X-ENS 2017 - PSI
Un corrigé

Partie I

1. (a) Soit $v \in E$. On a

$$(M - \mathrm{Id}_E)(v^+) = (M - \mathrm{Id}_E)(M + \mathrm{Id}_E)(v) = (M^2 - \mathrm{Id}_E)(v) = 0_E$$

$$(M + \mathrm{Id}_E)(v^-) = (M + \mathrm{Id}_E)(\mathrm{Id}_E - M)(v) = (\mathrm{Id}_E - M^2)(v) = 0_E$$

On en déduit que $v^+ \in F^+$ et $v^- \in F^-$.

(b) Soit $(v, w) \in F^+ \times F^-$. On a $M(v) = v$ et $M(w) = -w$ et donc

$$(v|w) = (Mv|w) = (v|Mw) = -(v|w)$$

Ceci montre que $(v|w) = 0$ et donc que $F^+ \oplus^\perp F^-$.
Par ailleurs, si $v \in E$ alors $v = \frac{1}{2}v^+ + \frac{1}{2}v^- \in F^+ + F^-$ et donc $E \subset F^+ + F^-$. La réciproque est immédiate et ainsi

$$E = F^+ \oplus^\perp F^-$$

(c) Soit $v \in F^+$. On a (avec $(H4)$ et $M(v) = v$)

$$(M + \mathrm{Id}_E)(T(v)) = M \circ T(v) + T(v) = -T \circ M(v) + T(v) = -T(v) + T(v) = 0_E$$

et donc $T(v) \in F^-$. Ainsi $T(F^+) \subset F^-$.
Soit $v \in F^-$. On a (avec $(H4)$ et $M(v) = -v$)

$$(M - \mathrm{Id}_E)(T(v)) = M \circ T(v) - T(v) = -T \circ M(v) - T(v) = -T(-v) - T(v) = 0_E$$

et donc $T(v) \in F^+$. Ainsi $T(F^-) \subset F^+$.
On en déduit que

$$T^2(F^+) = T(T(F^+)) \subset T(F^-) \subset F^+$$

et de même

$$T^2(F^-) = T(T(F^-)) \subset T(F^+) \subset F^-$$

2. Soit $0 \leq k \leq 2m$. On a

$$\mathrm{Im}(T^{k+1}) = T^k(\mathrm{Im}(T)) \subset \mathrm{Im}(T^k)$$

Supposons, par l'absurde, que cette inclusion soit une égalité. On aurait alors $\mathrm{Im}(T^{k+2}) = T(\mathrm{Im}(T^{k+1})) = T(\mathrm{Im}(T^k)) = \mathrm{Im}(T^{k+1})$. Par récurrence simple, on en déduirait que $\mathrm{Im}(T^k) = \mathrm{Im}(T^{2m}) = \mathrm{Im}(T^{2m+1}) = \{0_E\}$. Comme T^{2m} n'est pas l'application nulle, ceci est contradictoire. On a donc

$$\mathrm{Im}(T^{k+1}) \neq \mathrm{Im}(T^k)$$

3. On a des espaces emboîtés strictement et, en passant aux dimensions

$$2m + 1 = \dim(\mathrm{Im}(T^0)) > \dim(\mathrm{Im}(T^1)) > \cdots > \dim(\mathrm{Im}(T^{2m+1})) = 0$$

On a ainsi $2m+2$ entiers naturels en progression strictement croissante de 0 à $2m+1$. $0, 1, \dots, 2m+1$ est la seule telle progression et donc

$$\forall k \in \{0, \dots, 2m + 1\},\ \dim(\mathrm{Im}(T^k)) = 2m + 1 - k$$

Par théorème du rang, on en déduit que

$$\forall k \in \{0, \dots, 2m + 1\},\ \dim(\mathrm{Ker}(T^k)) = \dim(E) - (2m + 1 - k) = k$$

