X-ENS 2016
Un corrigé

Préliminaire

1. Notons s_i, r_i les signes sur la diagonale de S, R.

   (a) On a
   $$(Sx|Ry) = \sum_{i=1}^{n} s_i r_i x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
   puisque $s_i r_i \leq 1$ et que l'on multiplier cette inégalité par $x_i y_i \geq 0$. $x_i y_i(1-s_i r_i)$ étant positif, la somme de ces quantités n'est nulle que si elle sont toutes nulles. Comme $x_i y_i \neq 0$, ceci équivaut à $\forall i,\ r_i s_i = 1$. Comme les r_i, s_i sont des signes, ceci équivaut à $\forall i,\ r_i = s_i$ et donc à $R = S$.
   On a donc $(Sx|Ry) \leq (x|y)$ avec égalité ssi $S = R$.

   (b) Supposons avoir deux couples (x, S), (y, R) convenables dans le théorème de Broyden. On a alors
   $$(Sx|Ry) = (Ox|Oy) = (x|y)$$
   car O est orthogonale. Comme $x, y > 0$, la question précédente indique que $S = R$.

   (c) Par bilinéarité du produit scalaire,
   $$\|Sx + Ry\|^2 = (Sx|Sx) + 2(Sx|Ry) + (Ry|Ry)$$
   Avec 1.a (utilisée trois fois), on en déduit que
   $$\|Sx + Ry\|^2 \leq (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = \|x + y\|^2$$
   Il y a égalité quand on a trois cas d'égalité dans 1a, c'est à dire quand $S = S$, $R = S$ et $R = R$, c'est à dire quand $S = R$.
   On a ainsi montré que $\|Sx + Ry\| \leq \|x + y\|$ avec égalité quand $R = S$.

2. L'énoncé est plus que mal rédigé puisque la condition $(*)$ ne dépend pas de S alors que l'existence de x tel que $Ox = Sx$ est dépendant de S. Je propose de le comprendre de la manière suivante : si O est une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$ et si $x > 0$ alors il est équivalent de dire

   i. il existe une matrice diagonale de signe S telle que $Ox = Sx$;
   ii. $(I_n + O)x \geq 0$ et $(I_n - O)x \geq 0$.

   On procède en deux temps.

   - Supposons i. vérifiée. On a alors $(I_n + O)x = (I_n + S)x$ et $(I_n - O)x = (I_n - S)x$. Comme $I_n - S$ et $I_n + S$ sont positive et comme x est positif, on a $(I_n + O)x \geq 0$ et $(I_n - O)x \geq 0$ (chaque coordonnée est somme de termes positifs). Pour ce sens, seule l'hypothèse $x \geq 0$ sert (pas besoin de $x > 0$).
   - Supposons ii. vérifiée. Notons alors $y = Ox$. Par hypothèse, on a pour tout i, $x_i + y_i \geq 0$ et $x_i - y_i \geq 0$. Pour tout i, x_i esr ainsi plus grand que y_i et que $-y_i$ et donc $|y_i| \leq x_i$ (x_i est forcément positif). Mais comme O est orthogonale, on sait aussi que $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Si l'une des inégalité $|y_i| \leq x_i$ est stricte, on obtient alors une contradiction ce qui justifie par l'absurde que $\forall i,\ |y_i| = x_i$. En posant $s_i = 1$ si $x_i = y_i$ et $s_i = -1$ sinon, on a alors $S = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ qui est une matrice diagonale de signes telle que $Sx = Ox$. On notera que l'on n'a pas besoin de l'hypothèse $x > 0$ (ni même $x \geq 0$) dans ce sens.

A. Le cas $n = 2$.

3. Distinguons les cas selon la droite de réflexion.

   - Si cette droite est l'axe des abscisses, alors on a $O(1,0) = (1,0)$ et $O(0,1) = (0,-1)$ et donc $O(1,1) = (1,-1) = \mathrm{diag}(1,-1)(1,1)$. On peut ainsi choisir $x = (1,1)$ et $S = \mathrm{diag}(1,-1)$.
   - De même, si cette droite est l'axe des ordonnées, on peut choisir $x = (1,1)$ et $S = \mathrm{diag}(-1,1)$.
   - Sinon on a $v^+ = (a,b)$ avec $a, b \neq 0$. Quitte à prendre le vecteur opposé (qui dirige aussi la droite), on peut supposer que $a > 0$. Si $b > 0$ alors on peut choisir $x = (a,b)$ et $S = I_2$. Sinon, $b < 0$ (b n'est pas nul) et on peut choisir $x = (-b,a)$ et $S = -I_2$ (un vecteur orthogonal à v^+ est envoyé sur son opposé).

