Maths - X-ENS PSI 2019

Stéphane Dumas et Jean Nougayrède

Problème

Avertissement : ce problème est très mal construit, pas toujours dans l'esprit du programme de spé mais pourrait faire un sujet intéressant avec un peu de travail pour reprendre l'énoncé.

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

   Si $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$. Ainsi, $\langle Ax, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ donc $\lambda = \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} > 0$ par définition de $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$

   Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, choisissons une base $(e_1, \dots, e_N)$ orthonormée de vecteurs propres de A et $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ les valeurs propres correspondantes. Alors pour tout vecteur x non nul, il existe des scalaires $(x_1, \dots, x_N)$ non tous nuls tels que $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$ et donc $Ax = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i e_i$. Ainsi

   $$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i^2 > 0$$

   car la base est orthonormée, les valeurs propres sont strictement positives et au moins un des scalaires x_i est non nul. Par conséquent $\boxed{A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})}$

2. La sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = 1\}$ de centre 0 et de rayon 1 est un fermé borné de $\mathbb{R}^N$ qui est un espace vectoriel normé de dimension finie. Par conséquent, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. l'application linéaire $x \mapsto Bx$ est continue sur S donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, $\boxed{|||B||| \text{ existe}}$ et est atteinte en un certain point de la sphère S et $\boxed{|||B||| \geq 0}$

   Pour toutes matrices $(B, C) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$, si $x \in S$ alors par inégalité triangulaire,

   $$\|(B + C)x\| \leq \|Bx\| + \|Cx\| \leq |||B||| + |||C|||$$

   donc par définition de la borne inférieure $\boxed{|||B + C||| \leq |||B||| + |||C|||}$

   Ensuite, si $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors il existe $x_0 \in S$ tel que $|||B||| = \|Bx_0\|$ donc $|||\lambda B||| \geq \|(\lambda B)x_0\| = |\lambda| \|Bx_0\| = |\lambda||||B|||$ et de même il existe $x_1 \in S$ tel que $|||\lambda B||| = \|(\lambda B)x_1\|$ donc $|||\lambda B||| = |\lambda| \|Bx_1\| \leq |\lambda||||B|||$. Ainsi $\boxed{|||\lambda B||| = |\lambda||||B|||}$

   Par ailleurs, si $x \in \mathbb{R}^N$, soit $x = 0$ et donc $\|Bx\| = 0 = |||B||| \|x\|$, soit $x \neq 0$ et donc $y = \dfrac{x}{\|x\|} \in S$ d'où $\|Bx\| = \|\|x\| By\| = \|x\| \|By\| \leq |||B||| \|x\|$. On a donc montré que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^N, \|Bx\| \leq |||B||| \|x\|}$

   Enfin, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, si $|||B||| = 0$ alors d'après ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}^N, \|Bx\| \leq 0$ donc $Bx = 0$. Ainsi, l'application linéaire $x \mapsto Bx$ est nulle sur $\mathbb{R}^N$ et sa matrice dans la base canonique, à savoir B, est donc nulle.

   On a donc montré que $\boxed{B \mapsto |||B||| \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_N(\mathbb{R})}$

3. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$. Choisissons à nouveau une base $(e_1, \dots, e_N)$ orthonormée de vecteurs propres de A et $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ les valeurs propres correspondantes. Posons $M = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_N|\}$.

   Alors pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $e_i \in S$ et donc $|||A||| \geq \|Ae_i\| = \|\lambda_i e_i\| = |\lambda_i|$. Ainsi $\boxed{|||A||| \geq M}$

Ensuite, si on prend un vecteur x quelconque dans S alors il existe des scalaires $(x_1, \dots, x_N)$ tels que $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$ et donc

$$\|Ax\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i x_i)^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = M^2$$

car la base $(e_1, \dots, e_N)$ est orthonormée et x est normé. Ainsi $\boxed{|||A||| \leq M}$

On conclut donc que $\boxed{|||A||| = M = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_N|\}}$

4. Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on note $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, Ax\rangle}$.

   a) Posons pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2$, $\phi_A(x, y) = \langle x, Ay\rangle$ et montrons que $(x, y) \mapsto \phi_A(x, y)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$.

      - L'application ϕ_A est bilinéaire car le produit scalaire canonique l'est et $y \mapsto Ay$ est linéaire.
      - Elle est symétrique car la matrice A est symétrique.
      - Elle est définie positive car la matrice A l'est.

      Ainsi $\boxed{\phi_A \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_N(\mathbb{R})}$ et $x \mapsto \|x\|_A = \sqrt{\phi_A(x, x)}$ est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire et en particulier $\boxed{\text{c'est une norme sur } \mathbb{R}^N}$

   b) Prenons encore une fois une base orthonormée $(e_1, \dots, e_N)$ de vecteurs propres de A et $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ les valeurs propres correspondantes et notons $M = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ (comme précédemment puisque les valeurs propres sont ici strictement positives) et $m = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. Alors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$, on a $\|x\|_A^2 = \langle x, Ax\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i^2$ donc puisque $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $m\|x\|^2 \leq \|x\|_A^2 \leq M\|x\|^2$.

      Ainsi, les constantes $\boxed{C_1 = \sqrt{m} > 0 \text{ et } C_2 = \sqrt{M} > 0}$ vérifient $\forall x \in \mathbb{R}^N, C_1\|x\| \leq \|x\|_A \leq C_2\|x\|$.

5. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)^T = (A^T)^k$ et comme $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on en déduit que $P(A) \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

   Ensuite, puisque elle est symétrique réelle, A est semblable à une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ donc $P(A)$ est semblable à $P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_N))$. Ainsi le spectre de $P(A)$ est celui de $P(D)$, c'est-à-dire l'ensemble $\boxed{\operatorname{Sp}(P(A)) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_N)\} = \{P(\lambda), \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\}}$

   Enfin, si x est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors $Ax = \lambda x$ et ainsi, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k x = \lambda^k x$ puis, par linéarité, $P(A)x = P(\lambda)x$ donc x est aussi un vecteur propre de $P(A)$.

   Remarque : La réciproque de ce dernier point est fausse comme on peut le voir en prenant P constant auquel cas tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^N$ est vecteur propre de $P(A)$ mais n'est pas forcément vecteur propre de A. La question est pour le moins maladroite.

6. Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. On note $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_d$ les valeurs propres de A triées dans l'ordre croissant et pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ on note $F_i = \ker(A - \lambda_i I_N)$ l'espace propre associé à la valeur propre λ_i.

   On note également p_{F_i} le projecteur orthogonal sur ce sous-espace propre, qui est aussi le projecteur sur F_i parallèlement à la somme des autres puisque A est symétrique donc ses sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale.

   Enfin, on note $b = (b_1, \dots, b_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, a l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^N$ dont la matrice dans la base canonique b est A, r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^N$ défini par $r : x \mapsto \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} p_{F_i}(x)$ et $A^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Mat}(r, b)$.

   a) Supposons qu'il existe une matrice U orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = UDU^T$ et les coefficients sur la diagonale de D sont les valeurs propres de A dans l'ordre croissant, avec leurs ordres de multiplicité.

      Soit $e = (e_1, \dots, e_N)$ l'unique famille de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ telle que $U = \operatorname{Mat}(e, b) = P_b^e$. Puisque la matrice U est orthogonale et la base b orthonormée, la famille e est une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ et $U^T = U^{-1} = \operatorname{Mat}(b, e) = P_e^b$. Par formule de changement de base,

$$\operatorname{Mat}(a, e) = P_e^b \times \operatorname{Mat}(a, b) \times P_b^e = U^{-1}AU = D$$

donc D est la matrice de l'endomorphisme a dans la base e.
En particulier, on en déduit que si l'on note $n_i = \dim(F_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ alors

- les vecteurs $(e_1, \ldots, e_{n_1})$ forment une base orthonormée de F_1,
- les vecteurs $(e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2})$ forment une base orthonormée de F_2,
- $\ldots$,
- et $(e_{N-n_d+1}, \ldots, e_N)$ forment une base orthonormée de F_d.

Donc, dans cette même base, le projecteur p_{F_i} a pour matrice une matrice diagonale ayant des 0 et un bloc de n_i valeurs 1 sur la diagonale.
Par combinaison linéaire, on en déduit que la matrice de l'endomorphisme r dans la base e est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D, c'est-à-dire $\mathrm{Mat}(r, e) = D^{\frac{1}{2}}$.

Par changement de base, on en déduit enfin $\boxed{A^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Mat}(r, b) = P_b^e \times \mathrm{Mat}(r, e) \times P_e^b = UD^{\frac{1}{2}}U^T}$

b) Un tel couple (U, D) existe d'après le théorème spectral.
Puisque la matrice $D^{\frac{1}{2}}$ est diagonale, elle est symétrique et donc

$$(A^{\frac{1}{2}})^T = (UD^{\frac{1}{2}}U^T)^T = U(D^{\frac{1}{2}})^T U^T = UD^{\frac{1}{2}}U^T = A^{\frac{1}{2}}$$

donc $\boxed{A^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})}$

Par ailleurs, puisque $A^{\frac{1}{2}}$ est semblable à la matrice diagonale $D^{\frac{1}{2}}$, ses valeurs propres sont les éléments diagonaux de celle-ci, donc les racines carrées de celles de A et donc elles sont strictement positives.
On en déduit avec la question 1 que $\boxed{A^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}_N^{+}(\mathbb{R})}$

On voit immédiatement que $D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} = D$ et on sait que $U^T U = I_N$ donc

$$A^{\frac{1}{2}} \times A^{\frac{1}{2}} = UD^{\frac{1}{2}}U^T \times UD^{\frac{1}{2}}U^T = UD^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}}U^T = UDU^T = A$$

Enfin, puisque D et $D^{\frac{1}{2}}$ sont diagonales, elles commutent. Donc

$$A^{\frac{1}{2}} \times A = UD^{\frac{1}{2}}U^T \times UDU^T = UD^{\frac{1}{2}}DU^T = UDU^T \times UD^{\frac{1}{2}}U^T = A \times A^{\frac{1}{2}}$$

autrement dit $\boxed{A \text{ et } A^{\frac{1}{2}} \text{ commutent}}$

c) En utilisant les résultats de la question précédente, et en particulier le fait que $A^{\frac{1}{2}}$ est symétrique, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_A^2 = \langle x, Ax \rangle = \left\langle x, A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}x) \right\rangle = \left\langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x \right\rangle = \left\| A^{\frac{1}{2}}x \right\|^2$$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^N, \|x\|_A = \left\| A^{\frac{1}{2}}x \right\|}$.

Partie II

Avertissement pour les collègues intéressés par ce sujet : cette partie est très mal construite, les questions s'enchaînent mal, des résultats importants devraient faire l'objet de questions, le point de vue affine pourrait être introduit seulement à la toute fin de cette partie, etc.

7. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On conviendra que $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$.
$\varphi : P \mapsto P(A)r_0$ définit une application linéaire (par linéarité de l'évaluation et bilinéarité du produit matriciel) de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée donc $\boxed{H_k = \varphi(\mathbb{R}_{k-1}[X]) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^N}$
De plus, $\mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_{k+1}[X]$ donc par croissance de l'image directe, $\boxed{H_k \subset H_{k+1}}$

b) Posons $E := \Big\{ \dim(H_k), k \in \mathbb{N} \Big\}$.
E est une partie non vide (contient 0) de $\mathbb{N}$ et majorée (par N).
Donc $\max(E)$ est bien défini et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\max(E) = \dim(H_k)$$

$\dim(H_{k+1}) \leq \dim(H_k)$ par maximalité et $H_k \subset H_{k+1}$ donc $\dim(H_k) \leq \dim(H_{k+1})$.
Par inclusion et égalité des dimensions, $H_k = H_{k+1}$. $\boxed{k \text{ convient}}$

c) Pour commencer, on a $\dim(H_0) = 0$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(r_0, Ar_0, ..., A^{k-1}r_0)$ est une famille génératrice de H_k.
Montrons par récurrence finie montante simple sur $k \in [\![0, m]\!]$ la propriété :

$$\mathcal{H}_k : (r_0, Ar_0, ..., A^{k-1}r_0) \text{ est une base de } H_k$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie car la famille vide est une base de l'espace nul.
Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $(r_0, ..., A^k r_0)$ soit liée.
Par conséquence de l'hypothèse de récurrence, $(r_0, ..., A^{k-1}r_0)$ est libre donc $A^k r_0 \in \mathrm{Vect}(r_0, ..., A^{k-1}r_0)$.
On en déduit $H_{k+1} \subset H_k$ puis $H_k = H_{k+1}$ ce qui est absurde par minimalité de m.
Donc $(r_0, ..., A^k r_0)$ est libre, et aussi génératrice de H_{k+1}.
$\mathcal{H}_{k+1}$ est donc vérifiée.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0, m]\!], \dim H_k = \mathrm{card}(r_0, ..., A^{k-1}r_0) = k}$
Ensuite, montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}_k : A^k r_0 \in H_m$$

Tout d'abord, cette propriété est vraie par définition pour les entiers entre 0 et $m-1$ et $\mathcal{P}_m$ est également vraie car $A^m r_0 \in H_{m+1} = H_m$.
Soit $k \geq m$. Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie.
Alors $A^k r_0 \in H_m$ donc $A^{k+1}r_0 \in H_{m+1}$ puis $A^{k+1}r_0 \in H_m$.
$\mathcal{P}_{m+1}$ est donc vérifiée.
Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k r_0 \in H_m$.
À présent prenons $k \geq m$.
$(r_0, ..., A^{k-1}r_0)$ est génératrice de H_k et

$$\forall j \in [\![0, k-1]\!], A^j r_0 \in H_m$$

donc $H_k \subset H_m$.
On a aussi $H_m \subset H_k$ par croissance de la suite ensembliste.
Donc $H_k = H_m$ puis

$$\boxed{\forall k \geq m, \dim(H_k) = \dim(H_m) = m}$$

8. a) Vu que $Ar_0 \in \mathrm{Vect}(r_0)$, on en déduit que $H_0 = H_1$ donc $m \leq 1$.
Vu que r_0 est non nul, $H_0 \subsetneq H_1$ donc $m \geq 1$.
Conclusion : $\boxed{m = 1}$

b) Posons

$$P(X) := \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$$

D'après le théorème spectral, A est diagonalisable et $P(A) = 0$.
De plus, par hypothèse sur le nombre de valeurs propres de A, $\deg(P) = d$.
On en déduit que $A^d r_0 \in \mathrm{Vect}(r_0, ..., A^{d-1}r_0)$ donc $H_{d+1} \subset H_d$ puis $H_d = H_{d+1}$ puis $\boxed{m \leq d}$

c) Soit $n \in [\![1, d]\!]$. Notons $\lambda_1 < ... < \lambda_n$ n valeurs propres distinctes deux à deux de A et $e_1, ..., e_n$ des vecteurs propres associés puis

$$e = e_1 + ... + e_n$$

On pose $x_0 = \tilde{x} - A^{-1}e$ et on a $r_0 = A(\tilde{x} - x_0) = e$ donc $r_0 \neq 0$ par liberté de $(e_1, ..., e_n)$.
Vérifions que e convient.
On commence par montrer que $(e, Ae, ..., A^{n-1}e)$ est libre ce qui montrera que $m \geq n$.
Notons que chaque vecteur de cette famille est élément de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$ dont $(e_1, ..., e_n)$ est une base.
Ensuite, la matrice de cette famille dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et c'est une matrice de Vandermonde inversible car $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont deux à deux distincts.
Donc $(e, Ae, ..., A^{n-1}e)$ est libre.