4. Soit $0 \leq k \leq 2m+1$. Comme $0_{\mathcal{L}(E)} = T^{2m+1} = T^{2m+1-k} \circ T^k$, on a $\mathrm{Im}(T^k) \subset \ker(T^{2m+1-k})$. Par égalité des dimensions (question précédente),

$$\mathrm{Im}(T^k) = \ker(T^{2m+1-k})$$

5. On a $\dim(\mathrm{Im}(T^k)^\perp) = 2m+1-\dim(\mathrm{Im}(T^k)) = k$ et $\dim(\mathrm{Im}(T^{k-1})) = 2m+2-k$. Si les deux espaces étaient en somme directe (par l'absurde), la somme de leurs dimensions serait inférieure à celle de E, c'est à dire $2m+1$, ce qui est faux (elle vaut $2m+2$). On en déduit que

$$\mathrm{Im}(T^k)^\perp \cap \mathrm{Im}(T^{k-1}) \neq \{0_E\}$$

Soit $z \neq 0_E$ dans cet ensemble. On a donc $z \in \mathrm{Im}(T^k)^\perp = \ker(T^{2m+1-k})^\perp$. Comme un espace et son orthogonal sont en somme directe, leur intersection est réduite à $\{0_E\}$. Comme $z \neq 0_E$, $z \notin \ker(T^{2m+1-k})$ et donc $T^{2m+1-k}(z) \neq 0$.

6. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2) \circ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^k T^{2k} &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^k T^{2k} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^{k+1} T^{2k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^k T^{2k} - \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \alpha^j T^{2j} \\
&= \mathrm{Id}_E - (-1)^{2m+1} \alpha^{m+1} T^{2m+2} \\
&= \mathrm{Id}_E
\end{aligned}$$

On en déduit (pas besoin de faire la composition dans l'autre sens pour des endomorphismes en dimension finie) que $\mathrm{Id}_E + \alpha T^2 \in GL(E)$ et que

$$(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^k T^{2k}$$

7. On a $0_E \in G$ et $G \subset E$. Si $x, y \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors
   - $x + \lambda y \in \mathrm{Im}(T)$ car $x, y \in \mathrm{Im}(T)$.
   - $\forall v \in E,\ S(x+\lambda y, v) = S(x, v) + \lambda S(y, v) = 0$.

   Ainsi, $x + \lambda y \in G$ et G est stable par combinaisons linéaires. C'est finalement un sous-espace de E.
   Soit $u \in G \cap \ker(T)$. On a $\forall v \in E,\ S(u, v) = 0$ et donc $(u|T(v)) + (T(u)|v) = 0$. Comme $u \in \ker(T)$, ceci donne $\forall v \in E,\ (u|T(v)) = 0$. Mais $u \in \mathrm{Im}(T)$ (car $u \in G$) et il existe v tel que $u = T(v)$. Pour ce v, on trouve que $(u|u) = 0$ et donc que $u = 0$. On a montré que

$$G \cap \ker(T) = \{0_E\}$$

8. $(v, w) \mapsto (T(v)|T(w))$ est clairement bilinéaire symétrique et positive. Soit $v \in G$ tel que $(T(v)|T(v)) = 0$. On a alors $T(v) = 0$ et donc $v \in G \cap \ker(T)$ et donc $v = 0_E$. L'application est donc définie positive. C'est finalement un produit scalaire sur G.

9. (a) On procède par récurrence.
   - Initialisation : le résultat est immédiat pour $k = 0$ ($M = M$).
   - Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $k \geq 0$. On a alors

   $$M \circ T^{k+1} = (M \circ T^k) \circ T = (-1)^k T^k \circ M \circ T = (-1)^k T^k \circ (-T \circ M) = (-1)^{k+1} T^{k+1} \circ M$$

   ce qui prouve le résultat au rang $k+1$.

(b) Soit $v \in \mathrm{Im}(T^k)$; il existe $u \in E$ tel que $v = T^k(u)$. On a alors $M(v) = (-1)^k T^k(M(u)) \in \mathrm{Im}(T^k)$.
Soit $v \in \ker(T^k)$. On a $T^k(M(v)) = (-1)^k M(T^k(v)) = 0$ et $M(v) \in \ker(T^k)$.
Les sous-espaces $\ker(T^k)$ et $\mathrm{Im}(T^k)$ sont ainsi stables par M.

