X-ENS 2015
Un corrigé

Partie I

1. On remplace $f(x)$ par $f_1(x)+if_2(x)$ dans (E_α) et on identifie les parties réelle et imaginaire. Pour tout réel x, on obtient

$$f_1''(x)=\frac{x}{2}f_2'(x)-\frac{f_1(x)}{2}\left(\alpha(f_1(x)^2+f_2(x)^2)+1\right)$$
$$f_2''(x)=-\frac{x}{2}f_1'(x)-\frac{f_2(x)}{2}\left(\alpha(f_1(x)^2+f_2(x)^2)+1\right)$$

2. Posons
$$g=|f'|^2+\frac{1}{4\alpha}(\alpha|f|^2+1)^2)=(f_1')^2+(f_2')^2+\frac{1}{4\alpha}(\alpha(f_1^2+f_2^2)+1)^2$$
g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$g'(x)=2f_1'(x)f_1''(x)+2f_2'(x)f_2''(x)+\left(f_1(x)f_1'(x)+f_2(x)f_2'(x)\right)\left(\alpha(f_1(x)^2+f_2(x)^2)+1\right)$$
Si on remplace f_1'' et f_2'' par les expressions trouvées ci-dessus, on obtient $g'=0$. g est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $g(0)=\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$, on en déduit que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ |f'(x)|^2+\frac{1}{4\alpha}(\alpha|f(x)|^2+1)^2)=\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$$

3. Comme $|f'(x)|^2\geq 0$, on en déduit que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{4\alpha}(\alpha|f(x)|^2+1)^2)\leq\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$$
Multiplier par $4\alpha>0$ ne change pas le sens de l'inégalité et passer à la racine carrée est une opération croissante. Ainsi,
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left|\alpha|f(x)|^2+1\right|\leq|\alpha+1|$$
Comme $\alpha|f(x)|^2+1$ et $\alpha+1$ sont positifs, on peut supprimer les modules pour obtenir l'inégalité $\alpha|f(x)|^2\leq\alpha$ puis (toujours comme $\alpha>0$)
$$\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leq 1$$
Da façon similaire, l'inégalité de la question précédente donne $|f'(x)|^2\leq\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$ et, en passant à la racine carrée,
$$\forall x\in\mathbb{R},\ |f'(x)|\leq\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\alpha+1)$$

4. (a) On procède comme en question **2** en introduisant la fonction h définie par

$$\begin{aligned}h(x)&=\Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right)+\frac{x}{4}|f(x)|^2-\frac{1}{4}\int_0^x|f(t)|^2\,dt\\&=-f_1'(x)f_2(x)+f_2'(x)f_1(x)+\frac{x}{4}(f_1(x)^2+f_2(x)^2)-\frac{1}{4}\int_0^x(f_1(t)^2+f_2(t)^2)\,dt\end{aligned}$$

Comme $f_1^2+f_2^2$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $0\in\mathbb{R}$, le théorème fondamental indique que $x\mapsto\int_0^x|f|^2$ est une primitive de $|f|^2$ sur $\mathbb{R}$. h est ainsi dérivable et le calcul donne (après première salve de simplification)

$$h'(x)=-f_1''(x)f_2(x)+f_2''(x)f_1(x)+\frac{x}{2}(f_1'(x)f_1(x)+f_2'(x)f_2(x))$$

En utilisant les expressions trouvées en question **2** pour f_1'' et f_2'', on obtient $h'=0$. h est donc constante sur $\mathbb{R}$. Elle est nulle en 0 et ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right)+\frac{x}{4}|f(x)|^2-\frac{1}{4}\int_0^x |f(t)|^2\,dt=0$$

(b) Le théorème fondamental évoqué ci-dessus donne (pour $x>0$)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f|^2\right)=\frac{1}{x}|f(x)|^2-\frac{1}{x^2}\int_0^x |f|^2 \qquad (*)$$

En remplaçant $\int_0^x |f|^2$ dans le membre de droite par l'expression trouvée en question **4b**, on en déduit que

$$\forall x>0,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f|^2\right)=-\frac{4}{x^2}\Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right)$$

(c) Comme $\left|\Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right)\right|\leq |f'(x)|.|f(x)|$, avec la question **3** on obtient que

$$\forall x>0,\ \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f|^2\right)\right|\leq \frac{1}{x^2}\frac{\alpha+1}{2\sqrt{\alpha}}$$

