UN CORRIGÉ du SUJET X-ENS, MATH PC

Première Partie. Points fixes

1. L'application $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, telle que $\psi(x) = \varphi(x) - x$, est continue avec $\psi(a) = \varphi(a) - a \geq 0$ et $\psi(b) = \varphi(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $\psi(c) = 0$, alors c est un point fixe de φ.

2. Posons $f(x) = x - \varphi(x)$ pour x réel.

- On va montrer que, pour $|x|$ assez grand, $f(x)$ est du signe de $|x|$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $\varphi(x) = \varphi(0) + \displaystyle\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x réel. Notons $k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi'(x)\right|$, alors $k \in [0,1[$.

  - pour $x \geq 0$, on a $\varphi(x) \leq \varphi(0) + \displaystyle\int_0^x k\,\mathrm{d}t = \varphi(0) + kx$, donc $f(x) \geq (1-k)x - \varphi(0)$ d'où l'on déduit par minoration que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc $f(x) > 0$ pour x assez grand.

  - pour $x \leq 0$, on a $\varphi(x) = \varphi(0) - \displaystyle\int_x^0 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \geq \varphi(0) - (-kx) = \varphi(0) + kx$, d'où cette fois $f(x) \leq (1-k)x - \varphi(0)$ et, par majoration, on déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et $f(x) < 0$ pour x inférieur à une certaine valeur négative.

- Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue et prend des valeurs négatives et des valeurs positives, elle s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, donc φ admet au moins un point fixe.

- Si φ admettait deux points fixes c et d avec $c < d$, alors

$$d - c = \varphi(d) - \varphi(c) = \int_c^d \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_c^d k\,\mathrm{d}t = k(d-c) < d - c\,,$$

  ce qui est absurde. Le point fixe de φ est donc unique.

  Remarque. Dans toute cette question, on peut remplacer l'hypothèse de l'énoncé par celle, plus faible: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \varphi'(x) < 1$.

3. La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\psi'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. De $x^2 < 1 + x^2$, on déduit que $\left|\psi'(x)\right| < 1$ pour tout x réel. Mais, comme $x^2 \neq 1 + x^2$, il est clair que ψ n'admet pas de point fixe. L'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\varphi'(x)\right| < 1$ n'est donc pas suffisante pour garantir l'existence d'un point fixe de φ dans la question **2.**

Ici, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi'(x) = 1$, *on a* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\psi'(x)\right| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \psi'(x) = 1$.

4.a. Le symbole $\|\cdot\|$ représentant dans cette question la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^l$, si on note $v_n^{(1)}, \cdots, v_n^{(l)}$ les coordonnées du vecteur v_n, on a

$$\forall j \in [\![1,l]\!] \qquad \left(v_{n+1}^{(j)} - v_n^{(j)}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{l} \left(v_{n+1}^{(i)} - v_n^{(i)}\right)^2 = \|v_{n+1} - v_n\|^2\,,$$

donc pour tout j, $\left|v_{n+1}^{(j)} - v_n^{(j)}\right| \leq \|v_{n+1} - v_n\|$ et, par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(v_{n+1}^{(j)} - v_n^{(j)}\right)$ est donc absolument convergente. Cette série est donc convergente et, comme c'est la série télescopique associée à la suite $(v_n^{(j)})_{n\geq 0}$, on en déduit la convergence de cette suite pour tout j. Enfin, la convergence d'une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^l$ s'étudiant coordonnée par coordonnée, on a bien montré la convergence de la suite vectorielle (v_n).

b. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour $p > n$, on a

$$\|v_n - v_p\| = \left\| \sum_{k=n}^{p-1} (v_k - v_{k+1}) \right\| \leq \sum_{k=n}^{p-1} \|v_{k+1} - v_k\| \, .$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ (la norme étant continue car elle est 1-lipschitzienne), on obtient

$$\|v_n - v^*\| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|v_{k+1} - v_k\| \, .$$

