Corrigé succinct X-ens PSI 2014 par Christophe Hénocq

PARTIE 1

a) Soit $f \in E$. Il est clair que la fonction $T(f)$ définie dans l'énoncé appartient à E. On a, de plus, pour tout $x \in [0,1]$, $|T(f)(x)| = x\left|f(\frac{x}{2})\right| \leq \|f\|_\infty$. Donc $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $T(f) \in \mathcal{L}(E)$.

b) D'après ce qui précède, la valeur minimale possible de la constante M appartient à $[0,1]$. Mais, pour la fonction f constante égale à 1, on a $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$. On peut conclure que la valeur minimale cherchée est 1.

c) $\triangleright$ Si $f \in \mathrm{Ker}(T)$, on a, pout tout $x \in [0,1]$, $xf(\frac{x}{2}) = 0$. On en déduit que f est nulle sur $]0, \frac{1}{2}]$, puis, par continuité en 0, sur $[0, \frac{1}{2}]$. Réciproquement, toute fonction $f \in E$, nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$, vérifie $T(f) = 0$.

$\triangleright$ Si $g \in \mathrm{Im}(T)$, il existe $f \in E$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $g(x) = xf(\frac{x}{2})$. Sachant que f est continue en 0, on a lorsque $x \longrightarrow 0$, $g(x) = xf(0) + o(x)$. On peut conclure que $g(0) = 0$ et que g est dérivable en 0. Réciproquement Si $g \in E$ vérifie $g(0) = 0$ et est dérivable en 0. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} g'(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{g(2x)}{2x} & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}] \\ g(1) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$. Il est facile de vérifier que $f \in E$ et que $T(f) = g$.

d) Soit $f \in E$. On a $\|T(f)\|_2^2 = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(\frac{x}{2})^2 dx \leq \int_0^1 f(\frac{x}{2})^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)^2 dt \leq 2\|f\|_2^2$. On peut donc conclure que $\|T(f)\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|_2$. Ainsi $T(f) \in \mathcal{L}(E)$.

e) Notons μ la valeur minimale de la constante M recherchée. On a, d'après d), $\mu \leq \sqrt{2}$. On calcule ensuite $\|f_n\|_2^2$ et $\|T(f_n)\|_2^2$ pour la fonction f_n donnée dans l'énoncé.

$\triangleright$ Si $x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]$, $f_n(x) = n(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$ et si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right]$, $f_n(x) = n^2(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2})$ On a alors $\|f_n\|_2^2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} n^2(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n})^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}} n^4(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2})^2 dx = \frac{1}{3n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

$\triangleright$ Posons $g_n = T(f_n)$. Pour $x \in [1 - \frac{2}{n}, 1]$, $g_n(x) = x_n\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$ g_n est nulle ailleurs. On a donc $\|g_n\|_2^2 = n^2 \displaystyle\int_{1-\frac{2}{n}}^1 x^2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^2 dx = \frac{n^2}{4}\int_{1-\frac{2}{n}}^1 x^2\left(x - 1 + \frac{2}{n}\right)^2 dx$. On peut faire une double intégration par parties : $\|g_n\|_2^2 = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{n^2}{6}\displaystyle\int_{1-\frac{2}{n}}^1 x\left(x - 1 + \frac{2}{n}\right)^3 dx = \frac{2}{3n} - \frac{2}{3n^2} + \frac{n^2}{24}\int_{1-\frac{2}{n}}^1 x\left(x - 1 + \frac{2}{n}\right)^4 dx$. On trouve $\|g_n\|_2^2 = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2}{3n^2} + \dfrac{4}{15n^3}$.

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{\|g_n\|_2}{\|f_n\|_2} \longrightarrow \sqrt{2}$. Cela permet de conclure que $\mu = \sqrt{2}$

PARTIE 2

a) Soit $u \in H$. On a $\|S(u)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_{n-1}|^2 = \|u\|_2^2$. Donc $S \in \mathcal{L}(H)$.

