X-ENS-ESPCI 2021 – Un corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Frédéric Denizet – professeur en M.P. au lycée Fénelon

Partie I

I.1. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue de K fermé borné de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$ elle est donc bornée et atteint ses bornes sur K, ce qui assure que $\|P\|_K \in \mathbb{R}$.

I.2. $\|.\|_K$ est la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées sur K à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont $\mathbb{C}[X]$ peut être considéré comme un sous-espace en identifiant les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées sur K (on remarquera que cette identification est valide car K est infini et que les fonctions polynomiales sont bornées sur K car K est fermé borné).

I.3. Soit $z \in K$, $|Q(z)R(z)| \leq |Q(z)|\,|R(z)| \leq \|Q\|_K \|R\|_K$ donc $\|QR\|_K \leq \|Q\|_K \|R\|_K$.

I.4. Ainsi qu'on la vu au I.1. pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ atteint ses bornes sur K donc il existe $z \in K$ tel que $\|P\|_K = |P(z)|$.
Supposons donc que pour Q et R non nuls on ait $\|QR\|_K = \|Q\|_K \|R\|_K$ et posons $z_0 \in K$ tel que $\|QR\|_K = |(QR)(z_0)|$.
On a $\|QR\|_K = |Q(z_0)R(z_0)| \leq \|Q\|_K \|R\|_K = \|QR\|_K$ donc $|Q(z_0)R(z_0)| = \|Q\|_K \|R\|_K$.
Puis $\|Q\|_K \|R\|_K = |Q(z_0)R(z_0)| \leq |Q(z_0)|\,\|R\|_K$ avec $\|R\|_K > 0$ donc $|Q(z_0)| \geq \|Q\|_K$ et ainsi $|Q(z_0)| = \|Q\|_K$.
Enfin l'égalité $|Q(z_0)R(z_0)| = \|Q\|_K \|R\|_K$ avec $|Q(z_0)| = \|Q\|_K \neq 0$ assure $|R(z_0)| = \|R\|_K$.

I.5. On utilise les notations introduites par l'énoncé et on pose A tel que, pour tout $z \in K$, $|z| \leq A$ (A existe car K est borné).
Soient $\rho < 0$ et $z \in K$, $Q_\rho(z)R_\rho(z) = z^2 - (a+b)z + (ab + (a-b)^2\rho - (a-b)^2\rho^2)$.
Donc $|Q_\rho(z)R_\rho(z)| \leq A^2 + |a+b|\,A + |ab| + |a-b|^2(\rho^2 - \rho)$;
et ainsi $\|Q_\rho R_\rho\|_K \leq B + |a-b|^2(\rho^2-\rho)$ où on a posé $B = A^2 + |a+b|\,A + |ab|$.
De plus $\|Q_\rho\|_K \geq |Q_\rho(b)| = |a-b|\,(1-\rho)$ et $\|R_\rho\|_K \geq |R_\rho(a)| = |a-b|\,(1-\rho)$;
donc $\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K \geq |a-b|^2(1-\rho)^2$
et ainsi $\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K - \|Q_\rho R_\rho\|_K \geq |a-b|^2(1-\rho) - B \underset{\rho\to-\infty}{\to} +\infty$ ce qui assure qu'il existe bien ρ tel que $\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K > \|Q_\rho R_\rho\|_K$ donc 1 ne majore pas le quotient $\dfrac{\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K}{\|Q_\rho R_\rho\|_K}$ où les polynômes Q_ρ et R_ρ sont de degrés 1 donc dans $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}_m[X]$ ce qui assure que $C^K_{n,m} > 1$.

I.6. L'application f est continue car le produit de polynômes est continu (bilinéaire en dimension finie) et la norme est continue. De plus E est trivialement borné et est un fermé de V car c'est l'image réciproque du fermé $(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ par l'application continue $(Q,R) \mapsto (\|Q\|_K, \|R\|_K)$. Donc f est bornée et atteint ses bornes sur E ce qui assure l'existence du couple (Q_0, R_0) voulu.

I.7. Notons q et r les coefficients dominants de Q_0 et R_0 et posons $Q_1 = \dfrac{Q_0}{q}$ et $R_1 = \dfrac{R_0}{r}$.
Les polynômes Q_1 et R_1 sont unitaires, de plus $\dfrac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1 R_1\|_K} = \dfrac{1}{\|Q_0 R_0\|_K}$.

Par définition $\dfrac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1R_1\|_K} \leq C_{n,m}^K$.

Par ailleurs pour tous Q et R non nuls dans $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}_m[X]$ en posant $\widetilde{Q} = \dfrac{Q}{\|Q\|_K}$ et $\widetilde{R} = \dfrac{R}{\|R\|_K}$ on a :

$\|Q_0R_0\|_K \leq \left\|\widetilde{Q}\widetilde{R}\right\|_K$ i.e. $\dfrac{1}{\|Q_0R_0\|_K} \geq \dfrac{1}{\left\|\widetilde{Q}\widetilde{R}\right\|_K}$ i.e. $\dfrac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1R_1\|_K} \geq \dfrac{\|Q\|_K \|R\|_K}{\|QR\|_K}$.

Cette inégalité étant vraie pour tous Q et R non nuls dans $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}_m[X]$, on en déduit que $\dfrac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1R_1\|_K} \geq C_{n,m}^K$ et donc $\dfrac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1R_1\|_K} = C_{n,m}^K$

Partie II

2.8. Q est scindé donc s'écrit $Q = \alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{d}(X - a_k)$ où α est son coefficient dominant et $a_1, \ldots, a_d$ sont ses racines.

On note $\mathcal{A} = \left\{\theta \in [0, 2\pi] \mid Q(\mathrm{e}^{i\theta}) = 0\right\}$ (cet ensemble est fini).

On pose $\mathcal{B} = [0, 2\pi] \setminus \mathcal{A}$, on a pour tout $\theta \in \mathcal{B}$, $\ln\left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right| = \ln|\alpha| + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left|\mathrm{e}^{i\theta} - a_k\right|$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, si $|a_k| \neq 1$, $\theta \mapsto \ln\left|\mathrm{e}^{i\theta} - a_k\right|$ est continue et donc intégrable (au sens usuel) sur $[0, 2\pi]$.

Si $|a_k| = 1$ on pose $\theta_k \in [0, 2\pi]$ tel que $\mathrm{e}^{i\theta_k} = a_k$ (θ_k est unique sauf si $a_k = 1$ auquel cas on travaille à la fois pour 0 à droite et 2π à gauche), $\theta \mapsto \ln\left|\mathrm{e}^{i\theta} - a_k\right|$ est continue sur $[0, \theta_k[\cup]\theta_k, 2\pi]$ il faut s'assurer de son intégrabilité au voisinage de θ_k à droite et à gauche.

Or pour $\theta \in [0, \theta_k[\cup]\theta_k, 2\pi]$:

$\ln\left|\mathrm{e}^{i\theta} - a_k\right| = \ln\left|\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta_k}\right| = \ln\left|\mathrm{e}^{i(\theta-\theta_k)} - 1\right| = \ln\left|\theta - \theta_k + \underset{\theta\to\theta_k}{o}(\theta - \theta_k)\right| = \underset{\theta\to\theta_k}{o}(|\theta - \theta_k|^{-\frac{1}{2}})$.

Ce qui assure l'intégrabilité de $\theta \mapsto \ln\left|\mathrm{e}^{i\theta} - a_k\right|$ sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1.