5.a. Comme φ va de F dans F, x_n est bien défini pour tout n entier naturel et $x_n \in F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \big\|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\big\| \leq k \, \|x_n - x_{n-1}\|$$

puis, par une récurrence immédiate, $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \, \|x_1 - x_0\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par comparaison à une série géométrique, la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ est donc convergente ce qui, d'après **4.a.**, entraîne la convergence de la suite vectorielle (x_n). Enfin, F est une partie fermée (non vide) de $\mathbb{R}^l$, i.e. stable par passage à la limite. La limite de la suite (x_n) est donc un élément de F.

b. Montrons d'abord l'unicité: si x et y sont deux points fixes de φ dans F, alors

$$\|x - y\| = \big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\| \leq k \, \|x - y\| \, ,$$

ce qui n'est possible que si $x = y$ puisque $k < 1$.

Pour l'existence, soit $x_0 \in F$, soit (x_n) la suite définie comme en **5.a.**, alors cette suite converge vers un vecteur y de F et, de la relation $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ valable pour tout n, on déduit en passant à la limite (grâce à la continuité de φ) que $y = \varphi(y)$, donc y est un point fixe de φ dans F.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|x_n - x^*\| = \big\|\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)\big\| \leq k \, \|x_{n-1} - x^*\|$$

puis, par une récurrence immédiate, $\|x_n - x^*\| \leq k^n \, \|x_0 - x^*\|$.

d. L'unicité est immédiate: si $y \in F$ est un point fixe de θ, alors c'est aussi un point fixe de $\varphi = \theta^m$ (notation pour $\theta \circ \cdots \circ \theta$ avec m facteurs), donc $y = x^*$.

Il reste à prouver que $\theta(x^*) = x^*$. Or, $\theta^{m+1}(x^*) = \theta\big(\theta^m(x^*)\big) = \theta\big(\varphi(x^*)\big) = \theta(x^*)$, mais aussi $\theta^{m+1}(x^*) = \theta^m\big(\theta(x^*)\big) = \varphi\big(\theta(x^*)\big)$, donc $\varphi\big(\theta(x^*)\big) = \theta(x^*)$ et, comme φ admet pour seul point fixe x^*, on déduit que $\theta(x^*) = x^*$.

6. L'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient 0) et majorée (elle est incluse dans $[0, 1]$), elle admet donc une borne supérieure M.

Si $x \in E$, on a $x \leq M$ donc $x \leq g(x) \leq g(M)$, la première inégalité car $x \in E$, la deuxième car g est croissante. Donc $g(M)$ est un majorant de l'ensemble E, d'où $g(M) \geq M$ puisque M est le plus petit majorant de E.

Par croissance de g, cela entraîne $g\big(g(M)\big) \geq g(M)$, donc $g(M) \in E$ et $g(M) \leq M$.

Finalement, $g(M) = M$, et M est un point fixe de g.

Deuxième Partie. Matrices contractantes

1. On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & a(\lambda+\mu) \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & a(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2) \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix}$, et on conjecture que

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & a\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k} \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}$$ pour $n \geq 1$, le lecteur se chargera de vérifier l'hérédité.

- Si $\lambda = \mu$, on peut écrire $T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & an\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.
- Si $\lambda \neq \mu$, on a $T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & a\dfrac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$.

2.a. La matrice A est trigonalisable: $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On a alors $\rho(A) = \rho(T) = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$. Notons $t_{k,l}^{(n)}$ le coefficient d'indices (k,l) de la matrice T^n avec $n \in \mathbb{N}$ et $(k,l) \in \{1,2\}^2$. Alors $\left|t_{1,1}^{(n)}\right| = |\lambda|^n \leq \big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n$, idem pour majorer $\left|t_{2,2}^{(n)}\right|$. Passons vite sur $t_{2,1}^{(n)}$ qui est nul! Enfin,

$$\frac{\left|t_{1,2}^{(n)}\right|}{\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n} = \frac{\left|a \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k}\right|}{\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n} \leq \frac{|a|\; n\; \rho(A)^{n-1}}{\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées de la suite (n) et de la suite géométrique $\left(\left(\dfrac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^n\right)$. Comme toute suite convergente est bornée, on conclut qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout couple $(k,l) \in \{1,2\}^2$, on ait $\left|t_{k,l}^{(n)}\right| \leq C\,\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n$.