La fonction $H\ :\ x\mapsto \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f|^2\right)$ est donc intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison aux fonctions de Riemann). Comme elle est continue sur $[1,+\infty[$, elle est intégrable sur $[1,+\infty[$. En particulier, son intégrale sur $[1,+\infty[$ existe. En notant ℓ' sa valeur, on a

$$\ell'=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x H(t)\,dt$$

Mais, $F\ :\ x\mapsto \frac{1}{x}\int_0^x |f|^2$ est une primitive de H sur $[1,+\infty[$ et ceci s'écrit donc

$$\ell'=\lim_{x\to+\infty}(F(x)-F(1))$$

On a ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x |f|^2=\ell \ \text{ avec }\ \ell=\ell'+F(1)$$

On a bien sûr $\ell\geq 0$ puisque c'est la limite d'une fonction positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(d) En reprenant les notations qui précédent, on a

$$|F(x)-\ell|=\left|\int_1^x H-\int_1^\infty H\right|=\left|\int_x^\infty H\right|$$

Comme H est intégrable sur $[x,+\infty[$ (pour $x>0$) on peut majorer par inégalité triangulaire et en utilisant l'inégalité $(*)$ de la question précédente (en remarquant que le majorant est aussi intégrable sur $[x,+\infty[$) on obtient

$$\forall x>0,\ |F(x)-\ell|\leq M\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\ \text{ avec }\ M=\frac{\alpha+1}{2\sqrt{\alpha}}$$

ce qui s'écrit directement

$$\forall x>0,\ \left|\frac{1}{x}\int_0^x |f|^2-\ell\right|\leq\frac{M}{x}$$

(e) Avec le résultat de **4a** on a

$$|f(x)|^2 - \ell = \frac{1}{x}\int_0^x |f|^2 - \ell - \frac{4}{x}\Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right)$$

En passant au module et en utilisant les questions précédentes, on a alors

$$||f(x)|^2 - 1| \leq \frac{M}{x} + \frac{4}{x}\frac{\alpha+1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{M_0}{x} \quad \text{avec} \quad M_0 = M + \frac{2(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha}}$$

5. (a) En reprenant le résultat de la question **2**, on a (factorisation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)

$$|f'(x)|^2 = \frac{1}{4}(1 - |f(x)|^2)(\alpha + 2 + \alpha|f(x)|)$$

Comme $|f(x)| \leq 1$, on en déduit que

$$|f'(x)|^2 \leq \frac{\alpha+1}{2}||f(x)|^2 - 1|$$

Avec l'hypothèse $\ell = 1$, on a alors

$$|f'(x)| \leq \frac{K}{\sqrt{x}} \quad \text{avec} \quad K = \sqrt{\frac{M_0(\alpha+1)}{2}}$$

On peut alors raffiner **4c** et obtenir

$$\forall x > 0, \ \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f|^2\right)\right| \leq \frac{K}{x^{5/2}}$$

puis améliorer **4d** en

$$\forall x > 0, \ |F(x) - 1| \leq K\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^{5/2}} = \frac{M'}{x^{3/2}} \text{ avec } \ M' = \frac{2K}{3}$$

et **4e** en

$$||f(x)|^2 - 1| \leq \frac{M'}{x^{3/2}} + \frac{4K}{x^{3/2}} = \frac{M_1}{x^{3/2}} \quad \text{avec} \quad M_1 = M' + 4K$$

(b) Comme $|f(x)| \leq 1$, on a aussi $|f(x)|^2 \leq 1$ et, en passant à la limite $\ell \leq 1$.
Supposons, par l'absurde, que $\ell = 1$. L'égalité de la question **2** montre alors que $|f'(x)| \to 0$ quand $x \to +\infty$ ce qui montre que $\Im(f'(x)\overline{f}(x)) \to 0$.
Par ailleurs, la question précédente montre que $1 - |f(x)|^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$). En posant $I = \int_0^{+\infty}(1 - |f|^2)$, on a alors

