# X-ENS 2015

## Notations

— Pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z)$ et $\Im(z)$ désignent les parties réelle et imaginaire de $z$.
— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
— Pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ désigne le produit vectoriel de $u$ et $v$. On pourra utiliser librement la formule du double produit vectoriel

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $u \cdot v$ désigne le produit scalaire euclidien de $u$ et $v$ et $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
— Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsque $f$ est définie sur $I \times \mathbb{R}$, on note $f(t, .) : x \mapsto f(t, x)$ et $f(., x) \ :\ t \mapsto f(t, x)$ les applications partielles correspondantes.
— Une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ est de classe $C^1$ si ses fonctions coordonnées le sont.
— $I_3$ désigne la matrice carrée identité de taille 3.
— Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Partie I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est une solution de l'équation $(E_\alpha)$ si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$(E_\alpha)\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + \frac{ix}{2} f'(x) + \frac{f(x)}{2}(\alpha |f(x)|^2 + 1) = 0$$

Dans les question 1 à 7 de la partie I, on suppose que $\alpha > 0$. De plus, on suppose qu'il existe une solution $f$ de $(E_\alpha)$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. On pose $F_1 = \Re(f)$ et $f_2 = \Im(f)$. Exprimer $f_1''$ et $f_2''$ en fonction de $f_1', f_2', f_1$ et $f_2$.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)|^2 + \frac{1}{4\alpha}(\alpha |f(x)|^2 + 1)^2 = \frac{1}{4\alpha}(\alpha + 1)^2$$
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq 1$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\alpha + 1)$$
4. Le but de cette question est de démontrer qu'il existe $(\ell, M_0) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que
$$\forall x > 0,\ ||f(x)|^2 - 1| \leq \frac{M_0}{x}$$
   (a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right) + \frac{x}{4}|f(x)|^2 - \frac{1}{4}\int_0^x |f(t)|^2\, dt = 0$$

(b) Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|^2\, dt\right) = -\frac{4}{x^2}\Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right)$$

(c) En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|^2\, dt = \ell$$

(d) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x > 0,\ \left|\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|^2\, dt - \ell\right| \leq \frac{M}{x}$$

(e) Conclure.

5. (a) On suppose dans cette question que $\ell = 1$. Montrer qu'il exite $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x > 0,\ \left||f(x)|^2 - 1\right| \leq \frac{M_1}{x^{3/2}}$$

(b) En déduire que $\ell < 1$.

6. Montrer que $|f|$ n'est pas périodique.
7. Pour $(\ell, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$f_\alpha(x) = f(x)\exp\left(i\frac{x^2}{4}\right),\ \Psi_\alpha(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

(a) Existe-t-il $t > 0$ tel que $\Psi_\alpha(t,.)$ soit périodique ?

(b) Exprimer $f'_\alpha$, $f''_\alpha$ et $|f_\alpha|$ en fonction de $f$, $f'$, $f''$ et $|f|$.

(c) Justifier que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $\Psi_\alpha(.,x) \in C^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ et $\Psi_\alpha(t,.) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, puis démontrer que $\Psi_\alpha$ vérifie l'équation $(F_\alpha)$ :

$$(F_\alpha)\quad i\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{2}\Psi_\alpha(t,x)\left(\alpha|\Psi_\alpha(t,x)|^2 + \frac{1}{t}\right) = 0$$

8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à termescomplexes telle que la série de terme général $k^2 a_k$ est absolument convergente. Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on note alors

$$\Phi_0(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-ik^2 t + ikx}$$

(a) Montrer que $\Phi_0$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on a $\Phi_0(.,x) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Phi_0(t,.) \in C^2(\mathbb{R})$. Calculer $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t,x)$ et $\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t,x)$.

(c) Soit $(c_k)$ une suite à termes complexes telle que lasérie de terme général $k^2 c_k$ est absolument convergente. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

Construire une fonction $\Psi_0$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui vérifie

- Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^*$, $\Psi_0(.,x) \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ et $\Psi_0(t,.) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Psi_0$ est solution de l'équation $(F_0)$ c'est à dire

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ i\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}(t,x) + \frac{1}{2t}\Psi_0(t,x) = 0$$

- Pour tout $t > 0$, $\Psi_0(t,.)$ est périodique.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_0(1,x) = f_0(x)$.