En conclusion $\theta \mapsto \ln\left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1.

2.9. Pour $p > 0$, $M_p(Q)$ est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle sur $[0, 2\pi]$ (car Q admet un nombre fini de racines donc $Q(\mathrm{e}^{i\theta})$ ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois sur $[0, 2\pi]$). Ceci assure que $M_p(Q) > 0$.

2.10. Puisque ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour vérifier que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ il suffit de vérifier que $p \mapsto M_p(Q)$ l'est, ce que l'on fait en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètre dont on vérifie les hypothèses :

i. Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \mapsto \left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p$ est continue (par morceaux) sur $[0, 2\pi]$.

ii. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $p \mapsto \left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

iii. $|Q|$ est continue sur $\mathbb{D}$ qui est un fermé borné donc est bornée sur $\mathbb{D}$ ce qui assure l'existence de $T > 1$ tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right| \leq T$.

Soit alors $b > 0$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $p \in]0, b]$, on a $\left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p \leq T^b$ où $\theta \mapsto T^b$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

On en conclut que, pour tout $b>0$, $p \mapsto M_p(Q)$ est continue sur $]0,b]$ ce qui assure que $p \mapsto M_p(Q)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc que φ est continue sur $]0,+\infty[$

Il reste à vérifier la continuité de φ en 0, i.e. à justifier que $\lim\limits_{p\to 0}(M_p(Q)) = 1$, ce que l'on fait grâce au théorème de convergence dominée dont on vérifie les hypothèses, on reprend pour cela le T défini ci-dessus et on pose $\mathcal{A} = \left\{\theta \in [0,2\pi] \mid Q(\mathrm{e}^{i\theta}) = 0\right\}$ (qui est fini).

i. Pour tout $p \in]0,1]$, $\theta \mapsto \left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p$ est continue (par morceaux) sur $[0,2\pi]$.

i. Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $\lim\limits_{p\to 0}\left(\left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p\right) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } \theta \notin \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } \theta \in \mathcal{A}\end{array}\right.$.

iii. La fonction $f : t \mapsto \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } \theta \notin \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } \theta \in \mathcal{A}\end{array}\right.$ est continue par morceaux sur $[0,2\pi]$.

iv. Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et pour tout $p \in]0,1]$, on a $\left|Q(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p \leq T$ où $\theta \mapsto T$ est intégrable sur $[0,2\pi]$.

En conclusion $\lim\limits_{p\to 0}(M_p(Q)) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 1$, ce qui assure la continuité de φ en 0.

2.11. Là encore, puisque ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, pour vérifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ il suffit de vérifier que $p \mapsto M_p(Q)$ l'est, ce que l'on fait en appliquant le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre dont on vérifie les hypothèses en posant $f : (p,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi] \mapsto \left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^p$.

On note toujours $\mathcal{A} = \left\{t \in [0,2\pi] \mid Q(\mathrm{e}^{it}) = 0\right\}$, $\mathcal{B} = [0,2\pi] \setminus \mathcal{A}$, et $T > 1$ tel que pour tout $t \in [0,2\pi]$, $\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right| \leq T$.

i. Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(p,t)$ est continue et donc intégrable sur $[0,2\pi]$ (segment).

ii. Pour tout $t \in [0,2\pi]$, $p \mapsto f(p,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

— si $t \in \mathcal{A}$, $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\partial_1 f(p,t) = 0$;

— si $t \in \mathcal{B}$, $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\partial_1 f(p,t) = \ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right| \left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^p$;

iii. Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \partial_1 f(p,t)$ est continue par morceaux sur $[0,2\pi]$ (elle est même continue car $\lim\limits_{u\to 0^+}(u^p \ln(u)) = 0$).

iv. Soit un segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in [a,b]$ et pour tout $u \in]0,T]$ on a $|u^p \ln(u)| \leq \left|(u^a + u^b)\ln(u)\right|$ or la fonction $u \mapsto (u^a+u^b)\ln(u)$ est continue sur $]0,T]$ et prolongeable par continuité en 0 donc elle est bornée sur $]0,T]$, on peut ainsi poser U tel que, pour tout $u \in]0,T]$, $\left|(u^a+u^b)\ln(u)\right| \leq U$.
Alors, pour tout $p \in [a,b]$ et pour tout $t \in \mathcal{B}$, $|\partial_1 f(p,t)| = \left|\ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right| \left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^p\right|$ où $\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^p \in]0,T]$ donc $|\partial_1 f(p,t)| \leq U$.
On a finalement : $\forall (p,t) \in [a,b] \times [0,2\pi]$, $|\partial_1 f(p,t)| \leq U$ où $t \mapsto U$ est intégrable sur $[0,2\pi]$.

On en conclut que, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, $p \mapsto M_p(Q)$ est dérivable sur $[a,b]$ ce qui assure que $p \mapsto M_p(Q)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donc que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

De plus, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$: $\varphi'(p) = \dfrac{1}{2\pi M_p(Q)}\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right| \left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^p \mathrm{d}t$.

2.12. Pour déterminer la limite de φ' en 0^+ on applique le théorème 1 (de convergence dominée) à $p \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right| \left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^p \mathrm{d}t$ dont on vérifie les hypothèses avec les mêmes notations qu'à 2.11., en considérant une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}\in]0,1]^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et en posant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\mapsto \partial_1 f(p_n,t)$ i.e. $f_n : t\mapsto \left\{\begin{array}{cl} \ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^{p_n} & \text{si } t\in\mathcal{A}\\ 0 & \text{si } t\in\mathcal{B}\end{array}\right.$.

i. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,2\pi]$ (cf ci-dessus).

ii. Soit $t\in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(t)) = \left\{\begin{array}{cl} \ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right| & \text{si } t\in\mathcal{A}\\ 0 & \text{si } t\in\mathcal{B}\end{array}\right.$.

iii. La fonction $\psi : t\mapsto \left\{\begin{array}{cl} \ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right| & \text{si } t\in\mathcal{A}\\ 0 & \text{si } t\in\mathcal{B}\end{array}\right.$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ au sens de la définition 1 (cf 2.8.).

iv Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in[0,2\pi]$, $|f_n(t)|\leq T\psi(t)$ où $T\psi$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ au sens de la définition 1.

En conclusion et par caractérisation séquentielle de la limite on a :
$\lim\limits_{p\to 0}\left(\int_0^{2\pi}\ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|^p\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{2\pi}\ln\left|Q(\mathrm{e}^{it})\right|\mathrm{d}t = 2\pi\ln(M(Q))$;
comme $\lim\limits_{p\to 0}(M_p(Q)) = 1$ on a donc $\lim\limits_{p\to 0}(\varphi'(t)) = \ln(M(Q))$.
Ceci assure que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = \ln(M(Q))$ et donc que pour p au voisinage de 0 : $\varphi(p) = \varphi(0)+\varphi'(0)p + + \underset{p\to 0}{o}(p) = \ln(M(Q))p + \underset{p\to 0}{o}(p)$.
Enfin pour $p\in\mathbb{R}_+^*$, on a $M_p(Q)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{1}{p}\varphi(p)\right) = \exp\left(\ln(M(Q)) + \underset{p\to 0}{o}(1)\right)$
d'où $\lim\limits_{p\to 0}\left(M_p(Q)^{\frac{1}{p}}\right) = \exp\left(\ln(M(Q))\right) = M(Q)$