De même $\|V(u)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1}|^2 \leq \|u\|_2^2$. Donc $V \in \mathcal{L}(H)$.

b)
$\triangleright$ Cherchons le spectre ponctuel de S. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in H$ tel que $S(u) = \lambda u$.
On a $0 = \lambda u_0, u_0 = \lambda u_1, ..., u_{n-1} = \lambda u_n, ...$ En séparant les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$, on voit que tous les termes de la suite u sont nuls. On peut conclure que $\sigma_P(S) = \emptyset$

$\triangleright$ Cherchons le spectre ponctuel de V. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in H$ tel que $V(u) = \lambda u$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n$. Donc u est une suite géométrique de raison λ : $u_n = u_0 \lambda^n$. Mais elle doit être de carré sommable, donc u est la suite nulle ou $|\lambda| < 1$. On peut conclure que $\sigma_P(V) =]-1, 1[$.

c) Soit $u \in F$. On a $\|S(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$. Donc $S \in \mathcal{L}(F)$. De même on a $\|V(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. Donc $V \in \mathcal{L}(F)$.

d) Pour S , il n'y a pas de changement : $\sigma_P(S) = \emptyset$. Pour V, on constate que la suite géométrique $(u_0 \lambda^n)$, lorsque $u_0 \neq 0$, est bornée si et seulement si $|\lambda| \leq 1$. Donc $\sigma_P(V) = [-1, 1]$.

e)
$\triangleright$ Spectre de S. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, l'application $S - \lambda Id_F$ est toujours injective. Est-elle surjective ? Soit $v \in F$, on cherche $u \in F$ tel que $S(u) - \lambda u = v$. Cela équivaut au système $\begin{cases} 0 - \lambda u_0 = v_0 \\ u_0 - \lambda u_1 = v_1 \\ ... \\ u_{n-1} - \lambda u_n = v_n \\ ... \end{cases}$.
On voit que si $\lambda = 0$ et si $v_0 \neq 0$, il n'y a pas de solution. Donc $0 \in \sigma(S)$.
Si $\lambda \neq 0$, on trouve $u_0 = -\frac{1}{\lambda} v_0$, $u_1 = -\left(\frac{1}{\lambda^2} v_0 + \frac{1}{\lambda} v_1\right)$, ..., $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{v_{n-k}}{\lambda^{k+1}}, ...$ La suite ainsi définie est-elle toujours bornée ? Si $|\lambda| > 1$, la réponse est oui car la série de terme général $\frac{1}{\lambda^{k+1}}$ converge.
Si $|\lambda| \leq 1$ il en va autrement. En effet, en considérant la suite (v_n) définie par $v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda > 0 \\ (-1)^n & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$, on a $|u_n| \geq n + 1$. Ce n'est pas une suite bornée. Alors $S - \lambda Id_F$ n'est pas surjective. On conclut que $\sigma(S) = [-1, 1]$.

$\triangleright$ Spectre de V. D'après d) $[-1, 1] \subset \sigma(V)$. Soient λ tel que $|\lambda| > 1$ et $v \in F$. On cherche $u \in F$ tel que $S(u) - \lambda u = v$. Cela équivaut au système $\begin{cases} u_1 - \lambda u_0 = v_0 \\ u_2 - \lambda u_1 = v_1 \\ ... \\ u_{n+1} - \lambda u_n = v_n \\ ... \end{cases}$.
On trouve, pour $n \geq 1$, $u_n = \lambda^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k v_{n-1-k}$. On choisit la suite v définie par $v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda > 0 \\ (-1)^n & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$.
La suite u précédente n'est, alors, pas borbée. On peut conclure $\sigma(V) = \mathbf{R}$.

PARTIE 3

a) Commençons par montrer que T est un endomorphisme de E. Soit $f \in E$. On a, pour $s \in [0, 1]$, $T(f)(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt = (1 - s) \int_0^s t f(t) dt + s \int_s^1 (1 - t) f(t) dt$. On sait que les applications $t \longmapsto t f(t)$ et $t \longmapsto (1 - t) f(t)$ sont continues sur $[0, 1]$. Par application du théorème fondamental, les applications $s \longmapsto \int_0^s t f(t) dt$ et $s \longmapsto \int_s^1 (1 - t) f(t) dt$ sont continues (et même dérivables) sur $[0, 1]$. On a donc $T(f) \in E$. Par ailleurs, pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, on a $0 \leq K(s, t) \leq 1$.