10. En particulier $\ker(T)$ est stable par M. Or, $\ker(T)$ est de dimension 1 et il existe $e \neq 0_E$ tel que $\ker(T) = \mathrm{Vect}(e)$. On a alors $M(e) \in \ker(T)$ qui est multiple de e, c'est à dire que e est vecteur propre pour M. Or, $X^2 - 1$ annule M et les seules valeurs propres possibles pour M sont donc 1 et -1. On a ainsi $M(e) = e$ ou $M(e) = -e$. Dans le premier cas, $\ker(T) \subset F^+$ et dans le second $\ker(T) \subset F^-$.

11. (a) Soit $z \in F^-$. On a vu que $T^{2m}(z) \in F^-$ (car F^- stable par T^2). Mais on a aussi $T^{2m}(z) \in \ker(T) \subset F^+$ (car $T^{2m+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$). Comme $F^- \oplus F^+$, $T^{2m}(z) = 0$.
(b) On vient de voir que $F^- \subset \ker(T^{2m}) = \mathrm{Im}(T)$. En passant à l'orthogonal, on en déduit que
$$\mathrm{Im}(T)^\perp \subset (F^-)^\perp = F^+$$
Notons T' (resp. M') l'endomorphisme induit par T (resp. M') sur $\mathrm{Im}(T)$. M' et T' vérifient les mêmes hypothèses que M et T (si ce n'est que l'on n'est pas en dimension paire car $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension $2m$ mais cela n'a pas été utilisé dans ce qui précède). $\mathrm{Im}(T^2)^\perp \cap \mathrm{Im}(T)$ s'interpète comme $\mathrm{Im}(T')^\perp$. On reprend alors la raisonnement avec T' mai en tenangt compte du fait que la dimension de l'espace est paire :
- Soit $v \in F^+$. En vertu de la question 1.c, $(T')^{2m-1}(v) \in F^-$. Or, $(T')^{2m} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{Im}(T))}$, donc $(T')^{2m-1}(v) \in \ker(T') \subset \ker(T) \subset F^+$ par hypothèse. Ainsi, $(T')^{2m-1}(v) \in F^+ \cap F^- = \{0_E\}$.
- On a ainsi prouvé que $F^+ \subset \ker((T')^{2m-1}) = \mathrm{Im}(T')$, d'où $\mathrm{Im}(T')^\perp \subset F^{+\perp} = F^-$.

En résumé,
$$\mathrm{Im}(T^2)^\perp \cap \mathrm{Im}(T) \subset F^-$$
(c) Soit z un élément non nul de $\mathrm{Im}(T)^\perp$. On a
$$\forall u \in G,\ (T(z)|u) = S(z,u) - (T(u)|z) = 0$$
car $S(z,u) = 0$ ($u \in G$) et $(T(u)|z) = 0$ ($z \in \mathrm{Im}(T)^\perp$). Ainsi, $T(z) \in G^\perp$.
Par ailleurs, $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^{2m}) \subset \mathrm{Im}(T)$ donc $\mathrm{Im}(T)^\perp \subset \ker(T)^\perp$. Ainsi, $z \in \ker(T)^\perp$ et, comme $z \neq 0_E$, $z \notin \ker(T)$.
(d) C'est le même résultat que 11(c) appliqué à $z \in (\mathrm{Im}(T'))^\perp$, avec les notations introduites à la question 11(b).

12. On se place dans le cas où $\ker(T) \subset F^+$, l'autre cas ($\ker(T) \subset F^-$) étant similaire (les rôles de F^+ et F^- sont intervertis).
Comme $\mathrm{Im}(T)^\perp$ est de dimension $1 \neq 0$, on peut trouver $w_1 \in \mathrm{Im}(T)^\perp$ non nul. Les questions 11.b et 11.c donnent $w_1 \in F^+$, $T(w_1) \in G^\perp$ et $T(w_1) \neq 0_E$. De plus $\mathrm{Im}(T^2) \subset \mathrm{Im}(T)$ donne, en passant à l'orthogonal, $\mathrm{Im}(T)^\perp \subset \mathrm{Im}(T^2)^\perp$ et ainsi $w_1 \in \mathrm{Im}(T^2)^\perp$.
La question 5 donne l'existence de $w_2 \neq 0_E$ dans $\mathrm{Im}(T^2)^\perp \cap \mathrm{Im}(T)$. Les questions 11.b et 11.d indiquent que $w_2 \in F^-$, $T(w_2) \in G^\perp$ et $T(w_2) \neq 0_E$.
(w_1, w_2) vérifie alors $(A), (B), (C)$ et est donc une paire caractérisante de G.

