X-ENS PSI 2018
Un corrigé

1 Existence et unicité des solutions de (1)

1. Le problème ($1bis$) est un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continus et le coefficient devant la dérivée seconde ne s'annule pas. Sur l'intervalle $[0,1]$, le théorème de Cauchy linéaire indique qu'il y a une unique solution v_λ. Comme $v_\lambda'' = cv_\lambda - f$ est continue, cette solution est de classe C^2 sur $[0,1]$.

$$\boxed{(1bis) \text{ admet une unique solution}}$$

2. Notons $\boxed{w_2 = v_0}$, c'est à dire que w_2 est l'unique fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1],\ -w_2''(x) + c(x)w_2(x) = f(x) \ \text{ et } \ w_2(0) = 0,\ w_2'(0) = 0$$

Posons $w = \lambda w_1 + w_2$. On a immédiatement $w(0) = \lambda$ et $w'(0) = \lambda$. De plus, $w \in C^2([0,1])$ et

$$\forall x \in [0,1],\ w''(x) = \lambda w_1''(x) + w_2''(x) = \lambda c(x)w_1(x) + c(x)w_2(x) - f(x) = c(x)w(x) - f(x)$$

On en déduit que $\boxed{v_\lambda = \lambda w_1 + w_2}$.

3. Posons $h = w_1^2$. On a $h' = 2w_1w_1'$ et $h'' = 2(w_1')^2 + 2w_1w_1'' = 2(w_1')^2 + 2cw_1^2 \geq 0$. h' est donc croissante. Comme elle est nulle en 0, elle est positive. h est donc croissante. Si, par l'absurde, h était nulle en 1, on aurait h nulle sur $[0,1]$. w_1 serait aussi nulle sur $[0,1]$ et ceci contredit $w_1'(0) = 1$. Ainsi,

$$\boxed{w_1(1) \neq 0}$$

4. On peut alors poser $\lambda = -\frac{w_2(1)}{w_1(1)}$ et on a $v_\lambda(1) = 0$ par choix de λ. v_λ est ainsi solution de (1). Soit u une solution de (1). u est l'unique solution du problème de Cauchy ($1bis$) avec $\lambda = u'(0)$. On a donc $u = v_{u'(0)} = u'(0)w_1 + w_2$. Ainsi, $0 = u(1) = u'(0)w_1(1) + w_2(1)$ et $u'(0) = -\frac{w_2(1)}{w_1(1)}$. u est donc égale à la solution v_λ exhibée.

$$\boxed{(1) \text{ possède une unique solution}}$$

5. Supposons, par l'absurde, que u prenne des valeurs < 0. u étant continue sur le segment $[0,1]$ admet un minimum m. Avec notre hypothèse, $m < 0$. L'ensemble $\{t \in [0,1]/\ u(t) = m\}$ admet une borne inférieure que l'on note α. Par continuité de u, on a $u(\alpha) = m$ et $\alpha \in]0,1[$ (puisque $u(0) = u(1) = 0$). Ainsi, $u'(\alpha) = 0$ (minimum atteint sur l'ouvert $]0,1[$).
Sur un voisinage $]\alpha - r, \alpha + r[$ de α, la fonction u est négative (par continuité) et donc $u'' = cu - f$ est aussi négative sur ce voisinage. En particulier, u' est décroissante sur ce voisinage. Comme $u'(\alpha) = 0$, u' est positive sur $]\alpha - r, \alpha]$ et u est croissante sur cet intervalle. Comme u est minimale en α, u est en fait constante sur $]\alpha - r, \alpha]$. Ceci contredit la définition de α.

$$\boxed{\text{Si } f \geq 0, \text{ l'unique solution de (1) est positive}}$$

2 Une matrice de discrétisation

6. A_n étant symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral (et admet même une base orthonormée de vecteurs propres). En particulier

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A_n \text{ sont réelles}}$$

En utilisant les notations de l'énoncé, on a (avec la convention $v_0 = v_{n+1} = 0$)

$$AV = W \text{ avec } w_i = -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}$$

Si $AV = \lambda V$, on a ainsi

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\},\ v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0}$$