$$\int_0^x |f|^2 = x - I + o(1)$$

En injectant ces renseignements dans l'égalité de **4a**, on trouve

$$|f(x)|^2 = 1 - \frac{I}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $1 - |f(x)|^1$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit alors que $I = 0$. $1 - |f|^2$ est continue, positive d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}^+$ et est alors constante sur $\mathbb{R}^+$. L'équation (E_α) donne alors $1 + \alpha = 0$ ce qui contredit $\alpha > 0$. On a montré que ℓ ne peut être égal à 1 et même que

$$\ell < 1$$

6. $|f|$ admet $\sqrt{\ell}$ comme limite en $+\infty$. Si c'est une fonction périodique, elle doit être constante égale à $\sqrt{\ell}$ et on doit avoir $\sqrt{\ell}=1$ c'est à dire $\ell=1$, ce qui est exclus. On a donc montré par l'absurde que $|f|$ ne saurait être périodique.

7. (a) Soit $t>0$. On a
$$\forall y\in\mathbb{R},\ f_\alpha(y)=\sqrt{t}\Psi_\alpha(t,y\sqrt{t})$$
Si, par l'absurde, $\Psi_\alpha(t,.)$ était T-périodique, alors f_α serait $T/\sqrt{t}$ périodique. $|f_\alpha|=|f|$ serait donc périodique et ceci est faux. On peut donc affirmer que $\Psi_\alpha(t,.)$ n'est périodique pour aucun $t>0$.

   (b) Le calcul donne directement
$$f_\alpha'(x)=\exp\left(i\frac{x^2}{2}\right)\left(f'(x)+\frac{ix}{2}f(x)\right)$$
$$f_\alpha''(x)=\exp\left(i\frac{x^2}{2}\right)\left(f''(x)+ixf'(x)+\frac{2i-x^2}{4}f(x)\right)$$
$$|f_\alpha(x)|=|f(x)|$$

   (c) Comme f_α est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $t\mapsto\sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a les régularités souhaitées pour Ψ_α par théorèmes d'opérations. Le calcul donne, en posant $y=x/\sqrt{t}$,
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial t}(t,x) &= -\frac{1}{2t^{3/2}}f_\alpha(y)-\frac{x}{2t^2}f_\alpha'(y)\\
&= \frac{1}{t^{3/2}}\exp\left(i\frac{y^2}{2}\right)\left(\frac{-2-iy^2}{4}f(y)-\frac{y}{2}f'(y)\right)\\
\frac{\partial^2\Psi_\alpha}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{1}{t^{3/2}}f_\alpha''(y)\\
&= \frac{1}{t^{3/2}}\exp\left(i\frac{y^2}{2}\right)(f''(y)+iyf'(y)+\frac{2i-y^2}{4}f(y))
\end{aligned}$$
Ainsi, en tenant compte de l'expression de $f''(y)$ donnée par (E_α),
$$i\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial^2\Psi_\alpha}{\partial x^2}(t,x)=\frac{1}{t^{3/2}}\exp\left(i\frac{y^2}{2}\right)\left(-\frac{f(y)}{2}(\alpha|f(y)|^2+1)\right)$$
Par ailleurs,
$$\frac{1}{2}\Psi_\alpha(t,x)\left(\alpha|\Psi_\alpha(t,x)|^2+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2\sqrt{t}}f_\alpha(y)(\frac{\alpha}{t}|f(y)|^2+\frac{1}{t})$$
et on constate que
$$i\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial^2\Psi_\alpha}{\partial x^2}(t,x)=-\frac{1}{2}\Psi_\alpha(t,x)\left(\alpha|\Psi_\alpha(t,x)|^2+\frac{1}{t}\right)$$

8. (a) On a $|a_ke^{-ik^2t+ikx}|=|a_k|$. De plus $k^2a_k\to 0$ (série convergente donc terme général de limite nulle) et ainsi $a_k=o(1/k^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Ceci justifie l'existence de $\Phi_0(t,x)$.