13. $(T(w_1), T(w_2))$ est une famille libre car ce sont des éléments non nuls dans F^- et F^+ qui sont en somme directe. Comme ce sont des éléments de $G^\perp$, cet espace est au moins de dimension 2. On en déduit que
$$\dim(G) = 2m + 1 - \dim(G^\perp) \leq 2m - 1$$
Il faut être plus précis. On remarque que $G \subset \mathrm{Im}(T)$ et on a donc $\mathrm{Im}(T)^\perp \subset G^\perp$. $\mathrm{Im}(T)^\perp$ est de dimension 1 et on note ε une base de cet espace. $(\varepsilon, T(w_1), T(w_2))$ est aussi une famille libre car $\varepsilon \in \mathrm{Vect}(T(w_1), T(w_2))^\perp$. On a donc en fait
$$\dim(G) \leq 2m - 2$$

14. Si $\dim(G) = 2m - 2$ alors $G^{\perp}$ est de dimension 3. $(T(w_1), T(w_2))$ ne peut alors être une base de $G^{\perp}$. Il y a à l'évidence une erreur d'énoncé. On a en fait $(T(w_1), T(w_2))$ qui est une base de $G^{\perp} \cap \mathrm{Im}(T)$.

Partie II

15. (a) Supposons que $u \neq 0_E$ soit une solution. En particulier (avec $v = u$ qui est bien dans G)

$$\lambda(T(u)|T(u)) = (u|u) = \|u\|^2 > 0$$

Si, par l'absurde, on avait $T(u) = 0$ alors $(\mathcal{P}_\lambda)$ donnerait $\forall v \in G,\ (u|v) = 0$ et on aurait $u \in G \cap G^{\perp}$ et donc $u = 0_E$ ce qui est exclus. On en déduit que $(T(u)|T(u)) > 0$ et ainsi

$$\lambda = \frac{\|u\|^2}{\|T(u)\|^2} > 0$$

(b) Soit $u \in G$.

- Si u est solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ alors

$$\forall v \in G,\ (u+\lambda T^2(u)|v) = (u|v)+\lambda(T^2(u)|v) = \lambda((T(u)|T(v))+(T^2(u)|v)) = \lambda S(T(u), v)$$

Comme $v \in G$, $S(T(u), v) = 0$ et ainsi $u + \lambda T^2(u) \in G^{\perp}$.

- Réciproquement, supposons que $u + \lambda T^2(u) \in G^{\perp}$. On a alors

$$\forall v \in G,\ (u|v) = -\lambda(T^2(u)|v) = -\lambda(S(T(u), v) - (T(u)|T(v)))$$

Comme $S(T(u), v) = 0$ pour tout $v \in G$, on en déduit que

$$\forall v \in G,\ (u|v) - \lambda(T(u)|T(v)) = 0$$

et u est solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Dans ce cas (en supposant que u est solution), on peut décomposer $u+\lambda T^2(u)$ sur $(T(w_1), T(w_2))$ qui est une base de $G^{\perp} \cap \mathrm{Im}(T)$ sous la forme $\alpha T(w_1) + \beta T(w_2)$. Il reste à composer par l'inverse de $\mathrm{Id}_E + \lambda T^2$ (qui existe) pour obtenir

$$u = \alpha(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1} T(w_1) + \beta(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1} T(w_2)$$

(c) On raisonne à nouveau en deux temps.