7. Soit λ une valeur propre de A_n et V un vecteur propre associé. Notons v_i une coordonnée maximale en module. On a alors $\forall k \in \{1, \dots, n\},\ |v_k| \le |v_i|$ et ceci est encore vrai pour $k = 0$ ou $k = n+1$ avec la convention choisie. Avec la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$|2-\lambda|.|v_i| \le |v_{i+1}| + |v_{i-1}| \le 2|v_i|$$

Comme $|v_i| > 0$ (puisque V n'est pas le vecteur nul), on en déduit que $|2-\lambda| \le 2$ et donc $\lambda \in [0, 4]$.
Si $|2-\lambda| = 2$ alors, l'inégalité précédente est une égalité et $|v_{i-1}| = |v_i| = |v_{i+1}|$. Une récurrence simple montre alors que $|v_i| = |v_{i-1}| = \cdots = |v_1| = |v_0| = 0$. V est alors le vecteur nul (puisque $|v_i|$ qui est maximale est nulle) ce qui est faux (puisque c'est un vecteur propre). Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A_n) \subset]0, 4[}$$

8. (a) Le discriminant de P vaut $\lambda(\lambda - 4) < 0$. P (qui est un polynôme réel) admet donc deux racines complexes (non réelles) conjuguées.

$$\boxed{r_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ et } r_2 = \overline{r_1}}$$

(b) On considère toujours un vecteur propre V associé à λ. Notons (u_i) l'unique suite réelle telle que

$$u_0 = v_0 = 0,\ u_1 = v_1 \text{ et } \forall i \ge 1,\ u_{i+1} = (2-\lambda)u_i - u_{i-1}$$

La suite (u_i) est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique $P(r) = 0$. Le cours nous apprend que

$$\exists a, b \in \mathbb{R} /\ \forall k,\ u_k = \rho^k(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta))$$

Comme $u_0 = 0$, on a $a = 0$. Par ailleurs, une récurrence immédiate donne

$$\forall k \in \{0, \dots, n+1\},\ v_k = u_k$$

La condition $v_{n+1} = 0$ indique alors que $b\sin((n+1)\theta) = 0$. Comme V n'est pas le vecteur nul, u n'est pas la suite nulle et donc $b \ne 0$. Ainsi, $\sin((n+1)\theta) = 0$.
Enfin, le produit des racines de P vaut 1 (relations coefficients-racines) et on a donc $\rho = 1$.

$$\boxed{\sin((n+1)\theta) = 0 \text{ et } \rho = 1}$$

9. Posons $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ pour $k = 1, \dots, n$ et P_k le polynôme dont les racines sont $e^{i\theta_k}$ et $e^{-i\theta_k}$. On a donc

$$P_k(r) = r^2 - 2\cos(\theta_k)r + 1$$

On se retrouve dans la situation de la question précédente avec $\lambda_k = 2(1 - \cos(\theta_k))$. La suite de terme général $u_p = \sin(p\theta_k)$ vérifie la relation de récurrence linéaire et on a $u_{n+1} = 0$. Le calcul qui précède montre ainsi que

$$V_k = {}^t(\sin(\theta_k), \sin(2\theta_k), \dots, \sin(n\theta_k))$$

est propre pour A_n associé à la valeur propre λ_k.
Comme cos est injective sur $[0, \pi]$, on a trouvé n valeurs propres distinctes. Comme A_n est de taille n et comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a toutes les valeurs propres et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A_n) = \{2(1-\cos(\theta_k))/\ k \in \{1,\dots,n\}\}}$$

$$\boxed{\text{Les vecteurs } V_k = {}^t(\sin(\theta_k), \sin(2\theta_k), \dots, \sin(n\theta_k)) \text{ forment une base de vecteurs propres}}$$

10. (a) Soit X un élément du noyau de B. Supposons, par l'absurde, que X est non nul. Il existe alors une coordonnée x_i maximale en module. En exprimant la nullité de la i-ème coordonnée de BX, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j = 0$$

On en déduit (par inégalité triangulaire et en tenant compte du signe des coefficients de B) que

$$b_{i,i}|x_i| \le \sum_{j\neq i} (-b_{i,j})|x_j| \le \sum_{j\neq i} (-b_{i,j})|x_i|$$

