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$. Par définition, $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5b. La première composante $s_1^{\downarrow}$ de $s^{\downarrow}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2^{\dagger}(\mathbb{R})$ car sur cet ensemble le discriminant Δ reste strictement positif et on a alors une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur des ouverts correspondants.
On n'a plus ce résultat sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Prenons en effet la restriction à l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix}$. On a dans ce cas la fonction $h \mapsto |h|$ qui n'est pas dérivable en 0.

Deuxième partie

Dans toute cette partie, on considère deux matrices symétriques réelles $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et leur somme $C = A + B$. On note $a = s^{\downarrow}(A)$, $b = s^{\downarrow}(B)$ et $c = s^{\downarrow}(C)$.

6a. Pour une matrice diagonalisable, sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres. Donc directement :

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_i = tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

6b. Soit x vecteur propre de C, de norme 1, associé à c_1. On peut écrire :
$\langle x, Cx \rangle = c_1 = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq a_1 + b_1$

6c. De même en prenant un vecteur propre de C associé à sa plus petite valeur propre on montre $a_n + b_n \leq c_n$.

7a. Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} > 2n$$

On a en utilisant la relation de Grassmann : $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n$.
$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) > n$ car $\mathcal{U} + V$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ donc de dimension

n au maximum. Le résultat de la question **3a** permet d'affirmer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

7b. Considérons une résolution spectrale de chacune des matrices A, B et C et notons $\mathcal{V}_j(A)$, $\mathcal{V}_j(B)$ et $\mathcal{V}_j(C)$ les espaces associés. (même notation avec les espaces $\mathcal{W}j$). Soit j et k deux entiers positifs vérifient $j+k \leq n+1$, on a :
$\dim(\mathcal{W}_j(A)) = n-j+1$, $\dim \mathcal{W}_k(B) = n-k+1$, $\dim \mathcal{V}_{j+k-1} = j+k-1$
La somme des dimensions des trois sev est $2n+1$. D'après la question précédente il existe au moins un vecteur non nul dans l'intersection. Donc au moins un vecteur de norme 1. Soit x un tel vecteur : $x \in \mathcal{W}_j(A)) \Rightarrow \langle x, Ax \rangle \leq a_j$; $x \in \mathcal{W}_k(B)) \Rightarrow \langle x, Bx \rangle \leq a_k$;
et $x \in \mathcal{V}_{j+k-1}(C)) \Rightarrow \langle x, Cx \rangle \geq c_{j+k-1}$; on obtient :

$$c_{j+k-1} \leq \langle x, (A+B)x \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq a_j + b_k$$

On peut raisonner de même avec les matrices $-A$ et $-B$. Notons $a' = s^{\downarrow}(-A)$, $b' = s^{\downarrow}(-B)$ et $c' = s^{\downarrow}(-A-B)$ on a , avec les mêmes hypothèses :

$$c'_{j+k-1} \leq a'_j + b'_k \quad \text{avec} \quad a'_j = -a_{n-j},\, b'_k = -b_{n-k},\, c'_r = -c_{n-r}$$

Donc $-c_{n-(j+k-1)} \leq -a_{n-j} - b_{n-k}$ et $c_{n-(j+k-1)} \geq a_{n-j} + b_{n-k}$.
En prenant $j' = n-j$ élément quelconque de $[[1,n]]$ et $k \in [[1,n]]$ tel que
$j+k = n-j'+k \leq n+1$ (choix toujours possible) on obtient : $c_{j'-k+1} \geq a_{j'} + b_k \geq a_{j'} + b_n$.
Prenons $k=1$; $j+k = n-j+1 \leq n+1$ et donc
$c_{j'} \geq a_{j'} + b_n$ avec j' entier quelconque de $[[1,n]]$.

8. On note a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$ les éléments diagonaux de A.

8a. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Cette base est orthonormée.
On a : $Ae_1 = \displaystyle\sum_{i=}^{n} a_{i,1} e_i$ et $a_{1,1} = \langle Ae_1, e_1 \rangle = \langle e_1, Ae_1 \rangle$.
Or, pour tout vecteur x de norme 1, $\langle x, Ax \rangle \leq a_1$. En particulier : $a_{11} \leq a_1$.