Ensuite, $(e, Ae, ..., A^n e)$ est liée car ce sont $n+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$ donc $A^n e \in H_n$ puis $H_{n+1} \subset H_n$ puis $H_{n+1} = H_n$ puis $m \leq n$.
Conclusion : $m = n$ et $\boxed{x_0 \text{ convient}}$

d) Notons $\lambda_1 < ... < \lambda_d$ les valeurs propres de A, deux à deux distinctes et

$$F := \left\{ \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)^{\mu_k} \text{ tq } (\mu_1, ...\mu_d) \in \mathbb{N}^d \text{ et } \sum_{k=1}^{d} \mu_k \leq d-1 \right\}$$

F est un ensemble fini de polynômes.
Soit $e \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. On suppose qu'il existe $n \in [\![1, d-1]\!]$ tel que $(e, Ae, ..., A^{n-1}e)$ soit libre et $(e, ..., A^n e)$ liée.
Il existe alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$(X^n + Q(X))(A)e = 0$$

Notons R l'un des facteurs irréductibles de la décomposition de $X^n + Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et S le quotient de $X^n + Q(X)$ par R.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $R(A)$ soit inversible.
Alors $S(A)e = 0$ ce qui contredit maintenant la liberté de la famille $(e, Ae, ..., A^{n-1}e)$.
Les facteurs irréductibles de $X^n + Q(X)$ sont donc de la forme $(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et

$$e \in \bigcup_{P \in F} \ker(P(A))$$

Supposons qu'il existe $P \in F$ tel que $\ker P(A) = \mathbb{R}^N$.
Alors $P(A) = 0$ donc A est annulée par un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $d-1$.
Or, puisque $P(A) = 0$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1, d]\!], P(\lambda_i) = 0$$

donc P admet au moins d racines.
Donc $P = 0$: absurde car F ne contient pas le polynôme nul.
Pour tout $P \in F$, $\dim(\ker(P(A))) \leq N-1$ et F est un ensemble fini par construction.
Enfin, soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ pour lequel la dimension m est strictement inférieure à d.
On pose $e = r_0 = A(\tilde{x} - x_0)$ et e est un vecteur non nul vérifiant $(e, Ae, ..., A^{m-1}e)$ libre et $(e, ..., A^m e)$ liée avec $m \leq d-1$.
Donc il existe $P \in F$ tel que $A(\tilde{x} - x_0) \in \ker P(A)$ puis

$$x_0 \in \tilde{x} + A^{-1} \ker P(A)$$

avec $\dim(A^{-1}\ker(P(A))) = \dim(\ker(P(A))) \leq N-1$ par inversibilité de A.
Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in F$ tel que

$$x_0 \in \tilde{x} + A^{-1} \ker(P(A))$$

Alors $r_0 \in \ker(P(A))$ donc, si on note n le degré de P ($n \leq d-1$) on a $(r_0, ..., A^n r_0)$ liée donc $m \leq n$ donc $m \leq d-1$.
Conclusion : $\boxed{\text{le résultat demandé est démontré}}$ puisque l'ensemble des $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tels que $m = d$ est le complémentaire de $\displaystyle\bigcup_{P \in F} \left(\tilde{x} + A^{-1}\ker(P(A))\right)$ et que F est fini.

9. Par conséquence de la définition de m, $A^m r_0 \in \mathrm{Vect}(r_0, ..., A^{m-1}r_0)$ donc il existe $R \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que $(X^m + R(X))(A)r_0 = 0$.
Or $r_0 = -Ae_0$ et $(-A)$ est inversible et commute avec $A^m + R(A)$.
Donc $(X^m + R(X))(A)e_0 = 0$ et $X^m + R(X)$ est de degré m par construction.
Conclusion : $\boxed{X^m + R(X) \text{ convient}}$

10. $(r_0, ..., A^{m-1}r_0)$ est libre et $(r_0, ..., A^m r_0)$ est liée.
Par le même raisonnement qu'à la question 8d), on en déduit que le polynôme $X^m + R(X)$ n'a pas d'autres facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ que ceux de la forme $(X - \lambda)$ avec λ dans le spectre de A.
Or $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ car A est inversible.
Conclusion : $\boxed{Q(0) \neq 0}$

11. a) Par conséquence de la définition de m, il existe $\lambda_0 \neq 0$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que

$$A^m r_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k A^k r_0 = 0$$

Par inversibilité de A et de λ_0, il vient

$$\tilde{x} - x_0 = A^{-1} r_0 = \frac{-1}{\lambda_0} A^{m-1} r_0 - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} A^k r_0$$

Conclusion : $\boxed{\tilde{x} \in x_0 + H_m}$

b) En ayant un peu assez de refaire pour la n-ième fois le même raisonnement, la rédaction sera succinte. On raisonne par l'absurde et on en déduit une contradiction avec le caractère libre de la famille $(r_0, ..., A^{m-1} r_0)$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0, m-1]\!], \tilde{x} \notin x_0 + H_k}$

Partie III

12. On définit l'application J de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur x associe $J(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle b, x \rangle$. On rappelle que $\tilde{x}$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que $A\tilde{x} = b$.

Tout d'abord, on calcule que $J(\tilde{x}) = -\frac{1}{2} \langle \tilde{x}, b \rangle$. Ensuite, en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}\|_A^2 &= \langle x - \tilde{x}, A(x - \tilde{x}) \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle - \langle \tilde{x}, Ax \rangle - \langle x, A\tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, A\tilde{x} \rangle \\ &= 2(J(x) + \langle x, b \rangle) - \langle x, b \rangle - \langle x, b \rangle + \langle \tilde{x}, b \rangle \\ &= 2(J(x) - J(\tilde{x})) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^N, J(x) = J(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|_A^2 \geq J(\tilde{x})}$ et il y a égalité si et seulement si $\|x - \tilde{x}\|_A = 0$ c'est-à-dire si $x = \tilde{x}$ puisque $y \mapsto \|y\|_A$ est une norme.