   (b) Posons $u_k\ :\ (x,t)\mapsto a_ke^{-ik^2t+ikx}$. Il s'agit ici d'utiliser le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions. Comme on a convergence simple de la série de fonctions de la variable t $(u_k(.x))$, il nous suffit de vérifier que la série dérivée (variable t, x fixé) est uniformément convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$. Or,
$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}(t,x)\right|=k^2|a_k|$$

Le majorant étant indépendant de t et terme général d'une série convergente, on a normale convergence sur out $\mathbb{R}$ (ce qui entraîne la convergence uniforme). $\Phi_0(.,x)$ est donc de classe C^1 (et sa dérivée s'obtient terme à terme). On a de même

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x}(t,x)\right| = k|a_k|$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(t,x)\right| = k^2|a_k|$$

ce qui permet aussi de conclure que $\Phi_0(t,.)$ est de classe C^2. Les dérivations terme à terme donnent

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t,x) = -i\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k e^{-ik^2t+ikx}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k e^{-ik^2t+ikx}$$

(c) Tout d'abord, comme $\sum k^2 e^{ik^2}k$ converge aboslument, on peut poser

$$\Phi_0(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik^2} e^{-ik^2t+ikx}$$

Avec les calculs précédents, on a alors

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R},\ i\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

Notons g l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $y'(t) = -\frac{i}{2t}y(t)$ telle que$y(1) = 1$ (on a bien existence et unicité de y par théorème de Cauchy-Lipschitz) et posons

$$\Psi_0(t,x) = g(t)\Phi_0(t,x)$$

Pour tout $t > 0$, $\Psi_0(t,.)$ est immédiatement 2π-périodique et pour tout réel x, on a $\Psi_0(1,x) = \Phi_0(1,x) = f_0(x)$.En outre,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}(t,x) &= g'(t)\Phi_0(t,x) + g(t)\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t,x) \\
&= \frac{i}{2t}\Psi_0(t,x) + ig(t)\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t,x) \\
&= \frac{i}{2t}\Psi_0(t,x) + i\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}(t,x)
\end{aligned}$$

ce qui montre que Ψ_0 est solution de l'EDP proposée.

Partie II

9. On a $M^2 = \begin{pmatrix} -m^2 I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc (récurrence quasi immédiate)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n m^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n m^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1}m^{2n+1} & 0 \\ (-1)^n m^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par combinaisons linéaires, on voit alors apparaître les sommes partielles des DSE de cos et sin ce qui nous permet de voir (convergence coordonnée par coordonnée) que

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(t) = R(mt)$$

10. On traduit matriciellement le produit scalaire. Comme $F(t)^T = R(mt)^T = R(-mt) = F(-t)$, on a

$$F(t)X.Y = (F(t)X)^T Y = X^T F(t)^T Y = X^T F(-t)Y = X.F(-t)Y$$

La relation suivante traduit que $F(t)$ conserve le produit vectoriel. On pourrait faire un calcul direct pour le justifier, mais il est ici demandé une déduction... Pour prouver que deux vecteurs U et V sont égaux, il suffit de montrer que pour tout Z on a $U.Z = V.Z$. Je me donne donc un Z quelconque et je forme

$$F(t)(X \wedge Y).Z = (X \wedge Y).F(-t)(Z) = \det(X, Y, F(-t)Z)$$

où le déterminant est pris dans la base canonique orthonormée. Multiplier par $\det(F(t)) = 1$ ne change rien et si A est la matrice de colonnes $X, Y, F(-t)Z$, $F(t)A$ est la matrice de colonnes $F(t)X, F(t)Y, F(t)F(-t)Z = Z$. Ainsi

$$F(t)(X \wedge Y).Z = \det(F(t)X, F(t)Y, Z) = (F(t)(X) \wedge F(t)(Y)).Z$$

Ceci étant vrai pour tout Z, on a bien

$$F(t)(X \wedge Y) = F(t)(X) \wedge F(t)(Y)$$

11. On a

$$F(t)\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -m\sin(mt) & -m\cos(mt) & 0 \\ m\cos(mt) & -m\sin(mt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F'(t)$$

12. Cette fois,

$$\mathcal{M}X.X = X^T \mathcal{M}^T X = -X^T \mathcal{M} X$$

ce qui donne

$$\mathcal{M}X.X = 0$$

On peut intérpréter $\mathcal{M}X$ comme $mE_3 \wedge X$ où $E_3 = (0, 0, 1)$. Je ne vois pas quelle interprétation géométrique supplémentaire de $\mathcal{M}$ est attendue.