Ensuite, si $a_{i,j}^{(n)}$ est le coefficient d'indices (i,j) de la matrice A^n, on a $a_{i,j}^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} p_{i,k} t_{k,l}^{(n)} q_{l,j}$, où les $p_{i,k}$ et les $q_{l,j}$ sont les coefficients de P et de P^{-1}. En posant $M = \max\limits_{i,k} |p_{i,k}|$ et $M' = \max\limits_{l,j} |q_{l,j}|$, on a enfin $\left|a_{i,j}^{(n)}\right| \leq 4CMM'\,\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n$ pour tout n et pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$.

b. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$. Si on pose $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, on a facilement l'encadrement $\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$.

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, posons $N_\infty(M) = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$.

Il est alors immédiat de vérifier la majoration $\|Mx\|_\infty \leq 2\, N_\infty(M) \cdot \|x\|_\infty$.

La question **a.** fournit la majoration $N_\infty(A^n) \leq \alpha\,\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n$. On en déduit que

$$\|A^n x\| \leq \sqrt{2}\,\|A^n x\|_\infty \leq 2\alpha\sqrt{2}\,\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n \|x\|_\infty \leq 2\alpha\sqrt{2}\,\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^n \|x\|\ .$$

3.a. En choisissant $\varepsilon = \dfrac{\eta}{2}$ dans la majoration obtenue en **2.b.**, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \big(\rho(A)+\eta\big)^{-n}\,\|A^n x\| \le \beta\,\|x\| \left(\frac{\rho(A)+\frac{\eta}{2}}{\rho(A)+\eta}\right)^n ,$$

d'où la convergence de la série par comparaison à une série géométrique.

b. On a clairement $N(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^2$, et $N(0) = 0$. Si $N(x) = 0$, alors tous les termes de la série à termes positifs sont nuls, notamment pour $n = 0$ d'où $\|x\| = 0$ puis $x = 0$, ce qui donne l'axiome de séparation. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\big\|A^n(\lambda x)\big\| = \|\lambda A^n x\| = |\lambda|\,\|A^n x\|$ pour tout n, puis $N(\lambda x) = |\lambda|\,N(x)$, d'où l'homogénéité. Enfin, si $(x,y) \in (\mathbb{C}^2)^2$, alors pour tout n, $\big\|A^n(x+y)\big\| = \|A^n x + A^n y\| \le \|A^n x\| + \|A^n y\|$, puis $N(x+y) \le N(x) + N(y)$, soit l'inégalité triangulaire. Donc N est bien une norme sur $\mathbb{C}^2$.

D'autre part, par un décalage d'indice,

$$N(Ax) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\rho(A)+\eta\big)^{-n}\,\|A^{n+1}x\| = \big(\rho(A)+\eta\big) \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\rho(A)+\eta\big)^{-m}\,\|A^m x\| \le \big(\rho(A)+\eta\big)\,N(x)\ .$$

c. Tout d'abord, la somme de la série à termes positifs est plus grande que son premier terme, donc $\|x\| \le N(x)$.

Avec la majoration écrite en **3.a.**, on voit que $N(x) \le C\,\|x\|$, où $C = \beta \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho(A)+\frac{\eta}{2}}{\rho(A)+\eta}\right)^n$.

4.a. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$ est une matrice diagonale, alors $\rho(D) = \max\limits_{1\le i\le l} |\lambda_i|$ et, si $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \mathbb{C}^l$, on a

$$||Dx|| = \sqrt{\lambda_1^2 x_1^2 + \cdots + \lambda_l^2 x_l^2} \le \rho(D)\,\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_l^2} = \rho(D)\,\|x\|\ .$$

Si $B \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$ est diagonalisable, alors $B = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$ diagonale. On a alors $\rho(B) = \rho(D)$ et, en posant $N_P(x) = \|P^{-1}x\|$ pour tout $x \in \mathbb{C}^l$, il est immédiat que N_P est une norme sur $\mathbb{C}^l$.