13. *Les deux questions qui suivent font peu de sens séparément d'une part et d'autre part utilisent la notion hors programme de projection sous-entendu orthogonale sur un sous-espace affine dont on aurait fort bien pu se passer...*

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le calcul précédent, minimiser la fonction J sur l'ensemble $x_0 + H_k$ revient à minimiser $x \mapsto \|x - \tilde{x}\|_A$ sur ce même ensemble ou encore, par translation, à minimiser $y \mapsto \|y + (x_0 - \tilde{x})\|_A$ sur H_k, c'est-à-dire encore trouver la distance du vecteur $\tilde{x} - x_0$ au sous-espace vectoriel de dimension finie H_k pour la distance induite par la norme $\|-\|_A$ elle-même issue du produit scalaire ϕ_A.

D'après le cours, cette distance est réalisée en un unique point y_k de H_k qui est le projeté orthogonal de $\tilde{x} - x_0$ sur H_k (toujours pour le produit scalaire ϕ_A).

Ainsi, $\boxed{J \text{ est minimal sur l'ensemble } x_0 + H_k \text{ en un unique point } x_k \text{ qui vaut } x_k = x_0 + y_k}$.

14. D'après ce qui a été vu à la question précédente,

$$\min \left\{ \|x - \tilde{x}\|_A, x \in x_0 + H_k \right\} = \min \left\{ \|y + (x_0 - \tilde{x})\|_A, y \in H_k \right\} = \|y_k + (x_0 - \tilde{x})\|_A = \|x_k - \tilde{x}\|_A$$

On note désormais pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_k = x_k - \tilde{x}$ et $r_k = b - Ax_k = A\tilde{x} - Ax_k = -Ae_k$.

15. Soit $k \in \{0, \ldots, m-1\}$. Si $e_k = 0$ alors $\tilde{x} = x_k \in x_0 + H_k$, ce qui est faux d'après la question 11.b). Donc $e_k \neq 0$.

En revanche, pour tout $k \geq m$, $H_k = H_m$ et $\tilde{x} \in x_0 + H_m = x_0 + H_k$. Par conséquent $\|x_k - \tilde{x}\|_A = \min \left\{ \|x - \tilde{x}\|_A, x \in x_0 + H_k \right\} = 0$ donc $x_k = \tilde{x}$, c'est-à-dire $e_k = 0$.

16. D'après la question 14), pour tout $k \in \mathbb{N}$, par définition de H_k, on a :

$$\begin{aligned}\|e_k\|_A &= \min\Big\{ \|x-\tilde{x}\|_A, x \in x_0 + H_k\Big\} \\ &= \min\Big\{ \|x_0 + Q(A)r_0 - \tilde{x}\|_A, Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\Big\} \\ &= \min\Big\{ \|e_0 + Q(A)Ae_0\|_A, Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\Big\} \\ &= \min\Big\{ \|(I_N + AQ(A))e_0\|_A, Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\Big\}\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que les deux polynômes en A que sont A et $Q(A)$ commutent.

17. Or puisque $A^{\frac{1}{2}}$ commute avec A d'après la question 6), elle commute aussi avec tout polynôme en A et donc pour tout polynôme Q, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|(I_N + AQ(A))e_0\|_A &= \left\|A^{\frac{1}{2}}(I_N + AQ(A))e_0\right\| \\ &= \left\|(I_N + AQ(A))A^{\frac{1}{2}}e_0\right\| \\ &\leq |||I_N + AQ(A)||| \left\|A^{\frac{1}{2}}e_0\right\| \\ &= |||I_N + AQ(A)||| \, \|e_0\|_A\end{aligned}$$

Ainsi, avec la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\|e_k\|_A \leq \min(\{|||I_N + AQ(A)|||, Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}) \, \|e_0\|_A}$

18. Soit $\lambda_1 = \min(\mathrm{Sp}(A))$ et $\lambda_N = \max(\mathrm{Sp}(A))$.
Posons également pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda_k = \{Q \in \mathbb{R}_k[X], Q(0) = 1\} = \{1 + XQ, Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}$.
D'après la question 5), si $Q \in \Lambda_k$ alors $Q(A) \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(Q(A)) = \{Q(\lambda), \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ donc d'après 3), $|||Q(A)||| = \max(\{|\mu|, \mu \in \mathrm{Sp}(Q(A))\}) = \max(\{|Q(\lambda)|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\})$. Or toutes les valeurs propres de A font partie du segment $[\lambda_1, \lambda_N]$ donc $\max(\{|Q(\lambda)|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}) \leq \max(\{|Q(t)|, t \in [\lambda_1, \lambda_N]\})$.

Avec le résultat de la question précédente, on conclut que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \|e_k\|_A \leq \|e_0\|_A \min_{Q \in \Lambda_k}\left(\max_{t \in [\lambda_1, \lambda_N]} |Q(t)|\right)}$.