Comme $|x_i| > 0$, ceci contredit la troisième propriété des M-matrices.

$$\boxed{\text{Toute } M\text{-matrice est inversible}}$$

(b) Supposons F à coordonnées positives et posons $Y = B^{-1}F$. On a alors $BY = F$. Notons y_i la coordonnée minimale de Y. En exploitant la i-ème coordonnée de BY, et compte-tenu du signe des $b_{i,j}$ ($y_j \ge y_i$ et en multipliant par $b_{i,j} \le 0$ pour $j \neq 0$, $b_{i,j}y_j \le b_{i,j}y_i$) on obtient

$$0 \le f_i = \sum_{j\neq i} b_{i,j} y_j + b_{i,i} y_i \le \sum_{j \neq i} b_{i,j} y_i + b_{i,i} y_i = y_i \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$$

La somme du membre de droite étant > 0, on en déduit que $y_i \ge 0$.

$$\boxed{\text{Si } F \text{ est à coordonnées positives, } B^{-1}F \text{ aussi}}$$

(c) Les colonnes de B^{-1} sont les images par B^{-1} des vecteurs de la base canonique. Comme ces derniers sont à coefficients positifs, on en déduit avec la question précédente que

$$\boxed{\text{Toute } M\text{-matrice à une inverse à coefficients positifs}}$$

11. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $A_n + \varepsilon I_n$ est une M-matrice (vérification simple, en particulier la somme par ligne vaut $1+\varepsilon$ ou ε et est > 0). $(A_n + \varepsilon I_n)^{-1}$ est ainsi à coefficients positifs.
On rappelle que

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}),\ M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\mathrm{Com}(M)$$

On en déduit (le passage au déterminant étant continu, ce qui implique aussi que le passage à la comatrice l'est) que A_n^{-1} est limite quand $\varepsilon \to 0$ de $(A_n + \varepsilon I_n)^{-1}$. Une limite de termes positifs étant positive,

$$\boxed{A_n^{-1} \text{ est à coefficients positifs}}$$

3 Une suite d'approximations de la solution de (1)

12. Par égalité de Taylor avec reste intégrale,

$$v(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{h^k}{k!} v^{(k)}(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-t)^3}{6} v^{(4)}(t)\ dt$$

$$v(x_{i-1}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-h)^k}{k!} v^{(k)}(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i-1}} \frac{(x_{i-1}-t)^3}{6} v^{(4)}(t)\ dt$$

On fait la différence de ces égalités. Les termes pour $k=1$ et $k=3$ s'éliminent et il reste

$$v(x_{i+1})+v(x_{i-1})=2v(x_i)+h^2v''(x_i)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x_{i+1}-t)^3}{6}v^{(4)}(t)\,dt+\int_{x_i}^{x_{i-1}}\frac{(x_{i-1}-t)^3}{6}v^{(4)}(t)\,dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|v(x_{i+1})+v(x_{i-1})-2v(x_i)-h^2v''(x_i)| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x_{i+1}-t)^3}{6}|v^{(4)}(t)|\,dt+\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{(t-x_{i-1})^3}{6}|v^{(4)}(t)|\,dt\\ &\leq \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{6}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-t)^3\,dt+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(t-x_{i-1})^3\,dt\right)\\ &\leq \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{6}(h^4+h^4)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall i\in\{1,\dots,n\},\ |v''(x_i)-\tfrac{1}{h^2}(v(x_{i+1})+v(x_{i-1})-2v(x_i))|\leq Ch^2 \text{ avec } C=\tfrac{\|v^{(4)}\|_\infty}{3}}$$

Bien sûr, $\|v^{(4)}\|_\infty$ existe car on a supposé que $v\in\mathcal{C}^4([0,1])$.