Posons alors $\|x\|_B = N_P(x) = \|P^{-1}x\|$ pour tout $x \in \mathbb{C}^l$, on a donc une norme sur $\mathbb{C}^l$ et

$$\forall x \in \mathbb{C}^l \qquad \|Bx\|_B = \|P^{-1}Bx\| = \|DP^{-1}x\| \le \rho(D)\,\|P^{-1}x\| = \rho(B)\,\|x\|_B\ .$$

b. Prenons $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\rho(C) = 1$ et $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $C^n x = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ pour tout n donc, quelle que soit la norme N choisie sur $\mathbb{C}^2$, la suite $(C^n x)$ n'est pas bornée dans $\mathbb{C}^2$. *Sans parler explicitement de normes équivalentes, les programmes actuels semblent en effet admettre que la notion de "suite bornée" ou de "partie bornée" ne dépend pas du choix de la norme dans un espace vectoriel de dimension finie.* Il existe donc au moins un entier n tel que $N(C^{n+1}x) > N(C^n x)$, *c'est évident en raisonnant par l'absurde.* En posant $y = C^n x$ pour un tel entier n, on a bien $N(Cy) > \rho(C)\,N(y)$.

5. Soit r un réel tel que $\rho(A) < r < 1$. La question **3.** permet de construire sur $\mathbb{C}^2$, ou bien sur $\mathbb{R}^2$ par restriction, une norme N telle que, pour tout $x \in \mathbb{C}^2$, on ait

$$N(Ax) \le r\,N(x) \qquad \text{et} \qquad \|x\| \le N(x) \le C\,\|x\| ,$$

où C est une certaine constante strictement positive.

De l'hypothèse de l'énoncé, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\big\|x_{n+1} - x^* - A(x_n - x^*)\big\| \leq M \, \|x_n - x^*\|^2 \ ,$$

d'où

$$N\big(x_{n+1} - x^* - A(x_n - x^*)\big) \leq MC \, \|x_n - x^*\|^2 \ ,$$

puis, par inégalité triangulaire,

$$N(x_{n+1} - x^*) \leq N\big(A(x_n - x^*)\big) + MC \, \|x_n - x^*\|^2 \ ,$$

et enfin

$$\textbf{(*):} \ \ N(x_{n+1} - x^*) \leq r \, N(x_n - x^*) + MC \, \big(N(x_n - x^*)\big)^2 \ .$$

Prouvons alors le lemme suivant:

<u>Lemme</u>: Soient k et r des réels strictement positifs, avec $r < 1$, soit (a_n) une suite réelle telle que $a_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq a_{n+1} \leq r \, a_n + k \, a_n^2 \ .$$

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, si $0 < a_0 < \alpha$, la suite (a_n) tend vers 0.

<u>Preuve</u>. Pour $x \geq 0$, posons $f(x) = rx + kx^2$, on constate alors que $f(0) = 0$ et $f(\alpha) = \alpha$ en posant $\alpha = \dfrac{1-r}{k}$. Comme f est croissante, le segment $[0, \alpha]$ est stable par f. Comme $f(x) - x = kx(x - \alpha)$, on a $f(x) \leq x$ sur $[0, \alpha]$. On en déduit que, si (b_n) est la suite définie par $b_0 = a_0$ et, pour tout n, $b_{n+1} = f(b_n) = rb_n + kb_n^2$, alors la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente, et que sa limite est nulle car 0 est le seul point fixe de f strictement inférieur à α. Enfin, par une récurrence immédiate, on a $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ par encadrement.

D'après **(*)**, la suite $\big(N(x_n - x^*)\big)$ vérifie les hypothèses du lemme avec $k = MC$, on en déduit que, si $N(x_0 - x^*) < \dfrac{1-r}{MC}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} N(x_n - x^*) = 0$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1-r}{MC^2}$, on a trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|x_0 - x^*\| < \varepsilon$, alors (x_n) converge vers x^* dans $\mathbb{R}^2$.

