

École Polytechnique - ESPCI  
Écoles Normales Supérieures

Concours d'admission 2022

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

**Notations**

- Si  $z$  est un nombre complexe on note  $|z|$  son module.
- Si  $\ell$  est un entier strictement positif, on munit l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^\ell$  de la norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\ell} |x_j|^2}$$

pour  $x = (x_1, \dots, x_\ell)$ .

- On note  $\mathbf{M}_\ell(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices de taille  $\ell \times \ell$  à coefficients complexes.
- Si  $A \in \mathbf{M}_\ell(\mathbb{C})$ , on désigne par  $\sigma(A)$  (le *spectre* de  $A$ ) l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$ , et

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$$

le *rayon spectral* de  $A$ .

- Étant donné un ensemble  $E$ , un *point fixe* d'une application  $\phi : E \rightarrow E$  est un élément  $x$  de  $E$  tel que  $\phi(x) = x$ .
- Les trois premières parties sont mutuellement indépendantes. La quatrième partie utilise des résultats établis dans la troisième.

**Première Partie. Points fixes**

1. Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ . Si  $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  est continue, montrer que  $\phi$  possède au moins un point fixe.
2. Si  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie

$$(1) \quad \sup\{|\phi'(x)|; x \in \mathbb{R}\} < 1,$$

montrer que  $\phi$  possède au moins un point fixe (on pourra étudier le signe de  $x - \phi(x)$  pour  $|x|$  assez grand). Montrer que ce point fixe est unique.

3. Au moyen de la fonction  $\psi(x) = \sqrt{1+x^2}$ , montrer que dans la question précédente l'hypothèse (1) ne peut pas être remplacée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\phi'(x)| < 1.$$

4. Soit  $\ell$  un entier strictement positif. On se donne une suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  de vecteurs dans  $\mathbb{R}^\ell$  telle que la série  $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$  converge.
  - (a) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est convergente.
  - (b) Notons  $v^*$  la limite de cette suite. Majorer  $\|v_n - v^*\|$  au moyen d'un reste de la somme de la série  $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$ .
5. Soit  $\ell$  un entier strictement positif. Soit  $F$  une partie fermée de  $\mathbb{R}^\ell$  et soit  $\phi : F \rightarrow F$  une application. On suppose qu'il existe  $k \in [0, 1[$  tel que

$$\forall x \in F, \quad \forall y \in F, \quad \|\phi(y) - \phi(x)\| \leq k\|y - x\|.$$

- (a) On choisit un point  $x_0 \in F$ . Montrer que la formule  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  définit une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $F$ , et que cette suite est convergente dans  $F$ .
- (b) En déduire que  $\phi$  possède un unique point fixe dans  $F$ .

(c) Ce point fixe étant noté  $x^*$ , majorer  $\|x_n - x^*\|$  en fonction de  $\|x_0 - x^*\|$ .

(d) Dans ce qui précède, on suppose que

$$\phi = \underbrace{\theta \circ \dots \circ \theta}_{m \text{ fois}},$$

où  $\theta : F \rightarrow F$  est une application et  $m \geq 2$  est un entier. Montrer que  $\theta$  possède un point fixe, et un seul, dans  $F$ .

6. Soit  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction croissante (mais pas nécessairement continue). Montrer que  $g$  possède au moins un point fixe. *Indication : on pourra considérer l'ensemble*

$$E = \{x \in [0, 1]; x \leq g(x)\}.$$

### Deuxième Partie. Matrices contractantes

1. Pour une matrice triangulaire  $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ , calculer explicitement les puissances successives  $T^n$  pour  $n$  entier strictement positif.

2. Soit  $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$  une matrice et soit  $\epsilon > 0$  un nombre réel.

(a) Montrer l'existence d'un nombre réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout entier positif  $n$  les valeurs absolues des coefficients de  $A^n$  soient majorées par  $\alpha(\rho(A) + \epsilon)^n$ .