13. Les relations (2) équivalent à l'équation matricielle

$$\left(\frac{1}{h^2}A_n+\mathrm{diag}(c(x_1),\dots,c(x_n))\right)U=F \quad\text{avec}\quad U=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}f(x_1)\\ \vdots\\ f(x_n)\end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de montrer que $B_n(h)=\frac{1}{h^2}A_n+\mathrm{diag}(c(x_1),\dots,c(x_n))$ est inversible.
Reprenons le calcul de la question 7 et considérons λ une valeur propre de h^2B_n et V un vecteur propre associé. Notons v_i une coordonnée maximale en module (et posons $v_0=v_{n+1}=0$). On a alors

$$|2+h^2c_i(x)-\lambda|.|v_i|\leq|v_{i+1}|+|v_{i-1}|\leq 2|v_i|$$

On en déduit que $\lambda\geq h^2c_i(x)$.
Si $c_i(x)>0$ alors $\lambda>0$ et h^2B_n est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre.
Sinon, supposons par l'absurde que $\lambda=0$. On a alors $\lambda=h^2c_i(x)=0$ (puisque $c_i(x)\geq 0$). Le même raisonnement qu'en 7 montre que $V=0$ et donne une contradiction.
La matrice $B_n(h)$ est ainsi inversible (comme $h^2B_n(h)$) et

$$\boxed{\text{(2) admet une unique solution}}$$

14. L'équation (1) s'écrit $u''=-1$ et il existe donc des constantes c,d telles que $\forall x,\ u(x)=-\frac{x^2}{2}+cx+d$. Les conditions $u(0)=u(1)=0$ donnent $d=0$ et $c=1/2$. Ainsi,

$$\forall x\in[0,1],\ u(x)=\frac{1}{2}x(1-x)$$

On vérifie que, pour $1\leq i\leq n$,

$$\begin{aligned}u(x_{i+1})+u(x_{i-1})-2u(x_i) &= \frac{1}{2}x_{i+1}(1-x_{i+1})+\frac{1}{2}x_{i-1}(1-x_{i-1})-x_i(1-x_i)\\ &= h\left(\frac{i+1}{2}(1-(i+1)h)+\frac{i-1}{2}(1-(i-1)h)-i(1-ih)\right)\\ &= -h^2\end{aligned}$$

Ainsi, $U={}^t(u(x_1),\dots,u(x_n))$ vérifie $A_nU=h^2F$ où F a toutes ses coordonnées égales à $1=f(x_i)$. U vérifie donc (2) en ajoutant les termes d'indices 0 et $n+1$.

$$\boxed{\forall i \in \{0,\dots,n+1\},\ u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1-x_i)}$$

15. Avec les notations de la question 13, $B_n(h) + \varepsilon I_n$ est, pour $\varepsilon > 0$, une M matrice et son inverse est donc à coefficients positifs. En procédant comme en question 11, $B_n(h)^{-1}$ est à coefficients positifs. Si F est à coefficients positifs, ce qui est le cas si f est positive, $U = B_n(h)^{-1}F$ est à coefficients positifs. Comme on a aussi $u_0, u_{n+1} \geq 0$,

$$\boxed{\text{si } f \text{ est positive, alors } \forall i \in\ \{0,\dots,n+1\},\ u_i \geq 0}$$

4 Un premier résultat de convergence

16. On a plusieurs propriétés à prouver. Ci-dessous, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices unicolonnes de taille n.
    - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $X \mapsto AX$ est continue (linéaire en dimension finie). De plus $\{x/\ \|x\|_\infty \leq 1\}$ est un compact (fermé borné en dimension finie). $N(A)$ est ainsi bien définie (et c'est même un maximum).
    - $\forall A,\ N(A) \geq 0$ (borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}^+$).
    - Si $N(A) = 0$ alors $\forall x,\ Ax = 0$ et A est donc nulle (l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A l'est).
    - $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$, $\|(A+B)x\|_\infty \leq \|Ax\|_\infty + \|Bx\|_\infty \leq N(A) + N(B)$ Par passage à la borne supérieure, $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.
    - $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$,

    $$\|(\lambda A)x\|_\infty = |\lambda|\|Ax\|_\infty \leq |\lambda| N(A)$$

    Par passage au sup, $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$.
    Si $\lambda = 0$, l'inégalité est une égalité.
    Sinon, on utilise notre calcul pour obtenir $N(A) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$ et récupérer encore l'égalité.