Troisième Partie. Fonctions de deux variables réelles

1.a. D'abord pour $s_1 \in [a, b]$ fixé, en invoquant le théorème de Schwarz,

$$\widehat{h}(s_1) = \int_c^d \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_2}\Big(\partial_1 h(s_1, s_2)\Big) \, \mathrm{d}s_2 = \partial_1 h(s_1, d) - \partial_1 h(s_1, c) \ .$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \int_a^b \widehat{h}(s_1) \, \mathrm{d}s_1 &= \int_a^b \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, d) \, \mathrm{d}s_1 - \int_a^b \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, c) \, \mathrm{d}s_1 \\ &= \big(h(b, d) - h(a, d)\big) - \big(h(b, c) - h(a, c)\big) \ , \end{aligned}$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

b. Notons d'abord que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors il existe $u \in]a,b[$ tel que **(**)**: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\,f(u)$. *En effet, si F est une primitive de f sur $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$, et l'égalité des accroissements finis, puisque F est dérivable sur $[a,b]$, montre l'existence de $u \in]a,b[$ tel que $F(b)-F(a) = (b-a)\,F'(u) = (b-a)\,f(u)$.*

Ici, l'application $\widehat{h}$ est continue sur $[a,b]$. En effet, c'est une intégrale à paramètre, l'application $f = \dfrac{\partial^2 h}{\partial s_1\,\partial s_2}$ étant continue sur le pavé $K = [a,b]\times[c,d]$, ce qui entraîne la continuité de ses applications partielles. Le théorème des bornes atteintes affirme l'existence de $M = \sup\limits_K |f|$ puisque K est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, et ceci fournit une domination valide pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre puisque la fonction constante $s_2 \mapsto M$ est intégrable sur le segment $[c,d]$.

En appliquant la propriété **(**)** ci-dessus à $\widehat{h}$ qui est continue sur $[a,b]$, on déduit l'existence de $\overline{s}_1 \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b \widehat{h}(s_1)\,\mathrm{d}s_1 = (b-a)\,\widehat{h}(\overline{s}_1)$, ce qui est la première des deux égalités à prouver d'après le **a.**

Enfin, l'application $g : s_2 \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial s_1\,\partial s_2}(\overline{s}_1, s_2)$ est continue sur $[c,d]$ puisque c'est une application partielle de $f = \dfrac{\partial^2 h}{\partial s_1\,\partial s_2}$ qui est continue sur le pavé K. On lui applique de nouveau **(**)**, on a donc l'existence de $\overline{s}_2 \in]c,d[$ tel que

$$\widehat{h}(\overline{s}_1) = \int_c^d g(s_2)\,\mathrm{d}s_2 = (d-c)\;g(\overline{s}_2) = (d-c)\;\frac{\partial^2 h}{\partial s_1\,\partial s_2}(\overline{s}_1,\overline{s}_2)\ .$$

On déduit de cela les égalités demandées.

2. L'application f est continue et strictement croissante sur I, donc établit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ ("corollaire du théorème des valeurs intermédiaires").

Le cours indique que, si f' ne s'annule pas sur I, alors $g = f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur J avec

$$\forall y \in J \qquad g'(y) = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)}\ , \qquad \text{donc} \qquad \forall x \in I \quad g'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}\ ,$$

puis les fonctions f' et g étant dérivables sur I et J respectivement,

$$\forall y \in J \qquad g''(y) = -\frac{g'(y)\;f''\big(g(y)\big)}{f'\big(g(y)\big)^2} = -\frac{f''\big(g(y)\big)}{f'\big(g(y)\big)^3}\ ,$$

soit $\forall x \in I \quad g''\big(f(x)\big) = -\dfrac{f''(x)}{f'(x)^3}$.