2.13. On utilise les notations données par l'énoncé.
On a pour tout $\rho\in[0,1[$, $F(\rho) = \frac{1}{2}\ln\left|1-\rho\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 = \frac{1}{2}\ln\left(1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2\right)$.
Donc pour tout $\rho\in[0,1[$, $F'(\rho) = \dfrac{\rho-\cos(\theta)}{(1-\rho\mathrm{e}^{i\theta})(1-\rho\mathrm{e}^{-i\theta})} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{i\theta}}{(1-\rho\mathrm{e}^{i\theta})}+\dfrac{e^{-i\theta}}{(1-\rho\mathrm{e}^{-i\theta})}\right)$;
i.e. $F'(\rho) = -\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{i\theta}}{(1-\rho\mathrm{e}^{i\theta})}\right) = -\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\rho^k e^{ik\theta}\right) = -\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\rho^k e^{i(k+1)\theta}\right)$.
Par intégration terme-à-terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, pour tout $\rho\in[0,1[$, $F(\rho) = -\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k+1}\rho^{k+1}e^{i(k+1)\theta}\right) = -\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}\rho^n e^{in\theta}\right)$.
Notamment pour $\rho = r$ on a $\ln|1-z| = F(r) = -\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n}\right)$.

2.14. $M(X-z) = \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\mathrm{e}^{it}-z\right|\mathrm{d}t\right) = \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|1-z\mathrm{e}^{-it}\right|\mathrm{d}t\right)$.
Donc $M(X-z) = \exp\left(-\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n e^{-int}}{n}\mathrm{d}t\right)\right)$.
La série de fonction $\sum u_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n : t\mapsto\dfrac{z^n e^{-int}}{n}$ est une série de fonctions continues sur $[0,2\pi]$ qui converge normalement sur $[0,2\pi]$ (car pour tout $t\in[0,2\pi]$, $|u_n(t)|\leq|z|^n$ avec $|z|<1$), on peut donc intervertir série et intégrale.

D'où $M(X-z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{z^n e^{-int}}{n}\mathrm{d}t\right)\right)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t = 0$ donc $M(X-z) = \exp(0) = 1$.

$$M(X-z^{-1}) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\mathrm{e}^{it}-z^{-1}\right|\mathrm{d}t\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln\left|z^{-1}\right| + \ln\left|1-z\mathrm{e}^{it}\right|)\mathrm{d}t\right)$$
$$= \exp\left(\ln\left|z^{-1}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|1-z\mathrm{e}^{it}\right|\mathrm{d}t\right).$$

Or tout comme au dessus $\int_0^{2\pi}\ln\left|1-z\mathrm{e}^{it}\right|\mathrm{d}t = 0$.

On a donc $M(X-z^{-1}) = \exp\left(\ln\left|z^{-1}\right|\right) = \left|z^{-1}\right|$.

2.15. On utilise les notations de l'énoncé avec de plus $\psi \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\psi}$, la question 2.14. assure que g est constante égale à 1 et on veut montrer que g tend vers $M(X-z)$ en 1.

Pour cela on applique le théorème de convergence dominée avec $D = [0, 2\pi] \setminus \{\psi\}$.

Montrons dans un premier temps l'inégalité que « remarque » l'énoncé, on pose $r \in [0, 1[$ et $t \in [0, 2\pi]$ on a : $\left|e^{it} - re^{i\psi}\right| = \left|e^{i(t-\psi)} - r\right| \geq \left|\mathrm{Im}\left(e^{i(t-\psi)} - r\right)\right| = |\sin(t-\psi)|$.

On a pour $r \in [0, 1[$, $g(r) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\mathrm{e}^{it} - re^{i\psi}\right|\mathrm{d}t\right)$.

Pour tout $t \in D$, $\lim_{r\to 1}\left(\ln\left|\mathrm{e}^{it} - re^{i\psi}\right|\right) = \ln\left|\mathrm{e}^{it} - e^{i\psi}\right|$

De plus pour tous $r \in [0, 1[$ et $t \in D$, $|\sin(t-\psi)| \leq \left|e^{it} - re^{i\psi}\right| \leq 2$

donc $\left|\ln\left|\mathrm{e}^{it} - re^{i\psi}\right|\right| \leq \ln(2) - \ln|\sin(t-\psi)|$ où $t \mapsto \ln(2) - \ln|\sin(t-\psi)|$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1 (intégrale impropre convergente en ψ).

On en déduit que $\lim_{r\to 1}(g(r)) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\mathrm{e}^{it} - e^{i\psi}\right|\mathrm{d}t\right) = M(X-z)$, ce qui assure $M(X-z) = 1$.

2.16. Les questions précédentes assurent que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $M(X-z) = \max\{1, |z|\}$.

Or $M(Q) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\lambda\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{it} - a_k)\right|\mathrm{d}t\right) = |\lambda|\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|e^{it} - a_k\right|\mathrm{d}t\right)$.

Donc $M(Q) = |\lambda|\prod_{k=1}^{n}M(X-a_k) = |\lambda|\prod_{k=1}^{n}\max\{1, |a_k|\}$

Partie III

3.17. Par linéarité il suffit de montrer ce résultat pour un monôme, on suppose donc $P = X^d$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.

On a donc $\int_0^{2\pi}(z + r\mathrm{e}^{it})^d\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}z^{d-k}r^k\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ikt}\mathrm{d}t = z^d = P(z)$.

3.18. On a déjà justifié qu'il existait $z \in \mathbb{D}$ tel que $\|P\|_{\mathbb{D}} = |P(z)|$, pour un tel z on note $z = \rho e^{i\psi}$ avec $\rho \in [0, 1]$.

On pose $r = 1 - \rho$ alors pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $z + re^{it} \in \mathbb{D}$ donc $\left|P(z + r\mathrm{e}^{it})\right| \leq |P(z)|$

Ainsi avec 3.17 :
$|P(z)| = \left|\int_0^{2\pi} P(z + re^{it})\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|P(z + re^{it})\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |P(z)| \,\mathrm{d}t = |P(z)|.$
On a donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\left|P(z + re^{it})\right| - |P(z)|\right) \mathrm{d}t = 0$ où la fonction intégrée est continue et de signe constant ce qui assure que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\left|P(z + re^{it})\right| - |P(z)| = 0$.
Notamment $P(z + re^{i\psi}) = P(z)$ où $z + re^{i\psi} = e^{i\psi} \in \partial\mathbb{D}$.
Il existe donc un élément de $\partial\mathbb{D}$ où est atteinte $\|P\|_{\mathbb{D}}$ ce qui assure que $\|P\|_{\partial\mathbb{D}} = \|P\|_{\mathbb{D}}$.

3.19. On utilise les notations de l'énoncé, on remarque que, pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$, $P(z) = Q(z^{-1})$ ce qui assure que $\|P\|_{\partial\mathbb{D}} = \|Q\|_{\partial\mathbb{D}}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si $|z| \leq 1$ on a $|P(z)| \leq \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \leq \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \max\left\{1, |z|^d\right\}$.
Si $|z| > 1$, on a $|P(z)| = |z|^d \left|Q(z^{-1})\right| \leq \|Q\|_{\partial\mathbb{D}} \max\left\{1, |z|^d\right\} = \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \max\left\{1, |z|^d\right\}$.
On a donc toujours $|P(z)| \leq \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \max\left\{1, |z|^d\right\}$.