8b. Soient j et k des entiers positifs tels que $1 \leq j < k$ et $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$ des réels. On définit $\mathcal{D}_{j,k} = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,1]^k \mid t_1 + \ldots t_k = j\}$ et f la fonction de $\mathcal{D}_{j,k}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i=1}^{k} s_i t_i.$$

Notons $G = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} s_i - f(t_1, \ldots, t_k)$ et $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (s_i - s_j)(1-t_i)$.

$$G = \sum_{i=1}^{j} s_i - \sum_{i=1}^{j} t_i s_i - \sum_{i=j+1}^{k} s_i t_i = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - \sum_{i=j+1}^{k} s_i t_i\ .$$

Mais pour $i \geq j+i$, $s_i \leq s_j$, $t_i \geq 0$ donc $s_i t_i \leq s_j t_i$. En passant aux inverses :

$$G \geq \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - \sum_{i=j+1}^{k} s_j t_i = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - s_j \sum_{i=j+1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - s_j(j-(t_1+\cdots+t_i))$$

$$G \geq \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) + \sum_{i=1}^{j} s_j t_i - s_j \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) + \sum_{i=1}^{j} s_j(t_i - 1) = \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_j)(1-t_i) = D.$$

On a bien démontré que,pour tout $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{D}_{j,k}$,

$$\sum_{i=1}^{j} s_i - f(t_1,\dots,t_k) \geq \sum_{i=1}^{j}(s_i - s_j)(1-t_i)..$$

La quantité minorante est positive. Donc $f(t_1,\dots,t_k) \leq \sum_{i=1}^{j} s_i$.

En prenant $t_1 = \cdots = t_j = 1$ et $t_{j+1} = \cdots = t_k = 0$ on a $f(t_1,\dots,t_k) = \sum_{i=1}^{j} s_i$. Par suite :

$$\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^{j} s_i.$$

8c. Pour tout k on peut décomposer e_i dans la base orthonormée de vecteurs propres attachés à A, $(v_1,\dots,v_n)$. $e_i = \sum_{x=1}^{n}\langle e_i, v_x\rangle v_x$; $Ae_i = \sum_{x=1}^{n}\langle e_i, v_x\rangle a_x v_x$.

$a_{ii} = \langle e_i, Ae_i\rangle = \sum_{x=1}^{n}\langle e_i, v_x\rangle^2 a_x$. Soit j dans $[[1,n]]$, $\sum_{i=1}^{j} a_{ii} = \sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{x=1}^{n}\langle e_i, v_x\rangle^2 a_x\right)$.

$$\sum_{i=1}^{j} a_{ii} = \sum_{x=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\langle e_i, v_x\rangle^2\right) a_x$$

Notons, pour chaque x , $t_x = \sum_{i=1}^{j}\langle e_i, v_x\rangle^2 \geq 0$. On a $\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, v_x\rangle^2 = ||v_x||^2 = 1$ donc $t_x \leq 1$.

(En effet, comme la base $(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormée, pour tout x, $v_x = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, v_x\rangle e_i$).

De plus $\sum_{x=1}^{n} t_x = \sum_{x=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\langle e_i, v_x\rangle^2 = \sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{x=1}^{n}\langle e_i, v_x\rangle^2\right) = \sum_{i=1}^{j} ||e_i||^2 = \sum_{i=1}^{j} 1 = j$.

On est donc exactement dans les hypothèses de la question **8b** et, pour tout entier $1 \leq j \leq n$, $\sum_{i=1}^{j} a_{ii} = \sum_{x=1}^{n} t_x a_x \leq \sum_{x=1}^{j} a_x$..

8d. La démonstration précédente se transpose à n'importe quelle famille orthonormée $(x_1,\dots,x_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\sum_{i=1}^{j}\langle x_i, Ax_i\rangle \leq \sum_{i=1}^{j} a_j$.

Dans le cas où la base est $(v_1,\dots,v_n)$, la somme est égale à $\sum_{i=1}^{j} a_j$. On a donc bien pour tout entier $1 \leq j \leq n$: $\quad \sum_{i=1}^{j} a_i = \sup_{(x_1,\dots,x_j)\in\mathcal{R}_j} \sum_{i=1}^{j}\langle x_i, Ax_i\rangle$,.

(où $\mathcal{R}_j$ est l'ensemble des familles orthonormales de cardinal j dans $\mathbb{R}^n$.)