(b) En déduire l'existence d'un nombre réel  $\beta > 0$  tel que pour tout entier positif  $n$  et tout  $x \in \mathbb{C}^2$  on ait

$$\|A^n x\| \leq \beta(\rho(A) + \epsilon)^n \|x\|.$$

3. Soit  $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$  une matrice et soit  $\eta$  un nombre réel strictement positif.

(a) Pour  $x \in \mathbb{C}^2$ , montrer que la série

$$\sum_n (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\|$$

est convergente.

On note

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\|$$

la somme de cette série.

(b) Montrer que  $x \mapsto N(x)$  est une norme sur  $\mathbb{C}^2$ , qui satisfait l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{C}^2, \quad N(Ax) \leq (\rho(A) + \eta)N(x),$$

(c) Montrer qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{C}^2$  on ait

$$\|x\| \leq N(x) \leq C\|x\|.$$

4. (a) Si  $B \in \mathbf{M}_\ell(\mathbb{C})$  est diagonalisable, montrer qu'il existe une norme  $\|\cdot\|_B$  sur  $\mathbb{C}^\ell$  telle que  $\|Bx\|_B \leq \rho(B)\|x\|_B$  pour tout  $x \in \mathbb{C}^\ell$ . *Indication : on pourra vérifier que si  $P \in \mathbf{GL}_\ell(\mathbb{C})$ , alors  $x \mapsto \|Px\|$  est une norme sur  $\mathbb{C}^\ell$ .*

(b) Montrer qu'il existe une matrice  $C \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$  telle que, pour toute norme  $N$  sur  $\mathbb{C}^2$  il existe  $y \in \mathbb{C}^2$  tel que  $N(Cy) > \rho(C)N(y)$ .

5. Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application et soit  $x^*$  un point fixe de  $\phi$ . Soit  $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice vérifiant  $\rho(A) < 1$ , et soit  $M > 0$  un nombre réel. On suppose que  $\phi$  satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|\phi(x) - \phi(x^*) - A(x - x^*)\| \leq M \|x - x^*\|^2.$$

Montrer qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  satisfaisant  $\|x_0 - x^*\| < \epsilon$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  (pour  $n \geq 0$ ) converge vers  $x^*$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### Troisième Partie. Fonctions de deux variables réelles

1. Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres réels tels que  $a \leq b$  et  $c \leq d$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $[a, b] \times [c, d]$ . Soit  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ .

(a) Montrer l'identité

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = \int_a^b \hat{h}(s_1) ds_1,$$

où  $\hat{h}$  est définie par

$$\hat{h}(s_1) = \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2) ds_2.$$

(b) En déduire qu'il existe un point  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  de  $[a, b] \times [c, d]$  tel qu'on ait les deux égalités

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = (b - a)\hat{h}(\bar{s}_1) = (b - a)(d - c) \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\bar{s}_1, \bar{s}_2).$$

2. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . On se donne une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ , telle que  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ . Montrer que  $f$  est bijective de  $I$  sur l'intervalle ouvert  $f(I)$ .

On note  $g : f(I) \rightarrow I$  sa fonction réciproque. Rappeler la valeur de  $g'(f(x))$ . Exprimer  $g''(f(x))$  en fonction des dérivées successives de  $f$  en  $x$ .

3. On conserve, jusqu'à la fin de cette troisième partie, les hypothèses et la notation de la question précédente. Pour  $x, y \in I$  tels que  $y \neq x$ , on pose

$$H_f(x, y) = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}.$$

(a) Montrer que pour tous  $x, y \in I$  tels que  $y \neq x$  on a

$$H_f(x, y) = x - f(x) \int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) d\lambda.$$

(b) En déduire que  $H_f$  admet un unique prolongement par continuité à  $I \times I$  tout entier. On note encore ce prolongement  $H_f : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ .

(c) Montrer que  $H_f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I \times I$ .

(d) Calculer  $H_f(x, x)$ .