3.20. Sans perte de généralité on peut supposer que les racines de Q sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et que les racines de R sont $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+m}$.
On note de plus λ_Q et λ_R les coefficients dominants de Q et R, on a $\lambda_Q\lambda_R = \lambda$
Il existe $(u, v) \in \partial\mathbb{D}^2$ tel que $|Q(u)| = \|Q\|_{\mathbb{D}}$ et $|R(v)| = \|R\|_{\mathbb{D}}$.
Alors $\displaystyle\|Q\|_{\mathbb{D}} = |\lambda_Q| \prod_{i=1}^{n} |u - \alpha_i| \leq |\lambda_Q| \prod_{i=1}^{n} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}$.
De même $\displaystyle\|R\|_{\mathbb{D}} = |\lambda_R| \prod_{i=n+1}^{n+m} |v - \alpha_i| \leq |\lambda_R| \prod_{i=n+1}^{n+m} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}$.
Donc $\displaystyle\|Q\|_{\mathbb{D}} \|R\|_{\mathbb{D}} \leq |\lambda| \prod_{i=1}^{n+m} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}$.

3.21. Déterminons les racines de S.
On a $\displaystyle S = \lambda \prod_{i=1}^{m+n} (uX - v - \alpha_i(X - 1)) = \lambda \prod_{i=1}^{m+n} ((u - \alpha_i)X - (v - \alpha_i))$.
Notons $A = \{i \in [\![1, m+n]\!] \mid \alpha_i = u\}$ et $B = \{i \in [\![1, m+n]\!] \mid \alpha_i \neq u\}$.
$\displaystyle S = \lambda \prod_{i \in A} ((-v + \alpha_i)) \prod_{i \in B} ((u - \alpha_i)X - (v - \alpha_i))$
$\displaystyle = \lambda \prod_{i \in A} ((-v + \alpha_i)) \prod_{i \in B} ((u - \alpha_i)) \prod_{i \in B} \left(X - \frac{v - \alpha_i}{u - \alpha_i}\right)$.
Donc les racines de S sont les $\dfrac{v - \alpha_i}{u - \alpha_i}$ pour $i \in B$ et son coefficient dominant est
$\displaystyle\lambda \prod_{i \in A} ((-v + \alpha_i)) \prod_{i \in B} ((u - \alpha_i))$.
Donc $\displaystyle M(S) = |\lambda| \prod_{i \in A} |(v - \alpha_i)| \prod_{i \in B} |(u - \alpha_i)| \prod_{i \in B} \max\left\{1, \left|\frac{v - \alpha_i}{u - \alpha_i}\right|\right\}$.
Ainsi $\displaystyle M(S) = |\lambda| \prod_{i \in A} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\} \prod_{i \in B} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}$;
et finalement $\displaystyle M(S) = |\lambda| \prod_{i=1}^{n+m} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}$.

3.20. donne alors $\|Q\|_{\mathbb{D}} \|R\|_{\mathbb{D}} \leq M(S)$.

3.22. $M(S) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln\left|e^{it}-1\right|^{m+n} + \ln\left|P\left(\frac{ue^{it}-v}{e^{it}-1}\right)\right|\right)\mathrm{d}t\right)$

$= M((X-1)^{m+n})\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|P\left(\frac{ue^{it}-v}{e^{it}-1}\right)\right|\mathrm{d}t\right)$.

On a $M((X-1)^{m+n}) = 1$, donc

$M(S) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|P\left(\frac{ue^{it}-v}{e^{it}-1}\right)\right|\mathrm{d}t\right)$.

D'après 3.19. on a donc :

$M(S) \leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\|P\|_{\mathbb{D}}\max\left\{1, \left|\frac{ue^{it}-v}{e^{it}-1}\right|^{n+m}\right\}\right)\mathrm{d}t\right)$

$M(S) \leq \|P\|_{\mathbb{D}}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{1, \left|\frac{ue^{it}-v}{e^{it}-1}\right|^{n+m}\right\}\right)\mathrm{d}t\right)$

$M(S) \leq \|P\|_{\mathbb{D}}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\left|e^{it}-1\right|^{n+m}}\max\left\{\left|e^{it}-1\right|^{n+m}, \left|ue^{it}-v\right|^{n+m}\right\}\right)\mathrm{d}t\right)$

$M(S) \leq \|P\|_{\mathbb{D}}\frac{\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|^{n+m}, \left|ue^{it}-v\right|^{n+m}\right\}\right)\mathrm{d}t\right)}{M(X-1)^{m+n}}$

$M(S) \leq \|P\|_{\mathbb{D}}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|^{n+m}, (|u|\left|e^{it}-w\right|)^{n+m}\right\}\right)\mathrm{d}t\right)$

$M(S) \leq \|P\|_{\mathbb{D}}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|^{n+m}, \left|e^{it}-w\right|)^{n+m}\right\}\right)\mathrm{d}t\right)$

$M(S) \leq \|P\|_{\mathbb{D}}\exp\left(\frac{n+m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|, \left|e^{it}-w\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t\right)$

3.23. Il s'agit donc de montrer que :

$\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|, \left|e^{it}-w\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|, \left|e^{it}+1\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t$

Or w s'écrit $w = e^{i\psi}$ pour $\psi \in [0, 2\pi[$, de plus pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}-1\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

$\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|, \left|e^{it}-w\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|e^{it}-1\right|, \left|e^{it}-e^{i\psi}\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t$

$= 2\int_0^{2\pi}\ln\left(\max\left\{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|, \left|\sin\left(\frac{t-\psi}{2}\right)\right|\right\}\right)\mathrm{d}t$

$= 2\int_0^{\pi}\ln\left(\max\left\{\left|\sin(t)\right|, \left|\sin\left(t-\frac{\psi}{2}\right)\right|\right\}\right)\mathrm{d}t$

$= 2\int_0^{\psi/2}\ln\left(\max\left\{\sin(t), \sin\left(\frac{\psi}{2}-t\right)\right\}\right)\mathrm{d}t + 2\int_{\psi/2}^{\pi}\ln\left(\max\left\{\sin(t), \sin\left(t-\frac{\psi}{2}\right)\right\}\right)\mathrm{d}t$

$= 2\int_0^{\psi/4}\ln\left(\sin\left(\frac{\psi}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t + 2\int_{\psi/4}^{\psi/2}\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + 2\int_{\psi/2}^{\pi/2+\psi/4}\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$

$+ 2\int_{\pi/2+\psi/4}^{\pi}\ln\left(\sin\left(t-\frac{\psi}{2}\right)\right)\mathrm{d}t$

$= 4\int_{\psi/4}^{\psi/2}\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + 4\int_{\psi/2}^{\pi/2+\psi/4}\ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$

$$= 4\int_{\psi/4}^{\pi/2+\psi/4} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + 4\int_{\pi/2}^{\pi/2+\psi/4} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t - 4\int_0^{\psi/4} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + 4\int_0^{\psi/4} \ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}t - 4\int_0^{\psi/4} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + 4\int_0^{\psi/4} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t - 4\int_0^{\psi/4} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + 4\int_0^{\psi/4} (\ln(\cos(t)) - \ln(\sin(t)))\,\mathrm{d}t$$

Cette quantité est maximale si $\displaystyle\int_0^{\psi/4} (\ln(\cos(t)) - \ln(\sin(t)))\,\mathrm{d}t$ est maximale avec $\psi/4 \in [0, \pi/2]$ or la fonction intégrée est positive sur $[0, \pi/4]$ et négative sur $[\pi/4, \pi]$ donc la quantité est maximale pour $\psi/4 = \pi/4$, i.e. pour $\psi = \pi$.