3.a. Posons $\displaystyle\varphi(x,y) = \int_0^1 g'\big(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\big)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 g'\Big(\lambda\big(f(x)-f(y)\big) + f(y)\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$

Le changement de variable affine $t = \lambda\big(f(x) - f(y)\big) + f(y)$ fournit

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{f(x)-f(y)} \int_{f(y)}^{f(x)} g'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(y)\big)}{f(x)-f(y)} = \frac{x-y}{f(x)-f(y)}\ ,$$

donc

$$x - f(x)\,\varphi(x,y) = x - f(x)\,\frac{x-y}{f(x)-f(y)} = \frac{y\,f(x) - x\,f(y)}{f(x)-f(y)} = H_f(x,y)\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

b. *Pour traiter cette question et la suivante, faut-il admettre que les théorèmes de continuité et de dérivabilité (disons plutôt de "classe $\mathcal{C}^2$-ité") des intégrales à paramètre s'étendent au cas de deux paramètres ?*

Admettons cela. J'appellerai aussi "compact" toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Pour $(x,y,\lambda) \in I \times I \times [0,1]$, posons $\psi(x,y,\lambda) = g'\big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big)$. L'application ψ est continue sur $I \times I \times [0,1]$ comme composée de fonctions continues, ce qui entraîne, pour tout $\lambda \in [0,1]$, la continuité sur $I \times I$ de $(x,y) \mapsto \psi(x,y,\lambda)$. Si K est un compact inclus dans $I \times I$ alors, par le théorème des bornes atteintes, ψ est bornée sur le compact $K \times [0,1]$, i.e.

$$\exists M_K > 0 \quad \forall (x,y,\lambda) \in K \times [0,1] \qquad \big|\psi(x,y,\lambda)\big| \le M_K\ ,$$

et cela fournit une domination valide pour appliquer le théorème de continuité sur K puisque l'application constante $\lambda \mapsto M_K$ est intégrable sur le segment $[0,1]$. On en déduit que l'application $\varphi : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \psi(x,y,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ est continue sur tout compact inclus dans $I \times I$, puis qu'elle est continue sur $I \times I$. Ainsi, l'application

$$G_f : (x,y) \mapsto x - f(x)\,\varphi(x,y) = x - f(x) \int_0^1 g'\big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big)\,\mathrm{d}\lambda$$

est continue sur $I \times I$. Comme G_f coïncide avec H_f sur $(I \times I)\backslash\Delta$ avec $\Delta = \big\{(x,x)\ ;\ x \in I\big\}$, on voit que G_f est un prolongement continu de H_f sur $I \times I$. C'est le seul puisque tout point (x,x) de Δ est limite d'une suite de points de $(I \times I) \setminus \Delta$, par exemple de la suite $\Big(x, x + \dfrac{1}{n}\Big)$ pour n assez grand, il est donc nécessaire de poser $H_f(x,x) = G_f(x,x)$ pour avoir un prolongement par continuité de H_f à $I \times I$.

c. L'application ψ introduite en **b.** admet des dérivées partielles premières et secondes par rapport aux variables x et y, à savoir, pour tout $(x,y,\lambda) \in I \times I \times [0,1]$, en posant $u = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ pour abréger,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,\lambda) = \lambda\ f'(x)\ g''(u)\ , \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,\lambda) = (1-\lambda)\ f'(y)\ g''(u)\ ,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = \lambda\ f''(x)\ g''(u) + \lambda^2\ f'(x)^2\ g^{(3)}(u)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = (1-\lambda)\ f''(y)\ g''(u) + (1-\lambda)^2\ f'(y)^2\ g^{(3)}(u)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x}(x,y,\lambda)=\lambda\,(1-\lambda)\;f'(x)\;f'(y)\;g^{(3)}(u)\;.$$

Ces dérivées partielles sont continues sur $I\times I\times[0,1]$, et se laissent gentiment dominer par des constantes sur $K\times[0,1]$ par le théorème des bornes atteintes, si K est un compact inclus dans $I\times I$. On en déduit alors le caractère $\mathcal{C}^2$ de $\varphi:(x,y)\mapsto\displaystyle\int_0^1\psi(x,y,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$, puis de G_f, donc de H_f sur $I\times I$, ainsi que la possibilité de calculer les dérivées partielles premières et secondes de φ par dérivation sous le signe intégrale.

d. Pour $x\in I$, on a

$$H_f(x,x)=G_f(x,x)=x-f(x)\int_0^1 g'\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}\lambda=x-f(x)\;g'\big(f(x)\big)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\;.$$