13. Le polynôme caractéristique de $\mathcal{M} + I_3$ est $X((X-1)^2 + m^2)$. On est amenés à distinguer deux cas.
   - Si $m = 0$ alors $(\mathcal{M} + I_3)^n = I_3$ et $((\mathcal{M} + I_3)^n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite I_3.
   - Sinon, $\mathcal{M} + I_3$ admet trois valeurs propres complexes distinctes $1, 1 + im$ et $1 - im$. Cette matrice est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable (à sous-espaces propres de dimension 1). Il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}(\mathcal{M} + I_3)P = D = \mathrm{diag}(1, 1 + im, 1 - im)$. On a alors $D^n = P^{-1}(\mathcal{M} + I_3)^n P$. Si $((\mathcal{M} + I_3)^n)_{n\geq 0}$ est convergente, il en est alors de même de D^n (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) et donc de la suite complexe $((1 + im)^n)$. Il faut donc que $|1 + im| \leq 1$ et donc que $m = 0$.

   La suite $((\mathcal{M} + I_3)^n)_{n\geq 0}$ est convergente si et seulement si $m = 0$.

Partie III

14. Posons $N(x) = T(x).T(x)$ pour tout réel x. N est dérivable et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ N'(x) = 2T(x).T'(x) = 2G'(x).G''(x)$$
Comme $a \wedge b$ est orthogonal à b, l'équation vérifiée par G montre que $G'(x)$ et $G''(x)$ sont orthogonaux. N est donc de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est donc constante. En 0, elle vaut 1 et on a donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \|T(x)\| = \sqrt{N(x)} = 1$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $Y = (I_3 + \mathcal{M})G(x)$ de sorte que $2G''(x) = Y \wedge G'(x)$. Par formule du double produit vectoriel, on a
$$\begin{aligned} 2G'(x) \wedge G''(x) &= G'(x) \wedge \big(Y \wedge G'(x)\big) \\ &= (G'(x).G'(x))Y - (G'(x).Y)G'(x) \\ &= Y - (G'(x).Y)G'(x) \end{aligned}$$
Posons alors $\phi(x) = G'(x).Y = G'(x).\left((I_3 + \mathcal{M})G(x)\right)$. ϕ est dérivable et
$$\phi'(x) = G''(x).((I_3 + \mathcal{M})G(x)) + G'(x).((I_3 + \mathcal{M})G'(x))$$
Par le même argument qu'en question précédente, $G''(x).((I_3 + \mathcal{M})G(x)) = 0$. De plus $(I_3 + \mathcal{M})Z.Z = Z.Z$ d'après la question **12**. On en déduit que
$$\phi'(x) = G'(x).G'(x) = 1$$
Il existe donc une constante c telle que $\phi(x) = c$ pour tout x. Comme $\phi(0) = 0$, $c = 0$ et finalement,
$$2G'(x) \wedge G''(x) = (I_3 + \mathcal{M})G(x) - xG'(x)$$

16. Toutes les fonctions mises en jeu sont régulières (au moins de classe C^2) sur leurs domaines et la régularité demandé pour G provient des théorèmes d'opérations. Le calcul donne facilement
$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x,t) = F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$
$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$
La question **10** indique alors que
$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x,t) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) \left(G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \wedge G''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right)$$
et la question précédente donne alors
$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x,t) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) \left((I_3 + \mathcal{M})G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{x}{\sqrt{t}} G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right)$$
Par ailleurs (formule $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$) on a
$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} F'\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{x}{2t} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$
Compte-tenu de la relation de la question **11**, on a bien
$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x,t) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x,t)$$