Ainsi la plus grande valeur possible de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{it}-1\right|, \left|\mathrm{e}^{it}-w\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t$ est obtenue pour $w = \mathrm{e}^{i\pi}$ i.e. pour $w = -1$ ce qui donne le résultat voulu.

Remarque de l'auteur du corrigé : cette méthode est assez alambiquée et il y a sûrement plus simple mais je n'ai pas trouvé mieux.

3.24. $$I = \int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{it}-1\right|, \left|\mathrm{e}^{it}+1\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{it}-1\right|, \left|\mathrm{e}^{it}+1\right|)\right\}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left(\left|\mathrm{e}^{it}+1\right|\right)\mathrm{d}t.$$

Pour $r \in [0, 1[$ on pose $I_r = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left(\left|r\mathrm{e}^{it}+1\right|\right)\mathrm{d}t$

On a avec 2.13. $I_r = -\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{r^n \mathrm{e}^{int}}{n}\mathrm{d}t\right)$.

Par convergence normale on peut intervertir série et intégrale :
$$I_r = -\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t\right) = -\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n^2} 2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

Il reste à passer à la limite en 1.

Par convergence normale sur $[0, 1]$ la fonction $r \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}$ est continue en 1.

Par ailleurs un travail similaire à celui fait en 2.15. assure grâce au théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{r\to 1}(I_r) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left(\left|\mathrm{e}^{it}+1\right|\right)\mathrm{d}t$.

On en déduit donc que $I = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}$.

3.25. Par critère spécifique des séries alternées, deux sommes partielles consécutives de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}$ encadrent sa somme totale.

Ceci assure que les valeurs obtenues par la calculatrice encadrent I on a donc bien une valeur approchée de I à 10^{-2} près en prenant $1,79$.

3.26. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $\omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{k}}$

On a $Q_k R_k = X^k - 1$ donc $\|Q_k R_k\|_{\mathbb{D}} = 2$.

Par ailleurs $\|Q_k\|_{\mathbb{D}} \geq |Q_k(-1)| = \displaystyle\prod_{\zeta\in U} |\zeta + 1| = \prod_{\zeta\in U} \max\{|\zeta+1|, |\zeta-1|\}$.

De même $\|R_k\|_{\mathbb{D}} \geq |R_k(1)| = \displaystyle\prod_{\zeta\in V} |\zeta - 1| = \prod_{\zeta\in V} \max\{|\zeta+1|, |\zeta-1|\}$

Donc $\|Q_k\|_{\mathbb{D}} \|R_k\|_{\mathbb{D}} \geq \displaystyle\prod_{\zeta\in U\cup V} \max\{|\zeta+1|, |\zeta-1|\} = \prod_{j=0}^{n-1} \max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}$.

Posons $\mathcal{E}$ l'ensemble dont l'énoncé veut déterminer la borne inférieure et $\lambda \in \mathcal{E}$ (qui est nécessairement strictement positif).

On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^k \geq \dfrac{\|Q_k\|_{\mathbb{D}} \|R_k\|_{\mathbb{D}}}{\|Q_k R_k\|_{\mathbb{D}}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} \max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}$

donc $\lambda \geq \exp\left(\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} \max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}\right)\right)$;

i.e. $\lambda \geq \exp\left(\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)\exp\left(\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\ln\left(\max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}\right)\right)$

i.e. $\lambda \geq \exp\left(\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)\exp\left(\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{i2\pi\frac{j}{k}} + 1\right|, \left|\left|\mathrm{e}^{i2\pi\frac{j}{k}} - 1\right|\right|\right\}\right)\right)$.

Posons $f : t \mapsto \ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{it}+1\right|, \left|\left|\mathrm{e}^{it}-1\right|\right|\right\}\right)$, c'est une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ par composition de fonctions continues.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n-1}\ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{i2\pi\frac{j}{k}} + 1\right|, \left|\left|\mathrm{e}^{i2\pi\frac{j}{k}} - 1\right|\right|\right\}\right) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{k}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right).$$

Par sommes de Riemann : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2\pi}{k}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right) = \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$

Donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n-1}\ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{i2\pi\frac{j}{k}} + 1\right|, \left|\left|\mathrm{e}^{i2\pi\frac{j}{k}} - 1\right|\right|\right\}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$

Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus on a donc :

$\lambda \geq \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right) = \exp\left(\dfrac{I}{2\pi}\right) = C.$

Par ailleurs on a $C \in \mathcal{E}$ d'après 3.23., ce qui assure que C est le minimum de $\mathcal{E}$ (et donc sa borne inférieure).

Partie IV

4.27. On utilise le fait que $h : x \mapsto \dfrac{b-a}{d-c}(x-c)+a$ réalise une bijection de J vers I telle que $h(c)=a$ et $h(d)=b$.

On pose donc $C(X) = A\left(\dfrac{b-a}{d-c}(X-c)+a\right)$ et $D(X) = B\left(\dfrac{b-a}{d-c}(X-c)+a\right)$, on a les résultats voulus.

4.28. On pose $\mathcal{E}_I$ l'ensemble dont $C_{n,m}^I$ est par définition la borne supérieure.

La question précédente assure que pour tout couple de segments (I,J) on a $\mathcal{E}_I \subset \mathcal{E}_J$, et par symétrie des rôles de I et J on a aussi $\mathcal{E}_J \subset \mathcal{E}_I$ et finalement $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}_J$, ce qui assure que $C_{n,m}^I = C_{n,m}^J$.

4.29. On a évidemment $\|Q_0R_0\|_J \leq \|Q_0R_0\|_I$.

De plus $\|Q_0R_0\|_J \geq \dfrac{1}{C_{n,m}}\|Q_0\|_J\|R_0\|_J = \dfrac{1}{C_{n,m}}\|Q_0\|_I\|R_0\|_I = \|Q_0R_0\|_I$.

On a donc $\|Q_0R_0\|_J = \|Q_0R_0\|_I$.

4.30. On pose c et d dans I tels que $\|Q_0\|_I = |Q_0(c)|$ et $\|R_0\|_I = |R_0(d)|$.

On définit J comme au 4.27.

On a donc $\|Q_0\|_J = \|Q_0\|_I = |Q_0(c)|$ et $\|R_0\|_J = \|R_0\|_I = |R_0(d)|$.

Cela assure aussi par 4.29. que $\|Q_0R_0\|_J = \|Q_0R_0\|_I$.

Ainsi que cela est possible par 4.27, on introduit Q_1 et R_1 tels que $\|Q_1\|_I = \|Q_0\|_J$, $\|R_1\|_I = \|R_0\|_J$, $\|Q_1R_1\|_I = \|Q_0R_0\|_J$, $Q_1(-1) = Q_0(c)$ et $R_1(1) = R_0(d)$.

Finalement : $\|Q_1\|_I = \|Q_0\|_J = \|Q_0\|_I = |Q_0(c)| = |Q_1(-1)|$.

De même : $\|R_1\|_I = \|R_0\|_J = \|R_0\|_I = |R_0(d)| = |R_1(1)|$.

Enfin : $C_{n,m}\|Q_1R_1\|_I = C_{n,m}\|Q_0R_0\|_J = C_{n,m}\|Q_0R_0\|_I = \|Q_0\|_I\|R_0\|_I = \|Q_1\|_I\|R_1\|_I$.