4. Un vecteur et son image forment un angle θ. On voit graphiquement qu'en s'arrangeant pour que la bissectrice soit l'un des axes coordonné, on aura la propriété voulue. On pose donc

   $$x_+ = r_{-\theta/2}(1,0) = (\cos(-\theta/2), \sin(-\theta/2)) \ \text{ et } \ x_- = r_{-\theta/2}(0,1) = (\cos(\pi/2-\theta/2), \sin(\pi/2-\theta/2))$$

   par construction, on a

   $$Ox_+ = r_{\theta/2}(1,0) = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)) = \mathrm{diag}(1,-1)x_+$$

   $$Ox_- = r_{\theta/2}(0,1) = (\cos(\pi/2+\theta/2), \sin(\pi/2+\theta/2)) = \mathrm{diag}(-1,1)x_-$$

   - Si $\theta \in]0,\pi[$ alors $(\pi-\theta)/2$ est dans $]0,\pi/2[$ et $x^- > 0$.
   - Si $\theta \in]-\pi,0[$ alors $-\theta/2 \in]0,\pi/2[$ et $x^+ > 0$.
   - Si $\theta = \pi$ alors O est en fait égale à $-I_2$. On peut alors choisir $x = (1,1)$ et $S = -I_2$.

B. Le théorème de Tucker

5. On se donne O orthogonale d'ordre n. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n + 0 \\ 0 & 0 & I_n - 0 \\ -(I_n + {}^tO) & -(I_n - {}^tO) & 0 \end{pmatrix}$ est alors antisymétrique. Le théorème de Tucker nous donne alors un vecteur $u \in \mathbb{R}^{3n}$. Ecrivons u avec trois blocs u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^n$. On a alors

   $$Mu = \begin{pmatrix} (I_n + O)u_3 \\ (I_n - O)u_3 \\ -(I_n + {}^tO)u_1 - (I_n - {}^tO)u_2 \end{pmatrix}$$

   $$u + MU = \begin{pmatrix} u_1 + (I_n + O)u_3 \\ u_2 + (I_n - O)u_3 \\ u_3 - (I_n + {}^tO)u_1 - (I_n - {}^tO)u_2 \end{pmatrix}$$

   Comme $Mu \geq 0$ et $u + Mu > 0$, il suffit de choisir

   $$x = u_3, \ z_1 = u_1, \ z_2 = u_3$$

   qui sont positifs par hypothèse (partie du résultat du théorème de Tucker).

6. Remarquons que

   $$-(I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 = {}^tO(z_2 - z_1) - (z_2 + z_1)$$

   La troisième des relations précédentes donne donc

   $$^tO(z_2 - z_1) \geq (z_2 + z_1) \tag{$*$}$$

Comme ${}^tO$ est orthogonale, $(z_2 - z_1)$ et ${}^tO(z_2 - z_1)$ ont même norme. De plus $y_1 \geq y_2$ et $y_2 \geq 0$ entraîne $\|y_1\| \geq \|y_2\|$ (il suffit d'écrire le carré de la norme comme somme des carrés des coordonnées) et on a donc

$$\|z_1 - z_2\| \geq \|z_1 + z_2\|$$

En élevant au carré, on trouve alors que $(z_1|z_2) \leq 0$. Comme les vecteurs sont à coordonnées positives, cela entraîne $(z_1|z_2) = 0$ puis

$$\|z_1 - z_2\| = \|z_1 + z_2\|$$

De même, si on a inégalité stricte dans $(*)$, on va trouver $\|z_1 - z_2\| > \|z_1 + z_2\|$ ce qui est faux. $(*)$ est donc une égalité.