4.a. On note que $H_f(x^*,x^*)=x^*-\dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)}=x^*$, de même que (si $x\neq x^*$ et $y\neq x^*$), puisque $f(x^*)=0$,

$$H_f(x^*,y)=\frac{x^*f(y)-yf(x^*)}{f(y)-f(x^*)}=x^*\qquad\text{et}\qquad H_f(x,x^*)=\frac{xf(x^*)-x^*f(x)}{f(x^*)-f(x)}=x^*\;,$$

donc

$$H_f(x,y)-x^*=H_f(x,y)-H_f(x^*,y)-H_f(x,x^*)+H_f(x^*,x^*)$$

et, d'après **1.b.**, cette expression peut se mettre sous la forme $(x-x^*)(y-x^*)\,\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial x\,\partial y}(\overline{x},\overline{y})$ avec $\overline{x}\in I_x$ et $\overline{y}\in I_y$.

Si $x=x^*$ ou $y=x^*$, alors l'égalité à montrer est triviale avec $\overline{x}=x^*$ ou $\overline{y}=x^*$.

Remarque. Le résultat de **1.b.** reste bien sûr valable si $a>b$ ou $c>d$, avec $\overline{s}_1$ entre a et b, et $\overline{s}_2$ entre c et d.

b. De l'écriture $H_f(x,y)=x-f(x)\,\varphi(x,y)$, on déduit que $\dfrac{\partial H_f}{\partial y}(x,y)=-f(x)\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$, puis que

$$\forall(x,y)\in I\times I\qquad\frac{\partial^2 H_f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=-f'(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)-f(x)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}(x,y)\;.$$

En particulier, $\dfrac{\partial^2 H_f}{\partial x\,\partial y}(x^*,x^*)=-f'(x^*)\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x^*,x^*)$.

Or, de la question **3.c.**, on déduit que, pour tout $(x,y)\in I\times I$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\int_0^1\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=f'(y)\int_0^1(1-\lambda)\;g''\big(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\big)\,\mathrm{d}\lambda\;.$$

En particulier, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x^*,x^*)=f'(x^*)\;g''\big(f(x^*)\big)\displaystyle\int_0^1(1-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=-\frac{f''(x^*)}{2\,f'(x^*)^2}$ en utilisant la question **2.** Finalement,

$$\frac{\partial^2 H_f}{\partial x\,\partial y}(x^*,x^*)=\frac{f''(x^*)}{2\,f'(x^*)}\;.$$

Quatrième Partie. Méthode de la sécante

1. Si $x_n \neq x_{n-1}$, la droite sécante L_n a pour équation $y - f(x_{n-1}) = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1})$.

Comme $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ puisque f est injective sur I, cette droite intersecte l'axe Ox au point d'abscisse

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1})\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}\,f(x_n) - x_n\,f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = H_f(x_{n-1}, x_n)\ .$$

Cette relation est valable aussi si $x_n = x_{n-1}$ car alors la tangente L_n a pour équation $y - f(x_n) = f'(x_n)\,(x - x_n)$ et elle intersecte alors l'axe Ox au point d'abscisse $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = H_f(x_n, x_n)$ d'après **3.d.** de la troisième partie.

Remarque. Dans les deux cas, ce point x_{n+1} n'appartient pas nécessairement à I.

2.a. On a

$$\begin{aligned}
\big|h(x)\big| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - h(x)^2 > 0 \iff 1 - \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^2 > 0 \iff (x-\beta)^2 - (x-\alpha)^2 > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2(\alpha - \beta)\,x + \beta^2 - \alpha^2 > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha - \beta}{2} \iff x \in I\ .
\end{aligned}$$

b. Notons d'abord que $H_f(x,y) = \dfrac{xy - \alpha\beta}{(x+y) - (\alpha + \beta)}$ pour $(x,y) \in I^2$, expression valable aussi si $x = y$ (*le détail du calcul est laissé au lecteur*).

