X-ENS PSI 2020 - corrigé

Partie I

1. Soit μ un minorant de h. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant \mu + 0$ ainsi l'ensemble de ces valeurs est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, qui admet donc une borne inférieure $(T_\varepsilon h)(x)$. Le réel $h(x)$ obtenu pour $y = x$ appartient à l'ensemble, donc $(T_\varepsilon h)(x) \leqslant h(x)$.

2. Soient μ_1 et μ_2 des minorants de h_1 et h_2 respectivement, puis $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$. Comme $H(x) \in \{h_1(x), h_2(x)\}$, on a $H(x) \geqslant \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, donc H est minorée, d'où l'existence de $T_\varepsilon H$.

   Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

   - Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $H(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \leqslant h_1(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha$, a fortiori $(T_\varepsilon H)(x) \leqslant h_1(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha$. Le réel $(T_\varepsilon H)(x)$ est un minorant des $h_1(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha$, or $(T_\varepsilon h_1)(x)$ en est le plus grand minorant, donc $(T_\varepsilon H)(x) \leqslant (T_\varepsilon h_1)(x)$. Symétriquement, $(T_\varepsilon H)(x) \leqslant (T_\varepsilon h_2)(x)$. Ainsi,

   $$(T_\varepsilon H)(x) \leqslant \min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right).$$

   - Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, si par exemple $h_2(y) \geqslant h_1(y)$ (l'autre cas est analogue),

   $$H(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha = h_1(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant (T_\varepsilon h_1)(x)$$

   donc

   $$H(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant \min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right).$$

   Le réel $\min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right)$ est donc un minorant de l'ensemble des $H(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha$; par définition de la borne inférieure :

   $$\min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right) \leqslant (T_\varepsilon H)(x).$$

   Finalement $(T_\varepsilon H)(x) = \min\left((T_\varepsilon h_1)(x), (T_\varepsilon h_2)(x)\right)$ pour tout x.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $y \in \mathbb{R}^d$. On sait que $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}x \oplus (\mathbb{R}x)^\perp$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_\perp \in (\mathbb{R}x)^\perp$ tels que $y = \lambda x + y_\perp$. Ainsi $g(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^2 = \|\lambda x + y_\perp\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|(\lambda-1)x + y_\perp\|^2$. Vu $x \perp y_\perp$, le théorème de Pythagore s'applique :

   $$g(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \|y_\perp\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\lambda-1)^2\|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|y_\perp\|^2.$$

   Il en découle que

   $$g(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^2 \geqslant \lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\lambda-1)^2\|x\|^2 = \varphi(\lambda)\|x\|^2.$$

   Les variations de $\varphi : \lambda \mapsto \lambda^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\lambda-1)^2$ montrent qu'elle atteint son minimum en $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}$ avec $\varphi(\lambda_\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon}$. Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $g(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^2 \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\|x\|^2$ et cette valeur est atteinte en choisissant $y = \lambda_\varepsilon x$. La borne inférieure est ici un minimum :

   $$(T_\varepsilon g)(x) = \frac{1}{1+\varepsilon}\|x\|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon}g(x).$$

4. (a) Soient $x, x' \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, par inégalité triangulaire,

   $$h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x'\| \leqslant h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\| + \frac{1}{\varepsilon}\|x-x'\|$$

   donc $(T_\varepsilon h)(x') \leqslant h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\| + \frac{1}{\varepsilon}\|x-x'\|$ puis

   $$(T_\varepsilon h)(x') - \frac{1}{\varepsilon}\|x-x'\| \leqslant h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|$$

donc par définition de la borne inférieure,

$$(T_\varepsilon h)(x') - \frac{1}{\varepsilon}\|x-x'\| \leqslant (T_\varepsilon h)(x).$$

Ainsi,

$$(T_\varepsilon h)(x') - (T_\varepsilon h)(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x-x'\|.$$

Quitte à échanger x et x', on peut supposer que $(T_\varepsilon h)(x') \geqslant (T_\varepsilon h)(x)$, ainsi :

$$\big|(T_\varepsilon h)(x') - (T_\varepsilon h)(x)\big| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x-x'\|.$$

(b) Si $h = T_\varepsilon h$, alors h est $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne d'après (a).

Réciproquement, supposons que h soit $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
$\forall y \in \mathbb{R}^d$, $h(x) - h(y) \leqslant |h(x)-h(y)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x-y\|$ donc $h(x) \leqslant h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|$. C'est vrai $\forall y$, donc $h(x) \leqslant (T_\varepsilon h)(x)$. Par ailleurs avec la question (1), $(T_\varepsilon h)(x) \leqslant h(x)$. Ainsi, $(T_\varepsilon h)(x) = h(x)$. On en déduit que $T_\varepsilon h = h$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

$$(T_\varepsilon h)(x) = \inf\left\{h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|\,;\, y \in \mathbb{R}^d\right\} \leqslant h(0) + \frac{1}{\varepsilon}\|0-x\| \ = \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$$

donc, $T_\varepsilon h = \min\left(T_\varepsilon h, \frac{1}{\varepsilon}h\right) = \min\left(T_\varepsilon h, T_\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}h\right)\right)$ car $\frac{1}{\varepsilon}h$ est $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne, puis avec la question (2), $T_\varepsilon h = T_\varepsilon \min\left(h, \frac{1}{\varepsilon}h\right) = T_\varepsilon(\mu h)$ avec $\mu = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, donc μh est $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne, ainsi $T_\varepsilon h = T_\varepsilon(\mu h) = \mu h = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) h$.