19. *Les questions 19 à 23 pourraient faire l'objet d'une partie à part. Seule la fin de la question 23 se rapporte à ce qui précède. Par ailleurs, ces questions sont fort mal rédigées : aucune ne comprend de quantificateur sur k...*

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1, 1]$. On calcule :

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x) &= \cos((k+1)\arccos(x)) + \cos((k-1)\arccos(x)) \\ &= 2\cos(k\arccos(x))\cos\arccos(x)) \\ &= 2xf_k(x)\end{aligned}$$

b) On définit ainsi par récurrence la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Par construction, $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes réels.
Montrons par récurrence à deux pas la propriété

$$\mathcal{P}_k : \left\{\begin{array}{l}\forall t \in [-1, 1], T_k(t) = f_k(t) \\ \deg(T_k) = k \\ T_k(-X) = (-1)^k T_k(X)\end{array}\right.$$

$\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiés.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_{k-1}$ et $\mathcal{P}_k$.
Soit $t \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned}T_{k+1}(t) &= 2tT_k(t) - T_{k-1}(t) \\ &= 2tf_k(t) - f_{k-1}(t) \\ &= f_{k+1}(t)\end{aligned}$$

Ensuite, il existe $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que
$$T_k(X) = \lambda X^k + Q(X)$$
Alors,
$$T_{k+1}(X) = 2\lambda X^{k+1} + (2XQ(X) + T_{k-1}(X))$$
$2\lambda \neq 0$ et $2XQ(X) + T_{k-1}(X) \in \mathbb{R}_k[X]$ donc $\deg(T_{k+1}) = k + 1$.
Enfin,
$$\begin{aligned} T_{k+1}(-X) &= -2XT_k(-X) - T_{k-1}(-X) \\ &= -2X(-1)^k T_k(X) - (-1)^{k-1} T_{k-1}(X) \\ &= (-1)^{k+1}\Big(2XT_k(X) - T_{k-1}(X)\Big) \\ &= (-1)^{k+1} T_{k+1}(X) \end{aligned}$$
Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est démontrée.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (T_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ convient}}$

20. Soit $x \in]-\infty, -1]$ et $t = -x$. D'après la question précédente (sur la parité du polynôme T_k), il suffit de démontrer que
$$T_k(t) = \cosh(k \operatorname{arcosh}(t))$$
On commence par vérifier une formule de factorisation de trigonométrie hyperbolique :
$$\begin{aligned} 2\cosh\frac{a+b}{2}\cosh\frac{a-b}{2} &= 2\frac{e^{(a+b)/2} + e^{(-a-b)/2}}{2}\frac{e^{(a-b)/2} + e^{(b-a)/2}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\Big(e^a + e^b + e^{-b} + e^{-a}\Big) \\ &= \cosh(a) + \cosh(b) \end{aligned}$$
Ensuite, on démontre par récurrence à deux pas comme dans la question précédente que la propriété
$$\mathcal{P}_k : T_k(t) = \cosh(k \operatorname{arcosh}(t))$$
est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \leq -1, T_k(x) = (-1)^k \cosh(k \operatorname{arcosh}(-x))}$
Remarque : je n'utilise pas la note de bas de page du sujet initial. La notation officielle pour la fonction cosinus hyperbolique n'est pas respectée par l'énoncé.

21. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Tout d'abord, $\lambda_N \neq \lambda_1$ sinon A serait une matrice scalaire.
Ensuite,
$$\begin{aligned} -1 + \frac{\lambda_N + \lambda_1}{\lambda_N - \lambda_1} &= \frac{2\lambda_1}{\lambda_N - \lambda_1} \\ &> 0 \end{aligned}$$
Donc $u := \dfrac{-\lambda_N - \lambda_1}{\lambda_N - \lambda_1} < -1$ puis $T_n(u) = (-1)^k \cosh(k \operatorname{arcosh}(-u))$ donc $T_n(u) \neq 0$ puisque la fonction cosh ne s'annule jamais.
Conclusion : $\boxed{w_k \text{ est bien défini}}$
Par construction, $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q_k) = \deg(T_k) = k \leq k$.
De plus, $Q_k(0) = w_k T_k(u) = 1$.
Conclusion : $\boxed{Q_k \in \Lambda_k}$
Soit $t \in [\lambda_1, \lambda_N]$ et $h = \dfrac{2t}{\lambda_N - \lambda_1} - \dfrac{\lambda_1 + \lambda_N}{\lambda_N - \lambda_1}$.
$\lambda_1 \leq t \leq \lambda_N$ et $\lambda_N - \lambda_1 > 0$ donc $-1 \leq h \leq 1$ et on peut poser $\theta = \arccos(h)$.
Calculons :
$$\begin{aligned} |Q_k(t)| &= |w_k| \times |T_k(h)| \\ &= |w_k| \times |T_k(\cos\theta)| \\ &= |w_k| \times |f_k(\cos\theta)| \\ &= |w_k| \times |\cos(k \arccos(\cos\theta))| \\ &= |w_k| \times |\cos(k\theta)| \\ &\leq |w_k| \end{aligned}$$

w_k est donc un majorant de $|Q_k(-)|$ sur $[\lambda_1, \lambda_N]$.
Dans ce qui précède, on choisit $t = \lambda_N$ ce qui donne $h = 1$ puis $\theta = 0$ puis $|Q_k(t)| = |w_k|$.
Conclusion : $\boxed{\text{le maximum de } |Q_k(-)| \text{ sur } [\lambda_1, \lambda_N] \text{ est } |w_k|}$

22. Comme souvent, l'énoncé manque de rigueur et ne daigne pas s'intéresser à la bonne définition de θ. Celle-ci est justifiée par le début de la question précédente et on peut noter que $e^{-\theta} < e^{\theta}$.
Par définition, $\cosh(\theta) = \dfrac{\lambda_N + \lambda_1}{\lambda_N - \lambda_1}$ donc

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = 2\frac{\lambda_N + \lambda_1}{\lambda_N - \lambda_1}$$