On en déduit $|T(f)(s)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \left(\int_0^1 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \leq \|f\|_2$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On a alors $\|T(f)\|_2 \leq \|f\|_2$. Donc $T \in \mathcal{L}(E)$.

b) On s'aide de ce qui a été fait à la question précédente. $T(f)$ est dérivable et on a $T(f)'(s) = -\int_0^s tf(t)dt + \int_s^1 (1-t)f(t)dt$. Puis $T(f)$ est deux fois dérivable et $T(f)''(s) = -sf(s) - (1-s)f(s) = -f(s)$.

c) Si $f \in \mathrm{Ker}(T)$, on a $T(f)'' = 0$ donc $f = 0$. Ainsi T est injectif.

d) Si $\lambda \in \sigma_P(T)$ et si $f \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id_E)$, on est sûr que $\lambda \neq 0$. Alors $f = \dfrac{1}{\lambda}T(f)$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ et $f'' = -\dfrac{1}{\lambda}f$. On a $\lambda f'' + f = 0$. Par ailleurs $\lambda f(s) = (1-s)\int_0^s tf(t)dt + s\int_s^1 (1-t)f(t)dt$ donc $f(0) = f(1) = 0$.

e) Soient $\lambda \in \sigma_P(T)$ et $f \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id_E) \setminus \{0\}$. On distingue deux cas.

▷ Si $\lambda > 0$. On trouve $f(t) = A\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right) + B\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right)$. La condition $f(0) = 0$ impose $A = 0$. Donc $B \neq 0$. On a $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$. On en déduit $\lambda = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$.
Réciproquement on calcule $F(s) = (1-s)\int_0^s t\sin(k\pi t)dt + s\int_s^1 (1-t)\sin(k\pi t)dt$. On trouve, en intégrant par parties les deux intégrales précédentes $F(s) = \dfrac{\sin(k\pi s)}{k^2\pi^2}$.

▷ Si $\lambda < 0$, on pose $\lambda = -\mu$. On a dans ce cas $f(t) = A\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}t\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}t\right)$ Les conditions $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ imposent $A = B = 0$, ce qui est exclu.

Conclusion $\sigma_P(T) = \left\{\dfrac{1}{k^2\pi^2}, k \in \mathbf{N}^*\right\}$ et $\mathrm{Ker}(T - \dfrac{1}{k^2\pi^2}Id_E) = \mathrm{Vect}\Big(t \longmapsto \sin(k\pi t)\Big)$

PARTIE 4

a) Soit $x \in H$. Pour $N \in \mathbf{N}$, on pose $x_N = \sum_{i=0}^{N} \langle x, b_i\rangle b_i$. D'après (ii), la suite (x_N) converge vers x. Par ailleurs l'application $y \longmapsto \|y\|^2$ est continue comme composée d'applications continues. On en déduit $\mathrm{Lim}_{N \longrightarrow +\infty}\|x_N\|^2 = \|x\|^2$. Mais $\|x_N\|^2 = \sum_{i=0}^{N}\langle x, b_i\rangle^2$. On peut conclure $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\langle x, b_i\rangle^2$.

b) On doit montrer que l'on bien une produit scalaire. Pour cela il faut vérifier que l'application donnée dans l'énoncé est bien définie. Si $u \in H$ et $v \in H$, un a, pour tout n, $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$. la série de terme général $|u_n v_n|$ est donc convergente.
Il est alors facile de vérifier que l'application $(u, v) \longmapsto \langle u, v\rangle$ est symétrique, bilinéaire positive et définie positive.
Enfin on désigne par e_i la suite $(\delta_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ où $\delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La famille $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne car cette famille est orthonormale et, pour tout $x \in H$ et tout $N \in \mathbf{N}$, la suite $x - \sum_{i=0}^{N}\langle x, e_i\rangle e_i$ est la suite

dont les N+1 premiers termes sont nuls et coïncidant avec x à partir du terme d'indice $N+1$. On a donc $\|x - \sum_{i=0}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \longrightarrow 0$ quand $N \longrightarrow \infty$.