## Partie II

Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{M}$ la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -m & 0 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice

$$F_n(t) = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \mathcal{M}^k}{k!} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

   Montrer que la suite $(F_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $F(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Exprimer $F(t)$ en fonction de $R(\theta)$, où $\theta$ dépend de $m$ et de $t$.
10. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $X, Y$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a $F(t)X.Y = X.F(-t)Y$. En déduire qu e$F(t)(X \wedge Y) = (F(t)X) \wedge (F(t)Y)$.
11. Montrer que $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $F'(t) = F(t)\mathcal{M}$.
12. Montrer que pour $X \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}X.X = 0$. Interpréter géométriquement l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto (I_3 + \mathcal{M})X$.
13. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $m$ pour que la suite $((I_3 + \mathcal{M})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

## Partie III

On suppose que $G \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G''(x) = \frac{1}{2}\left((I_3 + \mathcal{M})G(x)\right) \wedge G'(x)$$

et que de plus

$$\|G'(0)\| = 1,\ \left((I_3 + \mathcal{M})G(0)\right).G'(0) = 0$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(x) = G'(x)$$

14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|T(x)\| = 1$.
15. Montrer qeu pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(I_3 + \mathcal{M})G(x) - xG'(x) = 2G'(x) \wedge G''(x)$.
16. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit $\tilde{G}(t, x) = \sqrt{t}F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, où $F$ est définie à la question 9. Montrer que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a $\tilde{G}(., x) \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^3)$ et $\tilde{G}(t, .) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, puis établir que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x, t) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x, t)$$

On suppose dans toute la suite de cette partie que $m = 0$ c'est à dire que

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose de plus qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$G(0) = (0, 0, 2\lambda),\ G'(0) = (1, 0, 0)$$

17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|G_1(x)| \leq |x|$, où l'on note $G_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la première coordonnée de $G = (G_1, G_2, G_3)$.
18. Montrer que $G \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.
19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\|T'(x)\| = \lambda$.
20. Pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit les vecteurs

$$n(x) = \frac{T'(x)}{\lambda},\ b(x) = T(x) \wedge n(x)$$

de sorte que $(T(x), n(x), b(x))$ forme une base orthonormale directe.

(a) En utilisant la question 15, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2b'(x) = -xn(x)$.

(b) En déduire que $n'(x) = -\lambda T(x) + \frac{x}{2} b(x)$.

(c) Montrer que $G$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'''(x) + \left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4}\right) G'(x) - \frac{x}{4} G(x) = 0$$

21. (a) Ecrire l'équation différentielle linéaire $Y''' + \left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4}\right) Y' - \frac{x}{4} Y = 0$, où $Y \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, sous la forme d'un système différentiel $X' = AX$, où $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et où $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On précisera $n$ et $A$.

(b) Montrer que les coordonnées $G_1, G_2, G_3$ de $G$ vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(-x) = -G_1(x),\ G_2(-x) = G_2(x),\ G_3(-x) = G_3(x)$$

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|G(x)\|^2 = x^2 + 4\lambda^2$.

(d) Etablir que si $G_1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, alors $G$ est une application injective sur $\mathbb{R}$.

22. (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |G_1'(x) - \cos(\lambda x)| \leq \frac{|x|^3}{6\lambda}$$

*Indication* :On pourra admettre que pour $r \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $y''(x) + \lambda^2 y(x) = r(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors

$$y(x) = \cos(\lambda x) y(0) + \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} y'(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x r(s) \sin(\lambda(x-s))\, ds$$

(b) En déduire qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que si $\lambda > \lambda_0$ alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que $G_1(x_0) = 0$.

23. Soit $H \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ telle que $\|H'(x)\| = 1$ et $\|H''(x)\| \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $T_H(x) = H'(x)$, $n_H(x) = T_H'(x)/\|T_H'(x)\|$ et $b_H(x) = T_H(x) \wedge n_H(x)$. On admet qu'il existe $k_H(x)$ et $\tau_H(x)$ tels que

$$\begin{cases} T_H'(x) = k_H(x) n_H(x) \\ n_H'(x) = -k_H(x - T_H(x) + \tau_H(x) b_H(x) \\ b_H'(x) = -\tau_H(x) n_H(x) \end{cases}$$

Exprimer $k_G$ et $\tau_G$, puis montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} k_G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(i \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} \tau\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\, dy\right)$$

est solution de l'équation $(F_\alpha)$ définie à la question 7$c$, c'est à dire

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ i\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, x) + \frac{1}{2} \Psi(t, x) \left(\alpha |\Psi(t, x)|^2 + \frac{1}{t}\right) = 0$$