7. La dernière relation de la question 5 donne maintenant $x > 0$ (l'autre terme est nul, on vient de le montrer). Les relations $x + Ox \geq 0$ et $x - Ox \geq 0$ sont les deux premières de la question 5. Il reste à utiliser la question 2 pour conclure.

8. Il suffit de montrer que -1 n'est pas valeur propre de M. Soit donc x un vecteur tel que $Mx = -x$. On a

$$\|x\|^2 = (x|x) = -(Mx|x) = -{}^t(Mx)x = -{}^tx{}^tMx = {}^txMx = (x|Mx) = -(x|x) = -\|x\|^2$$

Il en résulte que $\|x\| = 0$. $\ker(M + I_n)$ est donc réduit à $\{0\}$ et $M + I_n$ est inversible.

9. Les opérations de transposition et de passage à l'inverse commutent et donc $I_n - M = {}^t(I_n + M)$ est inversible. De plus

$$^tOO = (I_n + M)(I_n - M)^{-1}(I_n + M)^{-1}(I_n - M)$$

Comme $I_n + M$ et $I_n - M$ commutent, il en est de même de leurs inverses et donc

$$^tOO = (I_n + M)(I_n + M)^{-1}(I_n - M)^{-1}(I_n - M) = I_n$$

Ceci montre que O est orthogonale.

10. Le théorème de Broyden donne l'existence de $x > 0$ et de S matrice diagonale de signes tels que $Ox = Sx$. Posons $u = x + Sx = (I + O)x$. La question 2 montre que $u \geq 0$. On a aussi

$$\begin{aligned} Mu &= Mx + MOx \\ &= Mx + (M + I_n - I_n)(I_n + M)^{-1}(I_n - M)x \\ &= Mx + (I_n - M)x - (I_n + M)^{-1}(I_n - M)x \\ &= x - Ox \end{aligned}$$

La question 2 montre aussi que $Mu \geq 0$. Enfin, la relation précédente donne

$$Mu + u = x > 0$$

Le vecteur u convient pour prouver le théorème de Tucker.

C. Preuve du théorème de Broyden

11. O étant orthogonale, ses colonnes sont de norme 1 ainsi que ses lignes (la transposée d'une matrice orthogonale est orthogonale). En regardant dernière ligne et dernière colonne, on obtient

$$\|r\|^2 + \alpha^2 = \|q\|^2 + \alpha^2 = 1$$

Ainsi, $|\alpha| \leq 1$ et il n'y a égalité que si $q = r = 0$.

12. Supposons $|\alpha| = 1$. On a alors $I_n = {}^tOO = \begin{pmatrix} {}^tPP & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et P est ainsi orthogonale. On peut trouver $y > 0$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $S_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ matrice diagonale de signes tels que $Py = S_1 y$. Si on note $x \in \mathbb{R}^n$ obtenu à partir de y en ajoutant une coordonnée égale à 1 et si on pose $S = \mathrm{diag}(S_1, 1)$, on a $Ox = Sx$, $x > 0$ et S matrice diagonale de signes.

13. Un calcul par blocs donne

$$I_n = {}^tOO = \begin{pmatrix} {}^tPP + q^tq & {}^tPr + q\alpha \\ {}^trP + \alpha^tq & {}^trr + \alpha^2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors les relations demandée en remarquant que α étant un scalaire, on a $q\alpha = \alpha q$.

14. On a alors (on pense à transposer la seconde relation de la question précédente et on remarque que ${}^trr$ est un scalaire que l'on peut déplacer dans le produit)

$$\begin{aligned} {}^tQ_-Q_- &= \left({}^tP - \frac{q^tr}{\alpha - 1}\right)\left(P - \frac{r^tq}{\alpha - 1}\right) \\ &= {}^tPP - \frac{1}{\alpha - 1}\left(q^trP + {}^tPr^tq\right) + \frac{q^trr^tq}{(\alpha - 1)^2} \\ &= (I_{n-1} - q^tq) - \frac{1}{\alpha - 1}(-\alpha q^tq - \alpha q^tq) + \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} q^tq \\ &= I_{n-1} \end{aligned}$$

La dernière égalité est une vérification de nullité du coefficient devant la matrice q^tq.
Le calcul est en tout point semblable pour Q_+. Nos deux matrices sont ainsi bien orthogonales.