    On a donc montré que

    $$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

    On fixe une matrice A. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ de norme ≤ 1, on a

    $$\forall i,\ |(Ax)_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.|x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

    En passant au maximum sur tous les i, on obtient

    $$\|Ax\|_\infty \leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

    et en passant à la borne supérieure sur tous les x,

    $$N(A) \leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

    Ce maximum est atteint pour une certaine valeur i_0 de i. Si on pose $x_k = 1$ quand $a_{i_0,k} \geq 0$ et $x_k = -1$ sinon, on obtient un vecteur x de norme infinie ≤ 1 et pour lequel $|(Ax)_{i_0}|$ est égal au maximum. Le majorant trouvé pour les $\|Ax\|_\infty$ est donc atteint et notre dernière inégalité est une égalité.

$$\boxed{N(A) = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|}$$

17. On continue à identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices unicolonnes de taille n.
    (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$. Notons $\mathbf{1}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées vaalent 1. $\mathbf{1} - x$ et $\mathbf{1} + x$ ont des coordonnées toutes positives. La question 15 (utilisée dans le cas $c = 0$) indique alors que

    $$U' = ((n+1)^2 A_n)^{-1}(\mathbf{1} - x) \quad \text{et} \quad U'' = ((n+1)^2 A_n)^{-1}(\mathbf{1} - x)$$

    sont à coordonnées positives. En notant $y = ((n+1)^2 A_n)^{-1}x$ et $z = ((n+1)^2 A_n)^{-1}\mathbf{1}$, on a ainsi $-z_i \leq y_i \leq z_i$ et donc $\forall i,\ |y_i| \leq z_i$ ce qui entraîne

    $$\|((n+1)^2 A_n)^{-1}x\|_\infty \leq \|((n+1)^2 A_n)^{-1}\mathbf{1}\|_\infty$$

    Comme ceci est vrai pour tous les x de norme ≤ 1, on en conclut que

    $$N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \|((n+1)^2 A_n)^{-1}\mathbf{1}\|_\infty$$

    La question 14 permet d'évaluer le membre de droite. Plus précisement, $z_i = \frac{1}{2}ih(1 - ih)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{2}t(1-t)$ est plus petite que $1/8$ sur $[0, 1]$ (simple étude de fonction), $\|z\|_\infty \leq \frac{1}{8}$. On a donc montré que

    $$\boxed{N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \frac{1}{8}}$$

    (b) On suppose que D_n est diagonale à coefficients positifs. On sait que $B_n = (n+1)^2 A_n + D_n$ est une M-matrice et donc inversible d'inverse à coefficients postifs (avec la question 10). Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$. Notons $|x| \in \mathbb{R}^n$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont les $|x_i|$ et posons $z = B_n^{-1}|x|$. C'est un vecteur à coordonnées positives (comme B_n^{-1} et $|x|$). On a $|x| = B_n z = (n+1)^2 A_n z + D_n z$. Comme $D_n z$ est à coefficients positifs, $\forall i,\ |x|_i \geq y_i$ où $y = (n+1)^2 A_n z$. $|x| - y$ est à coefficients positifs et $((n+1)^2 A_n)^{-1}$ aussi. On en déduit que $((n+1)^2 A_n)^{-1}|x| - z$ est à coefficients positifs. Ainsi (comme z est aussi à coefficients positifs)

    $$\|z\|_\infty \leq \|((n+1)^2 A_n)^{-1}|x|$$

    Comme $|x|$ est de norme ≤ 1 on en déduit que

    $$\|z\|_\infty \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1})$$

    Par inégalité triangulaire, et comme B_n^{-1} est à coefficients positifs, $|(B_n^{-1}x)|_i \leq B_n^{-1}|x|_i = z_i$. Finalement

    $$\|B_n^{-1}x\|_\infty \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1})$$

    Ceci étant vrai pour tous les x de norme plus petite que 1,

    $$\boxed{N(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}) \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \frac{1}{8}}$$

18. On utilise les notations sugérées par l'énoncé. On a alors

    $$A_n X = A_n \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix} - A_n \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = V \ \text{ avec } \ v_i = -(u(x_{i-1}) - u_{i-1}) + 2(u(x_i) - u_i) - (u(x_{i+1}) - u_{i+1})$$

    En utilisant la relation vérifiée par (u_i), on a

    $$v_i = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - h^2(f(x_i) - c(x_i)u_i)$$