8c. Soit alors $(w_1,\dots,w_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de C et , pour $j \in [[1,n]]$, $\mathcal{R}_j = (w_1,\dots,w_j)$.

On a d'après ce qui précède :

$$\sum_{i=1}^{j} c_i = \sum_{i=1}^{j}\langle w_i, Cw_i\rangle = \sum_{i=1}^{j}\langle w_i, Aw_i\rangle + \sum_{i=1}^{j}\langle w_i, Bw_i\rangle \leq \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{j} b_i.$$

Troisième partie

Dans toute cette partie,on étudie le cas $n = 2$. Pour deux réels u et v tels que $u \geq v$, on note :

$$S(u, v) = \left\{ M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \,|\, s^{\downarrow}(M) = \{u, v\} \right\}.$$

On fixe $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \geq b_2$, quatre réels vérifiant la relation

$$a_1 - a_2 \geq b_1 - b_2.$$

$$\Sigma = \{ s^{\downarrow}(A + B) \,|\, A \in S(a_1, a_2),\, B \in S(b_1, b_2) \}$$

9. Si $C = A + B$, $tr(C) = tr(A) + tr(B)$ donc , avec les notations précédentes :

$$c_1 + c_2 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

Σ est inclus dans la droite du plan d'équation $x + y = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$.
Mais on sait de plus d'après la question **7b.** que $c_{2+1-1} \leq a_2 + b_1$ et $c_2 \geq a_2 + b_2$. Les points de Σ sont d'ordonnée comprise entre $a_2 + b_2$ et $a_2 + b_1$. Notons H et K ces deux points extrêmes . Leurs abscisses sont $a_1 + b_1$ et $a_1 + b_2$. Les coordonnées de $\overrightarrow{HK}$ sont : $(b_2 - b_1, b_1 - b_2)$ et $||\overrightarrow{HK}||^2 = 2(b_1 - b_2)^2$. Σ est inclus dans le segment $[HK]$ qui est de longueur $\sqrt{2}(b_1 - b_2)$.

10a. Soit A une matrice fixée de $S(a_1, a_2)$, B une matrice quelconque de $S(b_1, b_2)$. A est diagonalisable. Il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} {}^tP$. Notons D la matrice diagonale d'éléments diagonaux a_1, a_2. $A + B$ est semblable à $B' = D + {}^tPBP$. On a $s^{\downarrow}(A+B) = s^{\downarrow}(D+B')$. L'application $B \mapsto {}^tPBP$ est une bijection de l'ensemble $S(b_1, b_2)$. On a donc bien :

$$\Sigma = \left\{ s^{\downarrow}(A + B) \,|\, A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},\, B \in S(b_1, b_2) \right\}.$$

10b. Toute matrice symtrique réelle est orthodiagonalisable. Pour $B \in S(b_1, b_2)$, on peut construire une base orthonormée directe de vecteurs propres. Il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que : $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
L'application qui à θ associe la matrice ci-dessus est clairement continue et, par construction, son image est $S(b_1, b_2)$.

10c. Notons $B(\theta)$ la matrice précédente et $\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. L'application $\theta \mapsto s^{\downarrow}(\Delta + B(\theta))$ est continue par composée de fonctions continues (cf.question **1d.**). L' image de $[-\pi, \pi]$ est d'après la question précdente l'ensemble Σ. Les deux fonctions coordonnées sont également continues donc l'image de $[-\pi, \pi]$ par chacune de ces deux fonctions est un **segment** de $\mathbb{R}$. Il en résulte que Σ est un segment de $\mathbb{R}^2$. Ce segment I est inclus dans HK. Il reste à montrer que c'est HK.
Prenons $\theta = 0$; $\Delta + B(0) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}$. $s^{\downarrow}(\Delta + B(0)) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = H$.
Avec $\theta = \pi/2$: $\Delta + B(\pi/2) = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_1 \end{pmatrix}$. $s^{\downarrow}(\Delta + B(\pi/2)) = (a_1 + b_21, a_2 + b_1) = K$.

Le segment I contient les deux points H et K, il contient donc le segment $[HK]$.
Par double inclusion $\Sigma = L = [HK]$.

* *
*

N.B. : Corrigé établi pour l'UPS par Hugues Demongeot. Merci de signaler toute erreur, omission ou imprécision. Avril 2015.