17. On a $|G_1'(x)| \leq \|G'(x)\| \leq 1$. On en déduit (inégalité des accroissements finis) que $|G_1(x)| = |G_1(x) - G_1(0)| \leq |x|$, et ce pour tout réel x.
18. On montre par récurrence que G est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $\mathbb{N}$.
   - Initialisation : c'est vrai aux rangs $0, 1, 2$ par hypothèse.
   - Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que le resultat soit vrai au rang n. Comme $2G'' = G \wedge G'$, G'' est alors de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ (car G et G' le sont et il suffit d'utiliser les théorèmes généraux en revenant à la formule du produit vectoriel). G est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
19. Si A et B sont deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, il est aisé de prouver (en revenant aux coordonnées) que $A \wedge B$ est dérivable avec $(A \wedge B)' = A' \wedge B + A \wedge B'$. Ici, on a $2G'' = G \wedge G'$ et donc
$$2G^{(3)} = G' \wedge G' + G \wedge G'' = 0 + \frac{1}{2} G \wedge (G \wedge G') = \frac{G.G'}{2} G - \frac{G.G}{2} G'$$
Comme $2G'' = G \wedge G'$, $G''(x)$ est orthogonal à $G(x)$ et à $G'(x)$ et ainsi
$$\forall x,\ G''(x).G^{(3)}(x) = 0$$
Si on pose $N(x) = T'(x).T'(x)$, on a $N'(x) = 2T'(x).T''(x) = 2G''(x).G^{(3)}(x) = 0$ et N est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $T'(0) = G''(0) = \frac{1}{2} G(0) \wedge G'(0) = (0, \lambda, 0)$, la valeur de la constante est λ^2. On a ainsi prouvé que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \|T'(x)\| = \lambda$$
20. (a) Avec la méthode de dérivation évoqué en question **19**, on a
$$b'(x) = T'(x) \wedge n(x) + T(x) \wedge n'(x) = 0 + \frac{1}{\lambda} G'(x) \wedge G^{(3)}(x)$$
Avec l'expression de $G^{(3)}$ trouvée en question **19**, on en déduit que
$$b'(x) = \frac{G(x).G'(x)}{4\lambda} G'(x) \wedge G(x)$$
Mais avec $2G'' = G \wedge G'$, ceci s'écrit aussi
$$b'(x) = -\frac{G(x).G'(x)}{2\lambda} G''(x) = -\frac{1}{2} (G(x).G'(x)) n(x)$$
On utilise maintenant la question **15** en prenant le produit scalaire avec $G'(x)$ ce qui donne $G(x).G'(x) - xG'(x).G'(x) = 0$ et donc $G(x).G'(x) = x$ (on a $\|G'(x)\| = 1$). On a finalement montré que
$$2b'(x) = -xn(x)$$
(b) $(T(x), n(x), b(x))$ formant une b.o.n directe, le produit vectoriel de deux des vecteurs donne plus ou moins le troisième et on obtient aisément le signe en regardant le sens. On part de $n(x) = b(x) \wedge T(x)$ que l'on dérive :
$$\begin{aligned} n'(x) &= b'(x) \wedge T(x) + b(x) \wedge T'(x) \\ &= -\frac{x}{2} n(x) \wedge T(x) + b(x) \wedge (\lambda n(x)) \\ &= \frac{x}{2} b(x) - \lambda T(x) \end{aligned}$$
(c) Comme $n = G''/\lambda$ la relation précédente devient
$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} G^{(3)}(x) &= -\lambda G'(x) + \frac{x}{2} T(x) \wedge n(x) \\ &= -\lambda G'(x) + \frac{x}{2\lambda} G'(x) \wedge G''(x) \end{aligned}$$

Comme $2G'' = G \wedge G'$, la formule du double produit vectoriel donne (on a vu que $G(x).G'(x) = x$ plus haut)

$$2G'(x) \wedge G''(x) 2 \left((G'(x).G'(x))G(x) - (G'(x).G(x))G'(x) \right) = 2G(x) - xG'(x)$$

En utilisant ceci dans l'expression de $G^{(3)}(x)$, on trouve que

$$G^{(3)}(x) + \left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4} \right) G'(x) - \frac{x}{4} G(x) = 0$$

21. (a) On introduit l'inconnue $X = (Y_1, Y_1', Y_1'', Y_2, Y_2', Y_2'', Y_3, Y_3', Y_3'')$ où les Y_i sont les coordonnées de Y. On a bien $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{9,1}(\mathbb{R}))$ puisque chaque Y_i est de classe C^3 (et même C^∞ avec la question **18**). Les Y_i vérifant la même équation différentielle, on va pouvoir écrire que X vérifie une équation différentielle du type

$$X' = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} X$$

Comme pour le passage d'une équation scalaire d'ordre 2 à un système vectoriel d'ordre 1, on a