Comme $f(x_i) - c(x_i)u(x_i) = -u''(x_i)$ on trouve alors

$$v_i = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) + h^2u''(x_i) - h^2c(x_i)(u(x_i) - u_i)$$

ce que l'on peut écrire

$$v_i + h^2c(x_i)(u(x_i) - u_i) = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) + h^2u''(x_i)$$

Si on divise par h^2, la question 12 (utilisable avec u car $u'' = cu - f \in \mathcal{C}^2$ et donc $u \in \mathcal{C}^4$), on a alors

$$\frac{1}{h^2}v_i + c(x_i)(u(x_i) - u_i) = w_i \quad \text{avec} \quad |w_i| \leq Ch^2$$

Avec la définition de V et en notant $D_n = \text{diag}(c(x_1), \dots, c(x_n))$,

$$((n+1)^2A_n + D_n)X = W$$

ou encore (si $W \neq 0$)

$$X = \|W\|_\infty((n+1)^2A_n + D_n)^{-1}\frac{W}{\|W\|_\infty}$$

Par définition de N,

$$\|X\|_\infty \leq \|W\|_\infty N(((n+1)^2A_n + D_n)^{-1}) \leq \frac{C}{8(n+1)^2}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\exists \tilde{C} /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \max_{0\leq i\leq n+1}|u(x_i) - u_i| \leq \tfrac{\tilde{C}}{n^2}}$$

5 Un second résultat de convergence

19. (a) Une variable de Bernoulli de paramètre x à une espérance égale à x et une variance égale à $x(1-x)$. Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = x}$$

Les X_i étant indépendantes, la variance de la somme est égale à la somme des variances et

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \tfrac{x(1-x)}{n}}$$

Par formule de transfert (et comme les valeurs prises par les S_n sont les k/n avec $k = 0, \dots, n$)

$$\mathbb{E}(f(S_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(nS_n = k)$$

Or, nS_n sui une loi binomiale de paramètres n et x. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(f(S_n)) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_nf(x)}$$

(b) Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors on peut définir la variance et on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

La variance étant positive, $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$. On utilise ceci avec $X = |S_n - x|$:

$$\mathbb{E}(|S_n - x|^2) \leq \mathbb{E}((S_n - x)^2)$$

Comme $x = \mathbb{E}(S_n)$, le membre de droite vaut $\mathbb{V}(S_n)$. On utilise la question précédente pour obtenir le membre de gauche :

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)^2 \leq \mathbb{V}(S_n)$$

Comme la parenthèse est positive, le passage à la racine carrée (opération croissante) donne la première inégalité. Pour la seconde, on utilise $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (étude de fonction déjà évoquée en question 17(a)) ce qui donne $\mathbb{V}(S_n) \leq \frac{1}{4n}$ et on passe encore à la racine carrée.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\tbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

20. Distinguons deux cas.
   - Si $\lambda \in]0,1]$ alors (comme $\alpha > 0$), $\lambda^\alpha \leq 1 \leq 1+\lambda$.
   - Sinon $\lambda > 1$ et donc $\lambda^\alpha \leq \lambda$ (car $\alpha \leq 1$) et $\lambda^\alpha \leq 1+\lambda$.

   On a ainsi

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \lambda^\alpha \leq 1+\lambda}$$

   On veut utiliser ceci avec $\lambda = \sqrt{n}|x-k/n|$. Ceci est possible si $x \neq k/n$ et donne alors

$$\left(\sqrt{n}|x-k/n|\right)^\alpha \leq 1+\sqrt{n}|x-k/n|$$

   En divisant par $n^{\alpha/2}$ (qui est > 0), on obtient l'inégalité demandé. Cette inégalité reste trivialement vraie quand $x = k/n$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0,\dots,n\},\ \left|x-\tfrac{k}{n}\right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\tfrac{k}{n}\right|\right)}$$

21. En utilisant la formule du binôme avec $(x+(1-x))^n$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}$$

   On en déduit que

$$f(x) - B_nf(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f(\frac{k}{n})\right)\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}$$

   Par inégalité triangulaire puis avec l'hypothèse faite sur f, puis avec la question précédente

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_nf(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}\\
&\leq K\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|^\alpha\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{K}{n^{\alpha/2}}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{K}{n^{\alpha/2}}\left(1+\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}\right)
\end{aligned}$$