La paire (Q_1,R_1) convient.

4.31. Les polynômes Q_2 et R_2 sont de degrés respectifs n et m.

On a trivialement $\|Q_2\|_I = |Q_2(-1)| = \|Q_1\|_I$ et $\|R_2\|_I = |R_2(1)| = \|R_1\|_I$.

Par ailleurs, pour tout $x \in [-1,1]$, $|Q_2(x)R_2(x)| \leq |Q_1(x)R_1(x)| \leq \|Q_1R_1\|$.

Donc $\|Q_2R_2\|_I \leq \|Q_1R_1\|_I = \dfrac{1}{C_{n,m}}\|Q_1\|_I\|R_1\|_I = \dfrac{1}{C_{n,m}}\|Q_2\|_I\|R_2\|_I$.

On a $\|Q_2\|_I\|R_2\|_I \geq C_{n,m}\|Q_2R_2\|_I$, l'inégalité réciproque étant immédiate par définition de $C_{n,m}$ on a donc $\|Q_2\|_I\|R_2\|_I = C_{n,m}\|Q_2R_2\|_I$.

La paire (Q_2,R_2) est une bonne paire extrémale.

4.32. On a $|S_2(-1)| = |Q_2(-1)|$.

Pour $x \in [-1,1]$, par second côté de inégalité triangulaire :

$|x+1-|\omega+1|| \leq |x+1-\omega-1| = |x-\omega|$

donc $|S_2(x)| = |x+1-|\omega+1||\,|S(x)| \leq |x-\omega|\,|S(x)| = |Q_2(x)|$.

Ceci assure $\|S_2\|_I = \|Q_2\|_I = |S_2(-1)|$.

Par ailleurs, pour tout $x \in [-1,1]$, $|S_2(x)R_2(x)| \leq |Q_2(x)R_2(x)|$ donc $\|S_2R_2\|_I \leq \|Q_2R_2\|_I$.

Comme à 4.31 on a ainsi $\|S_2R_2\|_I \leq \|Q_2R_2\|_I = \dfrac{1}{C_{n,m}}\|Q_2\|_I\|R_2\|_I = \dfrac{1}{C_{n,m}}\|S_2\|_I\|R_2\|_I$.

Ce qui assure $\|S_2\|_I\|R_2\|_I = C_{n,m}\|S_2R_2\|_I$.

La paire (S_2,R_2) est une bonne paire extrémale.

4.33. On applique la question précédente avec toutes les racines de Q_2 les unes après les autres ce qui consiste à remplacer Q_2 par un polynôme Q_3 dont les racines sont exactement les $-1+|\omega+1|$ pour ω racine de Q_2 donc dont les racines sont dans $[-1,+\infty[$.

La question précédente assure que (Q_3, R_2) est toujours une bonne paire extrémale.

4.34. Supposons que ω est une racine de Q_3 qui n'est pas dans $[-1,1]$ (donc $\omega > 1$) et posons $S_3 = \dfrac{X-1}{X-\omega} Q_3$.

On pose T tel que $Q_3 = (X-\omega)T(X)$, on a $S_3 = (X-1)T(X)$

Montrons que (S_3, R_2) est toujours une bonne paire extrémale.

On a $|S_3(-1)| = 2\,|T(-1)| = \dfrac{2}{\omega+1}\,|Q_3(-1)| = \dfrac{2}{\omega+1}\,\|Q_3\|_I$.

Et pour $x \in [-1,1]$, $|S_3(x)| = \dfrac{|x-1|}{|x-\omega|}\,|Q_3(x)| \leq \dfrac{2}{\omega-x}\,\|Q_3\|_I \leq \dfrac{2}{\omega+1}\,\|Q_3\|_I = |S_3(-1)|$.

Donc $\|S_3\|_I = |S_3(-1)| = \dfrac{2}{\omega+1}\,\|Q_3\|_I$.

Enfin : $\|S_3R_2\|_I \leq \dfrac{2}{\omega+1}\,\|Q_3R_2\|_I = \dfrac{1}{C_{n,m}}\dfrac{2}{\omega+1}\,\|Q_3\|_I\,\|R_2\|_I = \dfrac{1}{C_{n,m}}\,\|S_3\|_I\,\|R_2\|_I$.

Ce qui assure $\|S_3\|_I\,\|R_2\|_I = C_{n,m}\,\|S_3R_2\|_I$.

La paire (S_3, R_2) est une bonne paire extrémale.

Puisque l'on peut procéder ainsi pour tout $\omega > 1$ racine de Q_3 on peut construire Q_4 à racines dans I tel que (Q_4, R_2) soit une bonne paire extrémale.

4.35. On applique maintenant à R_2 les mêmes méthodes pour obtenir R_3 puis R_4 et on obtient (Q_4, R_4) très bonne paire extrémale.

4.36. Posons $\widetilde{Q} = \displaystyle\prod_{k=m+1}^{m+n}(X-x_k)$ et $\widetilde{R} = \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X-x_k)$; on a $QR = \widetilde{Q}\widetilde{R}$.

Puisque les racines de Q font partie des $x_1,\ldots,x_n$ où $-1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$ on a $\|Q\|_I = |Q(-1)| \leq \left|\widetilde{Q}(-1)\right|$ et de plus $Q = \widetilde{Q} \Leftrightarrow |Q(-1)| = \left|\widetilde{Q}(-1)\right|$.

De même $\|R\|_I = |R(1)| \leq \left|\widetilde{R}(1)\right|$ et de plus $R = \widetilde{R} \Leftrightarrow |R(1)| = \left|\widetilde{R}(1)\right|$.

On a notamment $\left\|\widetilde{Q}\right\|_I \geq \|Q\|_I$ et $\left\|\widetilde{R}\right\|_I \geq \|R\|_I$.

Ainsi $\left\|\widetilde{Q}\right\|_I\left\|\widetilde{R}\right\|_I \geq \|Q\|_I\,\|R\|_I = C_{n,m}\,\|QR\|_I = C_{n,m}\left\|\widetilde{Q}\widetilde{R}\right\|_I \geq \left\|\widetilde{Q}\right\|_I\left\|\widetilde{R}\right\|_I$.

On a donc $\left\|\widetilde{Q}\right\|_I\left\|\widetilde{R}\right\|_I = \|Q\|_I\,\|R\|_I$ ce qui assure $\left\|\widetilde{Q}\right\|_I = \|Q\|_I$ et $\left\|\widetilde{R}\right\|_I = \|R\|_I$.

Les équivalences précédentes assurent bien $\widetilde{Q} = Q$ et $\widetilde{R} = R$.

4.37. C'est immédiat puisque pour tout $k \in [\![m+1, m+n]\!]$, $x \mapsto |x-x_k|$ est décroissante sur $]-\infty,-1]$.

4.38. Supposons par l'absurde que $|P(-1)| \neq \|P\|_{I_\varepsilon}$ on a donc $|P(-1)| < \|P\|_{I_\varepsilon}$.

Par continuité de P cela assure qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [-1-\varepsilon,-1]$, $|P(x)| < \|P\|_{I_\varepsilon}$.

Fixons un tel ε on a $\|P\|_{I_\varepsilon} = \|P\|_I$.

Or 4.37 assure que $\|Q\|_{I_\varepsilon} > \|Q\|_I$ et par ailleurs $\|R\|_{I_\varepsilon} \geq \|R\|_I > 0$.