- Supposons que $(\mathcal{P}_\lambda)$ possède une solution non nulle u. Il existe donc α et β comme ci-dessus. En utilisant l'expression de $(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}$, on obtient

$$u = \alpha \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \lambda^k T^{2k+1}(w_1) + \beta \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \lambda^k T^{2k+1}(w_2)$$

Notons que comme $T^{2m+1} = 0$, les termes pour $k = m$ dans les sommes ci-dessus sont nuls. En effectuant le produit scalaire avec $T(w_1)$, on trouve

$$0 = \alpha Q_1(\lambda) + \beta \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \lambda^k (T^{2k+1}(w_2)|T(w_1))$$

Comme $w_2 \in F^-$, les $T^{2k+1}(w_2)$ sont dans F^+. Comme $w_1 \in F^+$, $T(w_1) \in F^-$. F^+ et F^- étant orthogonaux, tous les termes de la somme sont nuls et ainsi

$$\alpha Q_1(\lambda) = 0$$

En effectuant le produit scalaire avec $T(w_2)$, on trouve de même que

$$\beta Q_2(\lambda) = 0$$

Comme u n'est pas nul et que $(T_1(w), T_2(w))$ est libre, soit α soit β est non nul et donc soit $Q_1(\lambda)$ soit $Q_2(\lambda)$ est nul. On en déduit que

$$Q_1(\lambda).Q_2(\lambda) = 0$$

- Réciproquement, si $Q_1(\lambda).Q_2(\lambda) = 0$ alors par le même calcul que ci-dessus, on trouve que soit $(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1)$ soit $(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2)$ est dans G (car orthogonal à $T(w_1)$ et $T(w_2)$) et est alors solution non nulle de $(\mathcal{P}_\lambda)$.

(d) D'après la question (*b*), l'ensemble des solution est au plus de dimension 2 (puisque toute solution est combinaison linéaire de $(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1)$ et $(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2)$).
Si $Q_1(\lambda) = Q_2(\lambda) = 0$, on vient de voir que $(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1)$ et $(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2)$ sont deux solutions et elles sont indépendantes (car $T(w_1)$ et $T(w_2)$ sont indépendants et on compose par un isomorphisme). Ces deux vecteurs forment une base de H_λ qui est alors de dimension 2.
Si λ n'est pas racine commune de Q_1 et Q_2 alors, avec les notations de (b) et le calcul de (c), α ou β doit être nul et H_λ est de dimension au plus 1. Comme dans la cas précédent, on a une solution non nulle et H_λ est en fait de dimension 1.

(e) Par définition de S, on a

$$S(w_i, T^{2k+1}(w_i)) = (T(w_i)|T^{2k+1}(w_i)) + (w_i|T^{2k+2}(w_i))$$

Mais w_i est dans $\mathrm{Im}(T^2)^\perp$ et $T^{2k+2}(w_i) \in \mathrm{Im}(T^2)$ montre que le second produit scalaire est nul. On en déduit que

$$\forall i \in \{1,2\},\ Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S(w_i, T^{2k+1}(w_i)) X^k$$

16. (a) Par bilinéarité du produit scalaire,

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j (z_i|z_j) = \sum_{i=1}^{n}\left(u_i \sum_{j=1}^{n}(z_i|z_j)v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} U_i(AV)_j =^t UAV$$

De même,

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j (T(z_i)|T(z_j)) =^t UBV$$

Supposons que $AV = 0$; on a alors $\forall u \in G,\ (u|v) = 0$ et donc $v \in G \cap G^\perp$ et donc $v = 0$ puis $V = 0$. On a ainsi $\ker(A) = \{0\}$ et A est une matrice inversible.
Supposons que $BV = 0$; on a de même $\forall u \in G,\ (T(u)|T(v)) = 0$. En particulier, $(T(v)|T(v)) = 0$ et avec la question 8 (comme $v \in G$), $v = 0$. B est ainsi inversible.

(b) Supposons que $u \in G$ est solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$. On a donc

$$\forall v \in G,\ (v|u) - \lambda(T(v)|T(u)) = 0$$

ce qui donne matriciellement

$$\forall V \in \mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R}),\ 0 =^t VAU - \lambda^t VBU =^t V(A - \lambda B)U$$

En appliquant ceci avec $V = (A - \lambda B)U$, on trouve alors que $\|(A - \lambda B)U\|^2 = 0$ (norme euclidienne canonique sur les matrices colonnes) et donc que

$$(A - \lambda B)U = 0$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, on remonte le calcul pour obtenir que u est solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$.
Si $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle u, on trouve $U \neq 0$ tel que $(A - \lambda B)U = 0$ et $A - \lambda B$ est non inversible et donc est de déterminant nul. Réciproquement, la nullité du déterminant mène à un U puis à un $u \neq 0$ solution.