La question 19(b) permet de majorer la somme et d'obtenir

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Il reste à passer à la borne supérieure sur $x \in]0,1[$ (qui est la même que celle sur $[0,1]$ par continuité des fonctions) pour conclure que

$$\boxed{\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}}$$

22. On va utiliser ici la formule $k\binom{p+1}{k} = (p+1)\binom{p}{k-1}$ (qui se prouve facilement avec les expressions avec des factorielles) et aussi $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1-k}$. On a

$$\begin{aligned}
(\hat{B}_{n+1}u)'(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k k \binom{n+1}{k} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} u_k (n+1-k) \binom{n+1}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= (n+1)\left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k \binom{n}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=1}^{n+1} u_k \binom{n}{n-k} x^k (1-x)^{n-k}\right) \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

On se trouve dans la même situation pour redériver. En posant $v_k = u_{k+1} - u_k$, on a $v_{k+1} - v_k = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k$ et

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = n(n+1)\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k)\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

On utilise alors $u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = -h^2 f(x_{k+1}) = -\frac{1}{(n+1)^2} f(x_{k+1})$ pour obtenir

$$\boxed{(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = -\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}}$$

23. (a) Avec la question précédente, on a d'abord

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = -\frac{n}{n+1}\left(B_{n-1}f(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}\right)$$

On ajoute $-u''(x) = f(x)$ pour en déduire

$$\begin{aligned}
\chi''_{n+1}(x) &= (f(x) - B_{n-1}f(x)) + \frac{1}{n+1} B_{n-1}f(x) \\
&\quad - \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$|B_{n-1}f(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \leq \|f\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)-f\left(\frac{k}{n-1}\right)\right| & | \leq K\left|\frac{k+1}{n+1}-\frac{k}{n-1}\right|^{\alpha} \\
& \leq K\left|\frac{n-2k+1}{(n-1)(n+1)}\right|^{\alpha} \\
& \leq \frac{K}{(n+1)^{\alpha}}
\end{aligned}$$

car $-(n-1) \leq n-2k-1 \leq n-1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|\chi''_{n+1}(x)| \leq \|f-B_{n-1}f\|_{\infty} + \frac{1}{n+1}\|f\|_{\infty} + \frac{K}{(n+1)^{\alpha}}$$

En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\boxed{\|\chi''_{n+1}\|_{\infty} \leq \|f-B_{n-1}f\|_{\infty} + \frac{1}{n+1}\|f\|_{\infty} + K\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}$$

(b) On fixe $x \in]0,1[$ et on considère la fonction h de l'énoncé. h est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et

$$h'(t) = \chi'_{n+1}(t) - \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}(1-2t)$$

$$h''(t) = \chi''_{n+1}(t) + 2\frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}$$

Remarquons que comme $\chi_{n+1}(0) = \hat{B}_{n+1}u(0) = u_0 = 0$ et de même $\chi_{n+1}(1) = u_{n+1} = 0$ et que de plus $h(x) = 0$, par théorème de Rolle h' s'annule sur $]0,x[$ et sur $]x,1[$. A nouveau par théorème de Rolle, h'' s'annule au moins une fois en un point ξ. ceci donne

$$\boxed{\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}x(1-x)\chi''_{n+1}(\xi)}$$

Pour $x \in \{0,1\}$, toute valeur de ξ convient car $\chi_{n+1}(0) = \chi_{n+1}(1) = 0$.

24. On en déduit en combinant les deux questions de 23 que pour tout $x \in [0,1]$

$$|\chi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{8}\|\chi''_{n+1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}\left(\|f-B_{n-1}f\|_{\infty} + \frac{1}{n+1}\|f\|_{\infty} + K\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)$$

En passant à la norme infinie et vec la question 21 on a donc

$$\|\chi_{n+1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{3K}{2(n-1)^{\alpha/2}} + \frac{1}{n+1}\|f\|_{\infty} + K\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)$$

$n^{\alpha/2}\|\chi_{n+1}\|_{\infty}$ est alors majoré par une suite convergente et est une suite bornée. Ainsi

$$\boxed{\exists M > 0/\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u-\hat{B}_{n+1}u\|_{\infty} \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}}$$