On a donc $\dfrac{\|Q\|_{I_\varepsilon}\|R\|_{I_\varepsilon}}{\|P\|_{I_\varepsilon}} > \dfrac{\|Q\|_I\|R\|_I}{\|P\|_I} = C_{n,m}$.

Ce qui contredit la définition de $C_{n,m}$ (indépendant du segment) et achève la démonstration par l'absurde : on a $|P(-1)| = \|P\|_{I_\varepsilon}$.

4.39. On pose $\varepsilon > 0$.

On remarque que S est strictement positive et continue sur $[-1,1]\backslash]x_k-\varepsilon, x_{k+1}+\varepsilon[$ qui est un fermé borné donc S admet un minimum $\alpha > 0$ sur $[-1,1]\backslash]x_k-\varepsilon, x_{k+1}+\varepsilon[$.

On pose $T = S - \dfrac{\min\{\alpha,\varepsilon\}}{2}(X+1)$.

On a $T(-1) = S(-1)$.

Pour tout $x \in I$, $|T(x) - S(x)| = \dfrac{\min\{\alpha,\varepsilon\}}{2}(1+x) \leq \varepsilon$ donc $\|S-T\|_I \leq \varepsilon$.

Pour tout $x \in]-1,1]\backslash]x_k-\varepsilon, x_{k+1}+\varepsilon[$, on a $S(x) \geq \alpha$ et $0 < \dfrac{\min\{\alpha,\varepsilon\}}{2}(x+1) \leq \alpha$ donc $0 \leq T(x) < S(x)$ ce qui assure $|T(x)| < |S(x)|$.

Le polynôme T convient ; on remarque de plus que $T(-1) > 0$, $T(x_k) < 0$ et si $\varepsilon < S(1)$), $T(1) > 0$; dans ce cas par théorème des valeurs intermédiaires, T est toujours à racines dans $]-1,1[$.

Montrons par l'absurde qu'il existe $y \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $|P(y)| = \|P\|_I$, on suppose que que : $\forall y \in]x_k, x_{k+1}[$, $|P(y)| < \|P\|_I$.

Puisque $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$ on a aussi : $\forall y \in [x_k, x_{k+1}]$, $|P(y)| < \|P\|_I$, par continuité sur le fermé borné $[x_k, x_{k+1}]$ cela assure qu'on peut poser $\beta > 0$ tel que

$\forall y \in [x_k, x_{k+1}]$, $|P(y)| \leq \|P\|_I - \beta$.

Par continuité de P en ses racines x_k et x_{k+1} on peut poser $\gamma > 0$ tel que

$\forall y \in [x_k-\gamma, x_{k+1}+\gamma]$, $|P(y)| \leq \|P\|_I - \beta$.

On posant $U = \displaystyle\prod_{i\in[\![m+1,m+n]\!]\backslash\{k,k+1\}} (X - x_i)$ on a $Q = SU$ et $P = SUR$.

On pose alors $\varepsilon = \min\left\{\gamma, \dfrac{\beta}{\|UR\|_I}, S(1)\right\}$ et on considère T défini tel que ci-dessus.

On a $T(-1) = S(-1)$ donc $(TUR)(-1) = P(-1)$ et donc $\|TUR\|_I \geq \|P\|_I$.

De plus pour tout $x \in]-1,1]$:

— si $x \notin]x_k-\varepsilon, x_{k+1}+\varepsilon[$, $|T(x)| < |S(x)|$ donc $|(TUR)x)| \leq |(SUR)(x)| \leq \|P\|_I$;

— si $x \in]x_k-\varepsilon, x_{k+1}+\varepsilon[$, on aussi $x \in [x_k-\gamma, x_{k+1}+\gamma]$ donc $|P(x)| \leq \|P\|_I - \beta$.
  Or $\|S-T\|_I \leq \varepsilon$, donc $|T(x)| \leq |S(x)| + \varepsilon$ et ainsi
  $|(TUR)x)| \leq |(SUR)(x)| + \varepsilon\,|(UR)(x)| \leq |P(x)| + \varepsilon\,\|UR\|_I \leq \|P\|_I - \beta + \varepsilon\,\|UR\|_I$
  Or par définition, $\varepsilon\,\|UR\|_I \leq \beta$ donc $|(TUR)x)| \leq \|P\|_I$.

On a donc démontré que $\|TUR\|_I = \|P\|_I$.

Puisque $(TU)(-1) = Q(-1)$ donc a aussi $\|TU\|_I \geq \|Q\|_I$.

On a également $\|TU\|_I\,\|R\|_I \leq C_{n,m}\,\|TUR\|_I = C_{n,m}\,\|P\|_I = \|Q\|_I\,\|R\|_I$

donc $\|TU\|_I \leq \|Q\|_I$ et ainsi $\|TU\|_I = \|Q\|_I$.

Finalement $\|TU\|_I\,\|R\|_I = C_{n,m}\,\|TUR\|_I$ avec également $\|TU\|_I = |(TU)(-1)|$, TU unitaire de degré n et TU à racines dans $[-1,1]$, le couple (TU, R) est une très bonne paire extrémale.

Ceci implique $\|TUR\|_I = |(TUR)(1|)$ or $\|TUR\|_I = \|P\|_I = |(SUR)(1)|$, on a donc $|T(1)| = |S(1)|$ ce qui contredit la définition de T est achève la démonstration par l'absurde.

4.40. On pose $S=(X-x_m)(X-x_{m+1})$, $U=\prod_{k=m+2}^{m+n}(X-x_k)$ et $V=\prod_{k=1}^{m-1}(X-x_k)$.

On a $Q=(X-x_{m+1})U$, $R=(X-x_m)V$ et $P=USV$.

On travaille de nouveau par l'absurde pour montrer qu'il existe $y\in]x_m,x_{m+1}[$ tel que $|P(y)|=\|P\|_I$, on suppose que que : $\forall y\in]x_m,x_{m+1}[$, $|P(y)|<\|P\|_I$.

Comme ci-dessus on peut poser $\beta>0$ et $\gamma>0$ tel que
$\forall y\in[x_m-\gamma,x_{m+1}+\gamma]$, $|P(y)|\leq\|P\|_I-\beta$.

Pour un $\lambda\in]0,1[$ donné on pose $T_\lambda=\lambda(X-1)(X+1)+(1-\lambda)S$, polynôme unitaire de degré 2 qui est égal à $[1-\lambda)S$ en 1 et -1 donc strictement positif et qui est strictement négatif en x_m et x_{m+1} donc qui admet deux racines dans $]-1,1[$, l'une dans $]-1,x_m[$ et l'autre dans $]x_{m+1},1[$.

Posons $\varepsilon=\min\left\{\gamma,\dfrac{\beta}{\|UV\|_I}\right\}$.

S est strictement positive et continue sur $[-1,1]\backslash]x_m-\varepsilon,x_{m+1}+\varepsilon[$ qui est un fermé borné donc on peut poser $\alpha\in]0,1[$ qui minore S sur $[-1,1]\backslash]x_m-\varepsilon,x_{m+1}+\varepsilon[$.

De plus pour $x\in[-1,1],-1\leq(x-1)(x+1)\leq0$ donc pour λ tel que $(1-\lambda)\alpha\leq\alpha$ (i.e. $\lambda\leq\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$) on a, pour tout $x\in[-1,1]\backslash]x_m-\varepsilon,x_{m+1}+\varepsilon[$, $0\leq T(x)\leq S(x)$.