(d) On note $u(x) = 1$ et $h(x) = \|x\|$. Les fonctions u et h sont bien minorées. On a clairement $T_\varepsilon u = u$ par définition. Utilisons la question (2) :

$$T_\varepsilon \ell = T_\varepsilon(\min(u,h)) = \min(T_\varepsilon u, T_\varepsilon h) = \min(u, \mu h)$$

d'après (c) en notant $\mu = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^d$,
– si $\varepsilon \leqslant 1$, $\mu = 1$ donc $(T_\varepsilon \ell)(x) = \min(1, \|x\|) = \ell(x)$
– si $\varepsilon > 1$, $\mu = \frac{1}{\varepsilon}$ donc $(T_\varepsilon \ell)(x) = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\|x\|\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \|x\| \geqslant \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}\|x\| & \text{si} \quad \|x\| < \varepsilon \end{cases}$

5. Notons $m = |f|_\infty$, vu f bornée. On a donc $-m \leqslant f \leqslant m$.
Pour $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant f(y) \geqslant -m$ donc $(T_\varepsilon f)(x) \geqslant -m$. De plus avec (1), $(T_\varepsilon f)(x) \leqslant f(x) \leqslant m$, ainsi $|T_\varepsilon f| \leqslant m$, donc $T_\varepsilon f$ est bornée, et $|T_\varepsilon f|_\infty \leqslant m = |f|_\infty$.

6. • $A(x)$ n'est pas vide car il contient x.
• Soit $y \in A(x)$. On a donc $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \leqslant f(x)$, puis $\frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \leqslant f(x) - f(y) \leqslant 2|f|_\infty$, d'où $\|y-x\| \leqslant (2\varepsilon|f|_\infty)^{1/\alpha}$.
• Montrons que $V = \left\{f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha\,;\, y \in \mathbb{R}^d\right\}$ et $W = \left\{f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha\,;\, y \in A(x)\right\}$ possèdent les même minorants.
  – Tout minorant de V est clairement minorant de W car $W \subset V$.
  – Soit t un minorant de W. Comme $x \in A(x)$, on a $t \leqslant f(x) + \frac{1}{\varepsilon}\|x-x\|^\alpha$ soit $t \leqslant f(x)$.
  Soit $y \in \mathbb{R}^d$. Si $y \notin A(x)$, c'est que $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha > f(x)$, donc $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant t$; si $y \in A(x)$, $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant t$ car t minore W.
  Bref, $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant t$ donc t minore V.

  Ainsi V et W ont les mêmes minorants, et donc la même borne inférieure : $\inf V = \inf W$.
  Autrement dit : $(T_\varepsilon f)(x) = \inf\left\{f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha\,;\, y \in A(x)\right\}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction $g : y \mapsto f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha$ est continue. La partie $A(x) \subset \mathbb{R}^d$ est non vide d'après la question (6), fermée et bornée, en effet :

– fermée : $A(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^d\,;\, g(y) \leqslant \text{cte}\right\}$ avec g continue sur $\mathbb{R}^d$. L'inégalité étant large, $A(x)$ est fermée.
– bornée : vu la question (6), $A(x)$ est incluse dans une boule fermée de centre x.

Selon un théorème du cours, valable en dimension finie (c'est le cas ici), la fonction g admet un minimum sur $A(x)$, en un point y_x. Le dernier résultat de la question (6) montre qu'alors $(T_\varepsilon f)(x) = g(y_x)$.

8. Notons que le réel $|T_\varepsilon f - f|_\infty$ est bien défini d'après (5). Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. Quitte à échanger les noms, on peut supposer $0 \leqslant f(x) - f(y)$. Par définition, $(T_\varepsilon f)(x) \leqslant f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha$ donc
$$f(x) - f(y) \leqslant f(x) - (T_\varepsilon f)(x) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha$$
d'où
$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) \leqslant |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha.$$