4. On suppose maintenant  $0 \in f(I)$  et on note  $x^* = g(0)$ . Pour  $x \in I$  on note  $I_x$  l'intervalle fermé d'extrémités  $x$  et  $x^*$ .

(a) Soient  $x, y \in I$ . Montrer qu'il existe  $(\bar{x}, \bar{y}) \in I_x \times I_y$ , tel que

$$H_f(x, y) - x^* = (x - x^*)(y - x^*) \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}).$$

(b) Calculer

$$\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x^*, x^*)$$

en fonction des dérivées de  $f$ .

### Quatrième Partie. Méthode de la sécante

Soit  $I$  un intervalle ouvert, borné ou non, de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$ . On désire calculer une approximation d'une solution de l'équation  $f(x) = 0$ . Pour cela on met en œuvre un procédé itératif appelé *méthode de la sécante*. En voici le principe :

**Initialisation.** On choisit deux nombres réels  $x_0, x_1 \in I$ .

**Itération.** Soit  $n \geq 1$ . On suppose que les valeurs  $x_k$  sont bien définies pour  $1 \leq k \leq n$ . On considère la droite  $L_n$  passant par les points  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  et  $(x_n, f(x_n))$  du plan  $\mathbb{R}^2$ , avec la convention que  $L_n$  est la tangente en  $(x_n, f(x_n))$  au graphe de  $f$  lorsque  $x_n = x_{n-1}$ . Si  $L_n$  intersecte l'ensemble  $\{(x, 0) \mid x \in I\}$  en un unique point  $(x, 0)$  on définit  $x_{n+1} = x$  et on poursuit les itérations. Sinon on considère que la méthode a échoué et on arrête l'itération.

1. Illustrer la construction ci-dessus au moyen d'une figure. Lorsque  $f' > 0$  sur  $I$ , exprimer  $x_{n+1}$  en fonction de  $x_{n-1}, x_n$  au moyen de la fonction  $H_f$  définie dans la question 3 de la troisième partie.
2. Dans cette question, on examine le cas particulier d'une fonction polynomiale du second degré  $f$  définie par la formule  $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels et  $\alpha > \beta$ . On prend  $I = ](\alpha + \beta)/2, +\infty[$ .  
Pour  $x \in \mathbb{R}$  on définit  $h(x) = \frac{x - \alpha}{x - \beta}$ , avec la convention  $h(\beta) = \infty$ .

- (a) Pour  $x \in \mathbb{R}$  montrer qu'on a  $|h(x)| < 1$  si et seulement si  $x \in I$ .
- (b) Expliciter la relation de récurrence satisfaite par la suite  $u_n := h(x_n)$  et en déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est bien définie quels que soient  $x_0$  et  $x_1$  dans  $I$ .
- (c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers 0 et en déduire que  $(x_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $\alpha$ .
- (d) Soit  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Montrer qu'il existe un nombre réel strictement négatif  $s$  tel que

$$x_n - \alpha = O\left(e^{s\phi^n}\right).$$

3. On revient au cas général,  $f$  étant une fonction quelconque de classe  $\mathcal{C}^3$ . On suppose que  $f$  s'annule en un point  $x^* \in I$ , pour lequel  $f'(x^*) > 0$ .

- (a) Montrer qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \subset I$  et  $f' > 0$  sur l'intervalle  $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$ . On fixe un tel  $\epsilon$  pour la suite et on définit

$$M = \sup_{(x,y) \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]^2} \left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x, y) \right|.$$

- (b) On suppose que  $x_{n-1}, x_n \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$ . Montrer que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M |x_{n-1} - x^*| \cdot |x_n - x^*|.$$

- (c) On fixe  $\epsilon' \in ]0, \epsilon]$  tel que  $M\epsilon' < 1$ . Montrer que si  $x_0, x_1$  appartiennent à  $[x^* - \epsilon', x^* + \epsilon']$  alors la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est bien définie et converge vers  $x^*$ .