(c) Soit $\mathcal{B}' = (z'_1, \dots, z'_\ell)$ une autre base et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On note U' la colonne associée à $u \in G$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc $U = PU'$. On note aussi A', B' les matrices de terme général $(z'_i|z'_j)$ et $(T(z'_i)|T(z'_j))$. On a alors

$$\forall u, v \in G,\ (u|v) =^t UAV =^t U'A'V'$$

et donc

$$\forall u, v \in G,\ {}^tU'{}^tPAPV' =^t U'A'V'$$

On en déduit que

$$\forall U', V',\ {}^tU'({}^tPAP - A')V' = 0$$

En utilisant les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$, on obtient que ${}^tPAP - A' = 0$. De même, ${}^tPBP = B'$ et ${}^tP(A - tB)P = A' - tB'$. En passant au déterminant (morphisme multiplicatif), on obtient $\det(A - tB)\det(P^2) = \det(A' - tB')$ et de même $\det(B)\det(P)^2 = \det(B')$. Il y a simplification et

$$\frac{\det(A - tB)}{\det(B)} = \frac{\det(A' - tB')}{\det(B')}$$

ψ est donc indépendante du choix de la base.

(d) En chosissant une base orthonormée de G pour le produit scalaire de la question 8, on obtient $B = I_\ell$ et

$$\psi(t) = \det(A - tI_\ell) = (-1)^\ell \chi_A(t) = \chi_A(t)$$

où χ_A est le polynôme caractéristique de A qui est de degré ℓ.

(e) La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable et son polynôme caractéristique est scindé. Ainsi, ψ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. La multiplicité d'une racine λ est aussi égale à la dimension du sous-espace propre (car A est diagonalisable) et la question 15(d) montre que cette dimension vaut 1 ou 2.

(f) D'après (b) dans le cas $B = I_\ell$ (auquel on peut se ramener),on a H_λ qui est de la même dimension que $\ker(A - \lambda I_\ell)$. Comme A est diagonalisable, cette dimension est égale à la multiplicité de la valeur propre λ dans A et donc à la multiplicité de λ comme racine de R. Si λ est de multiplicité 2 alors il est avec 15(d) racine de Q_1 et Q_2. Sinon il est racine de Q_1 ou (exclusif) Q_2. Dans le produit Q_1Q_2, il y a donc toutes les racines de R avec une multiplicité au moins aussi grande. Mais comme Q_1Q_2 est de degré $\leq 2m - 2 = \deg(R)$, ces polynômes sont en fait égaux à une constante multiplicative non nulle près. En particulier le coefficients de X^{2m-2} dans Q_1Q_2 est non nul et il est égal au produit des $S(w_i, T^{2m-1}(w_i))$. Come R est unitaire, ona finalement

$$\psi(X) = \frac{1}{S(w_1, T^{2m-1}(w_1))S(w_2, T^{2m-1}(w_2))} Q_1(X)Q_2(X)$$

Partie III

17. On a quatre choses à vérifier.
    - $T^k(P) = P^k$. La dérivée $n+1$-ième d'un polynôme de degré $\leq n$ étant nulle, $T^{2m+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. De plus $T^{2m}(X^{2m}) = (2m)! \neq 0$ et donc $T^{2m} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
    - $M^2(P(X)) = M(P(-X)) = P(X)$ et donc $M^2 = \mathrm{Id}_E$.
    - Soient $P, Q \in E$. Le changement de variable affine $u = -t$ donne

    $$(M(P)|Q) = \int_{-1}^{1} P(-t)Q(t)\,dt = \int_{1}^{-1} P(u)Q(-u)(-du) = (P|M(Q))$$

    - Soit $P \in E$. On a

    $$T \circ M(P) = T(P(-X)) = -P'(-X) \quad \text{et} \quad M \circ T(P(X)) = M(P'(X)) = P'(-X)$$

    On a donc $T \circ M + M \circ T = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
18. F^+ est constitué des polynômes pairs de E et F^- des polynômes impairs de E :

    $$F^+ = \mathrm{Vect}(1, X^2, \dots, X^{2m}) \quad \text{et} \quad F^- = \mathrm{Vect}(X, X^3, \dots, X^{2m-1})$$