15. On a cette fois

$$\begin{aligned} {}^tQ_+Q_- &= \left({}^tP - \frac{q^tr}{\alpha + 1}\right)\left(P - \frac{r^tq}{\alpha - 1}\right) \\ &= {}^tPP - \frac{1}{\alpha + 1} q^trP - \frac{1}{\alpha - 1} {}^tPr^tq + \frac{q^trr^tq}{\alpha^2 - 1} \\ &= (I_{n-1} - q^tq) + \frac{\alpha}{\alpha + 1} q^tq + \frac{\alpha}{\alpha - 1} q^tq - q^tq \\ &= I_{n-1} - \frac{2}{1 - \alpha^2} q^tq \end{aligned}$$

On multiplie cette relation par Q_+ et comme Q_+ est orthogonale, on obtient

$$Q_- = Q_+ - \frac{2}{1 - \alpha^2} Q_+ q^tq$$

16. On remplace Q_- par son expression en fonction de Q_+ :

$$\begin{aligned} (S_+x_+|S_-x_-) &= (Q_+x_+|Q_-x_-) \\ &= (Q_+x_+|Q_+x_- - \frac{2}{1 - \alpha^2} Q_+q^tqx^-) \\ &= (Q_+x_+|Q_+x_-) - \frac{2}{1 - \alpha^2}(Q_+x_+|Q_+q^tqx^-) \end{aligned}$$

Q_+ étant orthogonale, elle conserv le produit scalaire et ainsi

$$(S_+x_+|S_-x_-) = (x_+|x_-) - \frac{2}{1 - \alpha^2}(x_+|q^tqx^-)$$

Pour conclure, on remarque que

$$(x_+|q{}^t q x^-) = {}^t x_+ q {}^t q x^- = (x_+|q)(q|x_-)$$

ce qui donne finalement (symétrie du produit scalaire)

$$(S_+x_+|S_-x_-) = (x_+|x_-) - \frac{2}{1-\alpha^2}(x_+|q)(x_-|q)$$

17. Un calcul par blocs donne

$$Oz_+ = \begin{pmatrix} Px_+ + r\eta_+ \\ {}^t q x_+ + \alpha\eta_+ \end{pmatrix}$$

Avec la définition de Q_+ on a

$$Q_+x_+ = Px_+ - \frac{r{}^t q x_+}{\alpha+1} = Px_+ - \frac{(q|x_+)}{\alpha+1}r = Px_+ + \eta_+ r$$

et on a aussi

$${}^t q x_+ + \alpha\eta_+ = (q|x^+) + \alpha\eta_+ = -(\alpha+1)\eta_+ + \alpha\eta_+ = -\eta_+$$

en sorte que

$$Oz_+ = \begin{pmatrix} Q_+x_+ \\ -\eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_+x_+ \\ -\eta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z_+$$

De même,

$$Oz_- = \begin{pmatrix} Q_-x_- \\ \eta_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_-x_- \\ \eta_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_- & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_-$$

ATTENTION : on ne trouve pas les mêmes matrices que dans l'énoncé.
Pour conclure dans ce cas, il nous suffit de montrer que z_+ ou z_- est > 0. Pour cela, comme x_+, x_- sont > 0, il suffit de montrer que η_+ ou η_- est > 0.
On se place dans le cas où $S_+ \neq S_-$ et la question 1.a indique que

$$(S_+x_+|S_-x_-) < (x_+|x_-)$$

La question 16 indique ainsi que

$$\eta_+\eta_- = -\frac{2}{1-\alpha^2}(x^+|q)(x_-|q) = (S_+x_+|S_-x_-) - (x_+|x_-) < 0$$

η_+ et η_- sont ainsi non nuls et de signes opposés. L'un des deux est > 0 et on peut conclure dans ce cas.
Remarque : sans l'hypothèse $S_+ \neq S_-$ on obtient seulement que $\eta_+\eta_- \leq 0$.