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{4} & -\left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Posons $H(x) = G(-x)$; on a $H'(x) = -G'(-x)$, $H''(-x) = G''(-x)$ et $H'''(x) = -G'''(-x)$ et on en déduit que H est solution de la même équation que G. De plus, l'application définie par $K(x) = (-G_1(x), G_2(x), G_3(x))$ est aussi solution de la même équation (chaque coordonnée étant solution).
Par ailleurs, le cours nous indique que le système obtenu en question précédente admet une unique solution X si on fixe $X(0)$. Pour conclure que $H = K$, il nous suffit donc de remarquer que $H(0) = K(0)$, $H'(0) = K'(0)$ et $H''(0) = K''(0)$ ce qui est immédiat (on a $G(0) = (0, 0, 2\lambda)$, $G'(0) = (1, 0, 0)$ et $G''(0) = \frac{1}{2}(G(0) \wedge G'(0)) = (0, \lambda, 0)$). Nous avons donc

$$\forall x,\ G_1(-x) = -G_1(x),\ G_2(-x) = G_2(x),\ G_3(-x) = G_3(x)$$

(c) Posons $N(x) = \|G(x)\|^2 = G(x).G(x)$. N est régulière et

$$N'(x) = 2G(x).G'(x) \quad \text{et} \quad N''(x) = 2\|G'(x)\|^2 + 2G(x).G''(x) = 2$$

Il existe donc une constante c telle que $N'(x) = 2x + c$ et la valeur $N'(0) = 0$ indique que $c = 0$. Il existe donc une constante d telle que $N(x) = x^2 + d$ et la valeur de $N(0) = 4\lambda^2$ donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \|G(x)\|^2 = x^2 + 4\lambda^2$$

(d) Supposons que $G(x) = G(y)$. La question précédente donne alors $|x| = |y|$. Si on avait $x = -y$, on aurait alors $G_1(x) = G_(-x)$ ce qui impliquerait $G(x) = 0$ (car G_1 est impaire et $G_1(-x) = -G(x)$) et donc $x = 0$ (puisque l'on suppose que G_1ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$) et donc aussi $x = y$. Dans tous les cas, on a $x = y$. On a donc injectivité de G.

22. (a) D'après **20.c**, G_1' est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \lambda^2(x) = \frac{x}{4}(G_1(x) - xG_1'(x))$$

Notons r le second membre de l'équation. D'après l'énoncé, on a

$$G_1'(x) = \cos(\lambda x) G_1'(0) + \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} G_1''(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x r(s) \sin(\lambda(x-s))\, ds$$

Or, $G_1'(0) = 1$ et $G_1''(0) = 0$ (fonction impaire) ce qui donne

$$G_1'(x) - \cos(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x r(s) \sin(\lambda(x-s))\, ds$$

On remarque (avec les questions **17** et **14**) que

$$|r(s)| \leq \frac{|s|}{4} |G_1(s)| + \frac{s^2}{4} |G_1'(s)| \leq \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} = \frac{s^2}{2}$$

et une majoration grossière (inégalité triangulaire) donne (attention au sens des bornes, l'énoncé ne semble pas le voir)

$$|G_1'(x) - \cos(\lambda x)| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{[0,x]} |r(s)|\, ds = \frac{|x|^3}{6\lambda}$$

(b) Soit $x \geq 0$. Par théorème fondamental, on a $G_1(x) = \int_0^x G_1'(t)\, dt$ et donc

$$\left| G_1(x) - \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} \right| = \left| \int_0^x (G_1'(t) - \cos(\lambda t))\, dt \right| \leq \int_0^x \frac{t^3}{6\lambda}\, dt = \frac{x^4}{24\lambda}$$

En particulier, on a

$$G_1\left(\frac{3\pi}{2\lambda}\right) \leq -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{24\lambda}\left(\frac{3\pi}{2\lambda}\right)^4 \qquad (a)$$

$$G_1\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{24\lambda}\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^4 \qquad (b)$$

Dans (a), le membre de droite équivaut au voisinage de $+\infty$ à $-1/\lambda$ et est localement négatif. Dans (b), le membre de droite est de même localement positif au voisinage de $+\infty$. Ainsi, pour λ assez grand, G_1 change de signe. Par théorème des valeurs intermédiaires (G_1 est continue), G_1 s'annule donc pour λ assez grand, ce qui était demandé.

23. La question **20** donne $k_G = \lambda$ (fonction constante) et $\tau_G(x) = \frac{x}{2}$. On a ainsi

$$\Psi(t,x) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right)$$

Le calcul donne aisément

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{et} \quad |\Psi(t,x)|^2 = \frac{\lambda^2}{2}$$

En posant $\alpha = -\frac{1}{\lambda^2}$, on obtient l'EDP voulue.