19. Soient $P, Q \in E$. En reconnaissant une dérivée de produit :

    $$S(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q'(t)\,dt + \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t)\,dt = [P(t)Q(t)]_{-1}^{1} = P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1)$$

20. Les éléments de G sont les éléments P de $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}_{2m-1}[X]$ tels que

    $$\forall Q \in E,\ P(1)Q(1) = P(-1)Q(-1)$$

    Soit $P \in G$. En choisissant $Q = X + 1$ ou $Q = X - 1$, on trouve $P(1) = P(-1) = 0$ et P est multiple de $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$. De plus P est de degré $\leq 2m - 1$ et donc $P \in (X^2 - 1)\mathbb{R}_{2m-3}[X]$.
    Réciproquement, les éléments de $(X^2 - 1)\mathbb{R}_{2m-3}[X]$ sont bien dans G et ainsi

    $$G = (X^2 - 1)\mathbb{R}_{2m-3}[X] = \mathbb{R}^0_{2m-1}[X]$$

    G est de degré $2m - 2$ et $(H5)$ est satisfaite.
21. (a) L_n est de degré n comme dérivée n-ième d'un polynôme de degré $2n$.
    Comme $R_n(-X) = R_n(X)$, on a $(-1)^n R_n^{(n)}(-X) = R_n^{(n)}(X)$ (dérivations composées) et ainsi

    $$M(L_n) = (-1)^n L_n$$

    (b) Soit $n \geq 1$. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a

    $$(L_n|P) = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} R_n^{(n)}(t)P(t)\,dt$$

    Une intégration par parties donne

    $$\int_{-1}^{1} R_n^{(n)}(t)P(t)\,dt = \left[R_n^{(n-1)}(t)P(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} R_n^{(n-1)}(t)P'(t)\,dt$$

    Comme 1 et -1 sont racines de multiplicité n de R_n, le crochet est nul et

    $$\int_{-1}^{1} R_n^{(n)}(t)P(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} R_n^{(n-1)}(t)P'(t)\,dt$$

Une récurrence donne alors

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_{-1}^{1} R_n^{(n)}(t)P(t)\, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} R_n^{(n-k)}(t)P^{(k)}(t)\, dt$$

Pour $k = n$, et comme $P^{(n)} = 0$ (car $\deg(P) \le n - 1$), on trouve alors

$$(L_n|P) = 0$$

(c) On a $2^n n! L_n^{(k)} = R_n^{(n+k)} = ((X-1)^n(X+1)^n)^{(n+k)}$. Par formule de Leibnitz,

$$2^n n! L_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n+k} \binom{n+k}{j} ((X-1)^n)^{(j)}((X+1)^n)^{(n+k-j)}$$

Quand on évalue en 1, tous les termes de la quef sont nuls sauf celui pour $j = n$ (si $j < n$, 1 est racine de $((X-1)^n)^{(j)}$ et si $j > n$ ce polynôme est nul). Ce terme pour $j = n$ vaut

$$\binom{n+k}{n} n! n(n-1)\dots(n-k+1)(X+1)^{n-k}$$

On a finalement

$$2^n n! L_n^{(k)}(1) = \binom{n+k}{n} n! n(n-1)\dots(n-k+1)2^{n-k} = \frac{(n+k)!}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}2^{n-k}$$

ou encore

$$L_n^{(k)}(1) = \frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{1}{k! 2^k}$$

(d) On a en particulier $L_n(1) = 0$. Et donc $L_n(-1) = M \circ L_n(1) = (-1)^n L_n(1) = (-1)^n$. On a aussi

$$\begin{aligned} L_n^{(2k+1)}(-1) &= M \circ T^{2k+1}(L_n)(1) \\ &= -T^{2k+1} \circ M(L_n)(1) \\ &= -(-1)^n T^{2k+1}(L_n)(1) \\ &= (-1)^{n+1} L_n^{(2k+1)}(1) \end{aligned}$$

Finalement

$$S(L_n, L_n^{(2k+1)}) = L_n(1)L_n^{(2k+1)}(1) - L_n(-1)L_n^{(2k+1)}(-1) = 2L_n^{(2k+1)}(1)$$