Si, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, x_{n-1} et x_n sont bien définis et appartiennent à I, alors $|u_{n-1}| < 1$, $|u_n| < 1$ et, sans trop détailler les calculs,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_{n+1} - \beta} = \frac{H_f(x_{n-1}, x_n) - \alpha}{H_f(x_{n-1}, x_n) - \beta} \\
&= \frac{x_{n-1}x_n - \alpha(x_{n-1} + x_n) + \alpha^2}{x_{n-1}x_n - \beta(x_{n-1} + x_n) + \beta^2} \\
&= \frac{x_{n-1} - \alpha}{x_{n-1} - \beta}\,\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} = u_{n-1}\,u_n\ ,
\end{aligned}$$

donc $|u_{n+1}| < 1$, ce qui montre que $x_{n+1} \in I$.

Par récurrence, si x_0 et x_1 sont dans I, alors x_n est bien défini et $x_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_{n+1}| = |u_{n-1}|\,|u_n| \leq |u_n|$. La suite $\big(|u_n|\big)$ est donc décroissante à partir du rang 1 et, comme elle est minorée par 0, elle converge. Si on pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|$, on a $l = l^2$, d'où $l = 0$ ou $l = 1$. Mais $l = 1$ est impossible puisque $\big(|u_n|\big)$ décroît avec $|u_0| < 1$. Donc $l = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Puis $x_n = \dfrac{\alpha - \beta u_n}{1 - u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

d. Posons $v_n = -\ln|u_n|$ pour tout n, alors $v_n > 0$ et on a la relation de récurrence linéaire d'ordre deux: $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$

admet pour racines le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et le nombre $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, on a donc $v_n = A\,\varphi^n + B\,\psi^n$ avec A et B réels. Si $A < 0$, alors v_n serait négatif pour n grand, c'est absurde. Si $A = 0$, alors v_n serait de signe alterné, c'est absurde aussi. Donc $A > 0$ et on a alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A\varphi^n$. En prenant par exemple $M = \dfrac{A}{2}$, alors $M > 0$ et, pour n assez grand, on a $v_n \geq M\varphi^n$ donc $|u_n| = e^{-v_n} \leq e^{-M\varphi^n}$. Comme $x_n - \alpha = (\alpha - \beta)\,\dfrac{u_n}{1-u_n}$ et que $u_n \leq \dfrac{1}{2}$ pour n assez grand, on a, à partir d'un certain rang, la majoration

$$|x_n - \alpha| \leq 2(\alpha-\beta)\,e^{-M\varphi^n}\ ,$$

qui entraîne $x_n - \alpha = O\Big(e^{s\varphi^n}\Big)$, avec $s = -M < 0$.

3.a. L'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \subset I$, et tel que f' reste strictement positif sur ce segment, résulte simplement du caractère ouvert de I et de la continuité de f'.

b. D'après **4.a.** de la troisième partie, il existe $\overline{x}$ entre x^* et x_{n-1}, et $\overline{y}$ entre x^* et x_n (ces points sont donc tous deux dans $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$) tels que

$$x_{n+1} - x^* = H_f(x_{n-1}, x_n) - x^* = (x_{n-1} - x^*)(x_n - x^*)\,\frac{\partial^2 H_f}{\partial x\,\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\ .$$

La majoration $|x_{n+1} - x^*| \leq M\,|x_{n-1} - x^*| \cdot |x_n - x^*|$ s'en déduit immédiatement.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si x_{n-1} et x_n sont bien définis et sont dans $[x^* - \varepsilon', x^* + \varepsilon']$, alors ils sont tous deux dans $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$, et le **b.** montre que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M\varepsilon'^2 = (M\varepsilon')\,\varepsilon' < \varepsilon'\ ,$$

donc x_{n+1} est dans $[x^* - \varepsilon', x^* + \varepsilon']$.

En initialisant avec x_0 et x_1 dans $[x^* - \varepsilon', x^* + \varepsilon']$, on définit bien une suite (x_n) à valeurs dans $[x^* - \varepsilon', x^* + \varepsilon']$.

Cette suite (x_n) converge alors vers x^* puisque, pour $n \geq 1$, on a $|x_{n+1} - x^*| \leq M\varepsilon' |x_n - x^*|$, donc par une récurrence immédiate, $|x_n - x^*| \leq (M\varepsilon')^{n-1}\,|x_1 - x^*|$ avec $M\varepsilon' < 1$.