De plus $\|T_\lambda-S\|_I\leq\lambda(1+\|S\|_I)$ donc pour $\lambda\leq\dfrac{\varepsilon}{1+\|S\|_I}$ on a $\|T_\lambda-S\|_I\leq\varepsilon$.

On pose donc $\lambda=\min\left\{\dfrac{\alpha}{\alpha+1},\dfrac{\varepsilon}{1+\|S\|_I}\right\}$ et on note u et v les racines de T_λ telles que $v\in]-1,x_m[$ et $]u\in x_{m+1},1[$.

On considère alors $UT_\lambda V$ alors :

- pour tout $x\in[-1,1]\backslash]x_m-\varepsilon,x_{m+1}+\varepsilon[$ on a $|(UT_\lambda V)(x)|\leq|(USV)(x)|=|P(x)|\leq\|P\|_I$
- puisque $\varepsilon\leq\gamma$, pour tout $x\in[x_m-\varepsilon,x_{m+1}+\varepsilon]$, $|(UT_\lambda V)(x)|\leq|(USV)(x)|+\varepsilon\,|(UV)(x)|=|P(x)|+\varepsilon\,|(UV)(x)|\leq\|P\|_I-\beta+\varepsilon\,\|UV\|_I\leq\ \|P\|_I$.

On a donc justifié $\|UT_\lambda V\|_I\leq\|P\|_I$.

Or $UT_\lambda V=U(X-u)(X-v)V$ avec $v\in]-1,x_m[$ et $]u\in x_{m+1},1[$.

Ainsi $|(U(X-u))(-1)|=|U(-1)|\,(1+u)>|U(-1)|\,(1+x_{m+1})=|Q(-1)|=\|Q\|_I$ donc $\|U(X-u)\|_I>\|Q\|_I$.

De même on a $|(V(X-v))(1)|=|V(1)|\,(1-v)>|V(1)|\,(1-x_m)=|R(1)|=\|R\|_I$ donc $\|V(X-v)\|_I>\|R\|_I$.

Ainsi $\|U(X-u)\|_I\,\|V(X-v)\|_I>\|Q\|_I\,\|R\|_I=C_{n,m}\,\|P\|_I\geq C_{n,m}\,\|UT_\lambda V\|_I$

On a donc : $\|U(X-u)\|_I\,\|V(X-v)\|_I>C_{n,m}\,\|U(X-u)(X-v)V\|_I$ ce qui contredit la définition de $C_{n,m}$ et achève la démonstration par l'absurde.

4.41. Les questions précédentes assurent que pour tout $k\in[\![1,m+n-1]\!]$, P est de signe constant et admet un extremum sur $]x_k,x_{k+1}[$ en un point qu'on note y_k où on a donc $P'(y_k)=0$ et $|P(y_k)|=\|P\|_I$.

Or P' est de degré $(m+n-1)$ et de coefficient dominant $(m+n)$, les y_k sont donc exactement ses racines et $P'=(m+n)\prod_{k\in[\![1,m+n-1]\!]}(X-y_k)$

Notons $W=P^2-\|P\|_I$ qui a pour racines -1 et 1 d'une part et d'autre part tous les y_k pour $k\in[\![1,m+n-1]\!]$ où sa dérivée est également nulle, donc ces y_k sont racines d'ordre au moins 2 de W.

Ainsi $(X-1)(X+1)\prod_{k\in[\![1,m+n-1]\!]}(X-y_k)^2$ divise W qui est unitaire de degré $2(m+n)$ ce qui assure $W=(X-1)(X+1)\prod_{k\in[\![1,m+n-1]\!]}(X-y_k)^2$.

On a $W=(X-1)(X+1)\dfrac{1}{(m+n)^2}P'^2$ i.e. $\|P\|_I-P^2=\dfrac{1}{(m+n)^2}(1-X^2)P'^2$.

Remarque de l'auteur du corrigé : cette méthode ne s'inspire que peu de la précédente, peut-être l'énoncé attend-il une autre démonstration, éventuellement plus simple, mais je n'ai pas trouvé mieux.

4.42. On dérive l'égalité précédente : $-2PP'=\dfrac{1}{(m+n)^2}\left(-2XP'^2+(1-X^2)2P'P''\right)$

On a donc $\dfrac{2}{(m+n)^2}P'((m+n)^2P+(1-X^2)P''-XP')=0$;

Puisque $P'\neq 0$, par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ on a $(1-X^2)P''-XP'+(m+n)^2P=0$.

4.43. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f'(y)=-\sin(y)P'(\cos(y))$ et
$f''(y)=-\cos(y)P'(\cos(y))+(\sin(y))^2P''(\cos(y))=-\cos(y)P'(\cos(y))+(1-(\cos(y))^2)P''(\cos(y))$.
La relation $(1-X^2)P''-XP'+(m+n)^2P=0$ assure donc que, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f''(y)=-(m+n)^2f(y)$.
f est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficient constant dont l'équation caractéristique est $x^2=-(m+n)^2$ ce qui assure qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f(y)=\lambda\cos((m+n)x)+\mu\sin((m+n)y)$.
Comme $f'(0)=0$, on a $\mu=0$ et comme $f(0)=P(1)=\|P\|_I$ (car $P(1)>0$) on a $\lambda=\|P\|_I$.
Ainsi, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f(y)=\|P\|_I\cos((m+n)y)$.
Pour tout $x\in[-1,1]$ on a donc :
$P(x)=P(\cos(\arccos(x)))=f(\arccos(x))=\|P\|_I\cos((m+n)\arccos(x))$.

4.44. On a $C_{n,m}=\dfrac{\|Q\|_I\,\|R\|_I}{\|P\|_I}$.

La question précédente assure que P admet pour racines tous les $\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)$ pour $k\in[\![1,m+n]\!]$ qui sont des racines distinctes par injectivité de cos sur $[0,\pi]$. Cela donne $m+n$ racines distinctes pour P qui est de degré $m+n$ et unitaire on a donc
$P=\prod_{k=1}^{m+n}\left(X-\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right)$.

Par décroissance de cos sur $[0,\pi]$, cela assure alors que $Q=\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right)$
et $R=\prod_{k=n+1}^{m+n}\left(X-\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right)$.

On a ainsi $\|Q\|_I=|Q(-1)|=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right)$;

de même $\|R\|_I=|R(1)|=\prod_{k=n+1}^{m+n}\left(1-\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right)$.

En utilisant la formule "$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$" et le changement d'indice $j = m+n+1-k$ on a :
$$\|R\|_I = \prod_{k=n+1}^{m+n}\left(1+\cos\left(\frac{(2(m+n-k)+1)\pi}{2(m+n)}\right)\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(1+\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right).$$
Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = \|P\|_I \cos((m+n)x)$ donc le polynôme $\dfrac{P}{\|P\|_I}$ est le $(m+n)$–ième polynôme de Tchebychev de première espèce dont le coefficient dominant est 2^{m+n-1} (ce qui n'est pas au programme de P.C. bien sûr) or le coefficient dominant de P est 1 on a donc $\dfrac{1}{\|P\|_I} = 2^{m+n-1}$.
On peut donc conclure :
$$C_{n,m} = \frac{\|Q\|_I\,\|R\|_I}{\|P\|_I} = 2^{m+n-1}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\left(1+\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)\right)\right).$$