22. On a les points $(A), (B), (C)$ à vérifier.
    - L_{2m} est pair comme dérivée d'ordre pair d'un polynôme pair et est donc dans F^+. $T(L_{2m}) = L'_{2m}$ n'est pas nul (c'est la dérivée $2m+1$-ième d'un polynôme de degré $4m$ et $2m+1 \le 4m$). Soit $P \in G$ (polynôme de degré $\le 2m - 1$ et dont 1 et -1 sont racines). Une intégration par parties donne

    $$(T(L_{2m})|P) = \int_{-1}^{1} L'_{2m}(t)P(t)\, dt = [L_{2m}(t)P(t)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} L_{2m}(t)P'(t)\, dt$$

    Le crochet est nul car $P(1) = P(-1) = 0$. L'intégrale est nulle avec 21(b). Ainsi, $T(L_{2m}) \in G^\perp$.
    - L_{2m-1} est impair comme dérivée d'ordre impair d'un polynôme pair et est donc dans F^-. $T(L_{2m-1}) = L'_{2m-1}$ n'est pas nul (c'est la dérivée $2m$-ième d'un polynôme de degré $4m - 2$ et $2m \le 4m - 2$). On montre comme, dans le point précédent que $T(L_{2m-1}) \in G^\perp$.

- Soit $P \in \mathrm{Im}(T^2) = \mathbb{R}_{2m-2}[X]$. On a $(L_{2m}|P) = \int_{-1}^{1} L_{2m}(t)P(t)\ dt = 0$ d'après 21(b) et donc $L_{2m} \in \mathrm{Im}(T^2)^{\perp}$. On procède de même pour L_{2m-1}.

23. Le problème proposé est le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ puisque $G = \mathbb{R}^0_{2m-1}[X]$. Le polynôme K proposé est alors exactement Q_1Q_2 introduit en 15(d). Il y a donc une solution non nulle si et seulement si $K(\lambda) = 0$.

24. Une intégration par parties donne

$$(P|P) = \left[tP(t)^2\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} tP(t)P'(t)\ dt$$

Pour $P \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X]$, le crochet est nul. En majorant $|tP(t)P'(t)|$ par $|P(t)P'(t)|$ et par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors

$$(P|P) = |(P|P)| \leq 2\int_{-1}^{1} |P(t)|.|P'(t)| \leq 2\|P\|.\|P'\|$$

Si P est non nul, on peut diviser par $\|P\|$ puis élever au carré pour obtenir l'inégalité demandée.
Si $P = 0$, on a égalité.
Si $P \neq 0$ alors P et P' ne sont pas colinéaires pour des raisons de degré et il n'y a pas égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc pas dans celle demandée.

25. Soit λ une racine de K et P solution non nulle du problème (qui existe d'après 23).
D'après 15(a), $\lambda > 0$. Par ailleurs comme $P \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X]$ et est non nul, on a

$$\lambda(P'|P') = (P|P) < 4(P'|P')$$

L'inégalité stricte entraîne $(P'|P') \neq 0$ et donc $(P'|P') > 0$. On en déduit que $\lambda < 4$.

26. D'après la partie II, on a

$$\frac{\det(A)}{\det(B)} = \psi(0) = \frac{K(0)}{S(L_{2m}, L_{2m}^{2m-1})S(L_{2m-1}, L_{2m-1}^{2m-1})}$$

Avec l'expression de K et 21(c),

$$K(0) = L'_{2m-1}(1)L'_{2m}(1) = (2m+1)m^2(2m-1)$$

Avec 21(d) on a aussi

$$S(L_{2m}, L_{2m}^{(2m-1)}) = 2L_{2m}^{(2m-1)}(1) = \frac{(4m-1)!}{(2m-1)!2^{2m-2}}$$

$$S(L_{2m-1}, L_{2m-1}^{(2m-1)}) = \frac{(4m-2)!}{(2m-1)!2^{2m-2}}$$

On a donc (aux erreurs de calcul près et sans simplifier) :

$$\frac{\det(A)}{\det(B)} = \frac{(2m+1)m^2(2m-1)((2m-1)!)^2 4^{2m-2}}{(4m-2)!(4m-1)!}$$