Conclusion un peu plus forte que celle de l'énoncé pour faciliter la rédaction de la suite de la question : $\boxed{e^{\theta} \text{ et } e^{-\theta} \text{ sont les deux racines distinctes du trinôme } X^2 - 2\frac{\lambda_N + \lambda_1}{\lambda_N - \lambda_1}X + 1}$ et $e^{-\theta}$ est la plus petite des deux racines.
Le discriminant réduit de ce trinôme vaut $\beta^2 - 1$.
On en déduit que

$$\boxed{e^{-\theta} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}}$$

23. On calcule en notant que $\kappa > 1$ car $\lambda_N > \lambda_1 > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\kappa}+1}{\sqrt{\kappa}-1} &= \frac{\kappa + 1 - 2\sqrt{\kappa}}{\kappa - 1} \\
&= \beta - \sqrt{\frac{4\lambda_N\lambda_1}{(\lambda_N - \lambda_1)^2}} \\
&= \beta - \sqrt{\frac{(\lambda_N + \lambda_1)^2 - (\lambda_N - \lambda_1)^2}{(\lambda_N - \lambda_1)^2}} \\
&= \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \\
&\boxed{= \alpha}
\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par conséquence des questions 18) et 21) et en observant que $0 < \dfrac{e^{-k\theta}}{2} \leq \cosh(k\theta)$,

$$\begin{aligned}
\|e_k\|_A &\leq \|e_0\|_A \times \frac{1}{|T_k(-\beta)|} \\
&= \|e_0\|_A \frac{1}{\cosh(k \operatorname{arcosh} \beta)} \\
&= \|e_0\|_A \frac{1}{\cosh(k\theta)} \\
&\leq 2\|e_0\|_A e^{-k\theta} \\
&= 2\|e_0\|_A \alpha^k \\
&= 2\|e_0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \|x_k - \tilde{x}\|_A \leq 2\|e_0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k}$

Partie IV

Avertissement : Une partie difficile si le candidat n'a pas repéré que $\phi_A : (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$ permet de définir un produit scalaire pour ensuite utiliser tout le cours de première année. Évidemment, cette correction ne va pas se priver d'exploiter à fond cette observation.

24. Soit $k \in [\![1, m]\!]$.
$H_{k-1} \subsetneq H_k$ donc il existe $e_k \in H_k \setminus H_{k-1}$.
$e_1 \in H_1 \setminus \{0\}$ donc (e_1) est une famille libre.

Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. Supposons $(e_1, ..., e_k)$ libre.
Par construction, $(e_1, ..., e_k)$ est une famille libre de k vecteurs de H_k et on sait que $\dim H_k = k$.
Donc $(e_1, ..., e_k)$ est une base de H_k et $H_k = \text{Vect}(e_1, ..., e_k)$.
Ainsi, $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, ..., e_k)$ puis $(e_1, ..., e_{k+1})$ est libre.
Par récurrence, $(e_1, ..., e_m)$ est une famille libre.
On lui applique le procédé de Schmidt pour le produit scalaire ϕ_A et on note $(p_0, ..., p_{m-1})$ la famille obtenue.
C'est une famille ϕ_A-orthonormale donc (ii) est vérifiée.
Pour tout $k \in [\![, 1, m]\!]$, $\text{Vect}(p_0, ..., p_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, ..., e_k) = H_k$ donc (i) est vérifiée.
Conclusion : $\boxed{(p_0, ..., p_{m-1}) \text{ convient}}$

25. Pour $k \in [\![0, m]\!]$, notons P_k la projection ϕ_A-orthogonale sur H_k.
Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$.
D'après la question 14) et la formule qui donne l'expression du projeté orthogonal dans une base orthogonale,

$$x_{k+1} - x_k = P_{k+1}(\tilde{x} - x_0) - P_k(\tilde{x} - x_0) = \frac{\langle p_k, A(\tilde{x} - x_0)) \rangle}{\langle Ap_k, p_k \rangle} \cdot p_k$$

Conclusion : $\boxed{x_{k+1} - x_k \text{ est colinéaire à } p_k}$

26. Nous démontrerons d'abord (i), puis (iv), puis (ii) puis (iii).

i) Notons

$$\mathcal{P}_k : \forall i \in [\![0, k-1]\!], \langle \tilde{r}_i, \tilde{r}_k \rangle = \langle \tilde{p}_i, \tilde{r}_k \rangle = \langle \tilde{p}_i, A\tilde{p}_k \rangle = 0$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie car c'est une propriété vide.
Soit $k \in [\![0, m-2]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie.
Vu l'hypothèse de récurrence, la symétrie de A et les relations de récurrence, pour démontrer $\mathcal{P}_{k+1}$ il ne reste plus qu'à vérifier que

$$\langle \tilde{r}_k, \tilde{r}_{k+1} \rangle = \langle \tilde{p}_k, \tilde{r}_{k+1} \rangle = \langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k+1} \rangle = 0$$