18. (a) Le même calcul qu'en question précédente (cas $\eta_+ = 0$) donne

$$Oz = \begin{pmatrix} S_+x_+ \\ 0 \end{pmatrix} = R_+z = R_-z$$

(b) On pose cette fois

$$Q'_+ = P' - \frac{r'{}^t q'}{\alpha'+1} \quad \text{et} \quad Q'_- = P' - \frac{r'{}^t(q')}{\alpha'-1}$$

Comme O est orthogonale, un produit par blocs donne

$$(\alpha')^2 + {}^t r' r' = 1,\ q'{}^t q' + {}^t P' P' = I_{n-1},\ {}^t P' r' + \alpha' q' = 0$$

On vérifie que Q'_+ et Q'_- sont orthogonales etc. On fait ainsi les mêmes calculs qu'avant pour obtenir deux vecteurs $z'_+ = \begin{pmatrix} \eta'_+ \\ x'_+ \end{pmatrix}$ et $z'_- = \begin{pmatrix} \eta'_- \\ x'_- \end{pmatrix}$ avec x'_- et x'_+ qui sont > 0 et $\eta'_+\eta'_- \leq 0$. L'une des deux η'_+ ou η'_- est positif ce qui nous donne un bon $z' = \begin{pmatrix} \eta' \\ x' \end{pmatrix}$ avec $x' > 0$, $\eta' \geq 0$ et $Oz' = R'z'$ pour une bonne matrice diagonale de signes.

(c) Si $\eta' > 0$, on a terminé car z' convient dans le théorème. Sinon, a en fait deux matrices R' convenables car le premier coefficients est indifférents (comme en 18.a). Notons alors R'_+ et R'_- ces matrices. Pour $R \in \{R_+, R_-\}$, et $R' \in \{R'_+, R'_-\}$, on a $O(z' + z) = Oz' + Oz = Rz + R'z'$ et comme O est orthogonale (et conserve donc la norme)

$$\|z' + z\| = \|Rz + R'z'\|$$

En reprenant le raisonnement de la question 1, on voit que les coefficients de R et R' sont tous égaux sauf éventuellement le premier et le dernier (car toutes les coordonnées intermédiaires de z et z' sont > 0). Mais on peut choisir comme on veut le signe en bas de R et celui en haut de R'. On peut donc s'arranger pour que $R = R'$. On a alors $O(z + z') = R(z + z')$ et $z + z' > 0$ car $n \geq 2$ (les seuls 0 sur z et z' sont en des positions différentes).

D. Lemme de Farkas

Un calcul par blocs donne

$$By = \begin{pmatrix} Ax - bt \\ -Ax + bt \\ -{}^tA(z_1 - z_2) \\ {}^tb(z_1 - z_2) \end{pmatrix}$$

19. Dans le cas où $t = 0$ et en posant $z = z_1 - z_2$, on a donc

$$By = \begin{pmatrix} Ax \\ -Ax \\ -{}^tAz \\ {}^tbz \end{pmatrix}$$

Ce vecteur étant positif, on a $-{}^tAz \geq 0$ et $(b|z) = {}^tbz \geq 0$. De plus

$$By + y = \begin{pmatrix} Ax + z_1 \\ -Ax + z_2 \\ -{}^tAz + x \\ {}^tbz \end{pmatrix}$$

Ce vecteur étant > 0 on a donc même $(b|z) = {}^tbz \geq 0$.

20. On suppose maintenant $t > 0$. Comme $By \geq 0$, les vecteurs $Ax - bt$ et $-Ax + bt$ ont des coordonnées positives. Comme elles sont opposées, ce vecteur est nul et donc

$$Ax = tb$$

Dans la question 19, on est dans le cas (II) du lemme et ici on est dans le cas (I) (avec $z = x/t$ qui est positif). Enfin, il faut montrer que les situations (I) et (II) sont incompatibles. Supposons donc avoir $Ax_0 = b$ avec $x_0 \geq 0$ et z_0 tel que $-{}^tAz_0 \geq 0$ et $(b|z_0) > 0$. On a alors

$$(x_0|{}^tAz_0) = (Ax_0|z_0) = (b|z_0) > 0$$

Mais $(x_0|{}^tAz_0)$ est négatif car produit scalaire d'un vecteur positif et d'un autre négatif ce qui est contradictoire.