c) Soit $N \in \mathbf{N}$. On a $\sum_{j=0}^{N} \|\tilde{T}(c_j)\|^2 = \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{\infty} \langle b_i, \tilde{T}(c_j)\rangle^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{N} \langle T(b_i), c_j\rangle^2$ (en appliquant a). On en déduit $\sum_{j=0}^{N} \|\tilde{T}(c_j)\|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \langle T(b_i), c_j\rangle^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2$. On en déduit que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{T}(c_j)\|^2$ converge et que $\sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{T}(c_j)\|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2$. Maintenant, en échangeant les rôles des b_i et des c_j et de T et $\tilde{T}$, on obtient de la même façon l'inégalité $\sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{T}(c_j)\|^2$. D'où l'égalité.

d) Si la somme $\sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2$ converge pour une base hilbertienne (b_i), alors $\sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{T}(c_j)\|^2$ converge pour toutes les bases hilbertiennes (c_j) et $\sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{T}(c_j)\|^2$. En particulier $\sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{T}(b_j)\|^2$. En échangeant les rôles de T et $\tilde{T}$, on a, pour toute base hilbertienne (c_j), $\sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|T(c_j)\|^2$. On en déduit aussi que si $\sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2 = +\infty$ pour une base hilbertienne, c'est le cas pour toutes.

e) En reprenant la base hilbertienne de la question b), on a $\sum_{i=0}^{\infty} \|S(e_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} 1 = +\infty$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \|V(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = +\infty$. On définit un opérateur T qui, à la suite $u \in H$, associe la suite v définie par $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$. On a $T(e_i) = \dfrac{1}{(i+1)^2}$. C'est le terme général d'une série convergente.

f) Je pense qu'il faut, à cet endroit, corriger l'énoncé en définissant $\|T\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Montrons que cela définit une norme, en, en même temps, que $\mathcal{L}^2(H)$ est un espace vectoriel.

▷ Homogeneité : $\|\lambda T\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|\lambda T(b_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|T\|_2$.

▷ Séparation : si $\|T\|_2 = 0$, on a, pour tout i, $T(b_i) = 0$. Soit $x \in H$, on écrit $x = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, b_i\rangle b_i$. Par continuité de T on aura $T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, b_i\rangle T(b_i) = 0$.

▷ Inégalité triangulaire : soient T et U dans $\mathcal{L}^2(H)$. On a
$\|T+U\|_2^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \|T(b_i)+U(b_i)\|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\|T(b_i)\|^2 + \|U(b_i)\|^2 + 2\|T(b_i)\|\|U(b_i)\|\right) \leq \|T\|^2 + \|U\|^2 + 2\|T\|\|U\|$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. D'où le résultat.

g) On commence par remarquer que la série converge.
En effet $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}|\langle L(b_i),U(b_i)\rangle| \leq \sum_{i=0}^{\infty}\|L(b_i)\|\|U(b_i)\| \leq \|L\|_2\|U\|_2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
Montrons l'indépendance par rapport au choix de la base hilbertienne : on utilise une identité de polarisation.
$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\langle L(b_i),U(b_i)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\|(L+U)(b_i)\|^2 - \|L(b_i)\|^2 - \|U(b_i\|^2\right) = \frac{1}{2}(\|L+U\|_2^2 - \|L\|_2^2 - \|U\|_2^2)$. En dernier lieu, les propriétés définissant un produite scalaire sont faciles à vérifier.

h) Si $L \in \mathcal{L}^2(H)$. Soit M tel que $\forall x,\ \|U(x)\| \leq M\|x\|$. On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\|UL(b_i)\|^2 \leq M\sum_{i=0}^{\infty}\|L(b_i)\|^2 < +\infty$.