Supposons $k \geq 1$ pour commencer.
Alors $\tilde{p}_k - \tilde{r}_k = \beta_{k-1}\tilde{p}_{k-1}$.
Calculons :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{r}_k, \tilde{r}_{k+1} \rangle &= \frac{\|\tilde{r}_k\|^2}{\langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_k \rangle} \times \langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_k - \tilde{r}_k \rangle \\
&= \beta_{k-1} \frac{\|\tilde{r}_k\|^2}{\langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_k \rangle} \times \langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k-1} \rangle \\
&= 0 \text{ par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{p}_k, \tilde{r}_{k+1} \rangle &= \langle \tilde{p}_k, \tilde{r}_k \rangle - \|\tilde{r}_k\|^2 \\
&= \langle \tilde{p}_k - \tilde{r}_k, r_k \rangle \\
&= \beta_{k-1} \langle \tilde{p}_{k-1}, \tilde{r}_k \rangle \\
&= 0 \text{ par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}
\langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_{k+1} \rangle &= \frac{1}{\alpha_k} \langle \tilde{r}_k - \tilde{r}_{k+1}, \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \tilde{p}_k \rangle \\
&= \frac{1}{\alpha_k} \Big(\frac{\|\tilde{r}_{k+1}\|^2}{\|\tilde{r}_k\|^2} \langle \tilde{r}_k, \tilde{p}_k \rangle - \|\tilde{r}_{k+1}\|^2 \Big) \\
&= \frac{\|\tilde{r}_{k+1}\|^2}{\alpha_k \|r_k\|^2} \Big(\langle \tilde{r}_k, \tilde{p}_k \rangle - \langle \tilde{r}_k, \tilde{r}_k \rangle \Big) \\
&= 0 \text{ d'après ce qui précède}
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que le résultat est aussi vrai pour $k = 1$ pour achever cette récurrence.
Comme $\tilde{p}_0 - \tilde{r}_0 = 0$, tous les calculs précédents donnent bien 0.
Conclusion : $\boxed{(i) \text{ est démontré}}$

iv) Déjà, notons que

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], A\tilde{x}_{k+1} - A\tilde{x}_k = \alpha_k A\tilde{p}_k = \tilde{r}_k - \tilde{r}_{k+1}$$

Puis, par somme télescopique et sachant que $\tilde{x}_0 = x_0$ et $\tilde{r}_0 = r_0$, on obtient

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \tilde{r}_k = A(\tilde{x} - \tilde{x}_k)$$

Maintenant, montrons par récurrence sur $k \in [\![0, m-1]\!]$ la propriété

$$\mathcal{P}_k : (\tilde{x} - \tilde{x}_k, \tilde{p}_k) \in A^{-1}H_{k+1} \times H_{k+1}$$

$\tilde{x} - \tilde{x}_0 = \tilde{x} - x_0 = A^{-1}r_0 \in A^{-1}H_1$
$\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0 = r_0 \in H_1$.
Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Soit $k \in [\![0, m-2]\!]$. Supposons $\mathcal{P}_k$ vrai.

$$\tilde{x} - \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x} - \tilde{x}_k - \alpha_k \tilde{p}_k \in A^{-1}H_{k+1} + H_{k+1}$$

par hypothèse de récurrence.
Or $H_{k+1} \subset A^{-1}H_{k+2}$ car $AH_{k+1} \subset H_{k+2}$.
De plus, $A^{-1}H_{k+1} \subset A^{-1}H_{k+2}$ car $H_{k+1} \subset H_{k+2}$.
Donc $\tilde{x} - \tilde{x}_{k+1} \in A^{-1}H_{k+2}$.
Ensuite,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k+1} &= \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \tilde{p}_k \\ &= A(\tilde{x} - \tilde{x}_{k+1}) + \beta_k \tilde{p}_k \in H_{k+2} + H_{k+1} \subset H_{k+2} \end{aligned}$$

d'après ce qui précède.
Ceci achève la démonstration de l'hérédité. D'après ceci et (i) et la non nullité des $\tilde{p}_k$ et $\dim H_k = k$, (le caractère non nul de $\tilde{p}_k$ étant allègrement passé sous silence par l'énoncé et pourtant utilisé dans la définition de α_k , nous ferons de même), $\boxed{(\tilde{p}_0, ..., \tilde{p}_k) \text{ est une base } \phi_A\text{-orthogonale de } H_{k+1}}$

ii) Déjà, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} \|r_k\|^2 &= \langle \tilde{p}_k, \tilde{r}_k \rangle \\ &= \langle \tilde{p}_k, A(\tilde{x} - \tilde{x}_k) \rangle \\ &= \phi_A(\tilde{x} - \tilde{x}_k, \tilde{p}_k) \end{aligned}$$

Puis, en reprenant les notations précédemment utilisées pour la projection ϕ_A-orthogonale sur H_k : $\tilde{x}_0 = x_0$.
Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. Supposons $\tilde{x}_k = x_k$.
Déjà, $x_k - x_0 = P_k(\tilde{x} - x_0) \in H_k$ et $\tilde{p}_k$ est ϕ_A-orthogonal à H_k donc $\phi_A(x_k, \tilde{p}_k) = \phi_A(x_0, \tilde{p}_k)$.
Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_0 &= P_{k+1}(\tilde{x} - x_0) \\ &= P_k(\tilde{x} - x_0) + \frac{\phi_A(\tilde{x} - x_0, \tilde{p}_k)}{\phi_A(\tilde{p}_k, \tilde{p}_k)} \tilde{p}_k \\ &= x_k - x_0 + \frac{\phi_A(\tilde{x} - x_k, \tilde{p}_k)}{\phi_A(\tilde{p}_k, \tilde{p}_k)} \tilde{p}_k \\ &= \tilde{x}_k - x_0 + \alpha_k \tilde{p}_k \\ &= \tilde{x}_{k+1} - x_0 \end{aligned}$$

Donc $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1}$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0, m]\!], \tilde{x}_k = x_k}$

iii) Soit $k \in [\![0, m]\!]$.
$\tilde{r}_k = A(\tilde{x} - \tilde{x}_k) = A(\tilde{x} - x_k) = b - Ax_k = r_k$.
Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![0, m]\!], \tilde{r}_k = r_k}$