9. (a) Soit $r \geqslant 0$. On a $(0,0) \in \mathcal{B}_0(r)$ donc $\mathcal{B}_0(r)$ n'est pas vide. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}_0(r)$, on déduit de (8) que $|f(x) - f(y)| \leqslant |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}r^\alpha$. Ainsi $\{|f(x) - f(y)|\,;\,(x,y) \in \mathcal{B}_0(r)\}$ est majoré, non vide, donc admet une borne supérieure, par définition inférieure au majorant obtenu :
$$\omega_f(r) \leqslant |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}r^\alpha.$$
   (b) Si $0 \leqslant r \leqslant r'$, alors $\mathcal{B}_0(r) \subset \mathcal{B}_0(r')$ donc $\omega_f(r) \leqslant \omega_f(r')$. En effet $\omega_f(r')$ est un majorant de $\{|f(x) - f(y)|\,;\,(x,y) \in \mathcal{B}_0(r')\}$, a fortiori c'est un majorant de $\{|f(x) - f(y)|\,;\,(x,y) \in \mathcal{B}_0(r)\}$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
   - $(T_\varepsilon f)(x) \leqslant f(x)$ d'après la question (1).
   - Pour tout $y \in A(x)$, la question (6) donne $\|y-x\| \leqslant r_\varepsilon$, donc $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(r_\varepsilon)$, en particulier $f(y) - f(x) \geqslant -\omega_f(r_\varepsilon)$, puis $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant f(y) \geqslant f(x) - \omega_f(r_\varepsilon)$. Ainsi $\forall y \in A(x)$,
$$f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y-x\|^\alpha \geqslant f(x) - \omega_f(r_\varepsilon).$$
     En considérant la borne inférieure pour $y \in A(x)$, on en déduit $(T_\varepsilon f)(x) \geqslant f(x) - \omega_f(r_\varepsilon)$.

   Finalement, $-\omega_f(r_\varepsilon) \leqslant (T_\varepsilon f)(x) - f(x) \leqslant 0$ donc $|(T_\varepsilon f)(x) - f(x)| \leqslant \omega_f(r_\varepsilon)$.

11. L'application ω_f est croissante et minorée (par 0) sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, donc par théorème, elle admet une limite réelle λ ($\geqslant 0$) en 0.
   (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons que $(T_{1/n}f)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^d$ vers f. Pour $n \geqslant 1$, on applique (9.a) pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et $r = r_n = n^{-2/\alpha}$. Il vient
$$\omega_f(r_n) \leqslant |T_{1/n}f - f|_\infty + \frac{1}{n}.$$
   La convergence uniforme donne $|T_{1/n}f - f|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, or $\omega_f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. On passe à la limite dans l'inégalité large : $\lambda \leqslant 0$, ainsi $\lambda = 0$.
   (i) $\Leftarrow$ (ii) : Supposons $\lambda = 0$. Par (10), $|T_{1/n}f - f|_\infty \leqslant \omega_f\left(\left(2\frac{1}{n}|f|_\infty\right)^{1/\alpha}\right)$ qui tend vers 0 par hypothèse, donc $|T_{1/n}f - f|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où la convergence uniforme.

Partie II

12. Pour montrer que $f + f_0$ est concave il suffit d'ajouter les inégalités. Examinons $g = \min(f, f_0)$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in [0,1]$. On a
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$
et de même $f_0(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, donc $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$. La fonction $g = \min(f, f_0)$ est donc concave.

13. Il s'agit de *l'inégalité de Jensen*. On note $P(n)$ la propriété au rang n, en observant que $P(2)$ est vraie par définition de la concavité.
Soit $n \geqslant 2$. Supposons $P(n)$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Notons $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, alors $s \in [0,1]$ et $\lambda_{n+1} = 1 - s$. Si $s \neq 0$, notons $\lambda_i' = \lambda_i / s$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(s \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_i + (1-s) x_{n+1}\right) \geqslant s f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_i\right) + (1-s) f\left(x_{n+1}\right)$$

par concavité de f. Utilisons alors $P(n)$, vu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' = 1$ et $\lambda_i' \geqslant 0$, donc $\lambda_i' \in [0,1]$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \geqslant s \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' f\left(x_i\right) + (1-s) f\left(x_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Si $s = 0$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$ donc $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$.
Ainsi $P(n+1)$ est vraie, ce qui termine l'hérédité. $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

14. $f(y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$ donc :
   - $\lambda(f(z) - f(x)) \geqslant f(z) - f(y)$, or $\lambda > 0$, donc $f(z) - f(x) \geqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{\lambda}$;
   - $f(y) - f(x) \geqslant (1-\lambda)(f(z) - f(x))$, or $1 - \lambda > 0$, donc $f(z) - f(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{1-\lambda}$.

15. (a) Les X_i dépendent de la dimension d ; notons-les plutôt $X_{d,i}$ dans cette question.
On note $H(d)$: $\forall x \in [-M, M]^d$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^d} \in [0,1]$ de somme 1 tels que $x = \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i X_{d,i}$.
$H(1)$ est vraie : $\forall x \in [-M, M]$, $x = \lambda(-M) + (1-\lambda) M$ en prenant $\lambda = \frac{M-x}{2M}$, qui est dans $[0,1]$.
Soit $d \geqslant 1$; supposons $H(d)$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in [-M, M]^{d+1}$.
Soit $\lambda \in [0,1]$ tel que $x_{d+1} = \lambda(-M) + (1-\lambda) M$, alors

$$x = \lambda(x_1, \ldots, x_d, -M) + (1-\lambda)(x_1, \ldots, x_d, M).$$

Par $H(d)$ on dispose de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^d} \in [0,1]$ de somme 1 tels que

$$(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i X_{d,i} = \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i ((X_{d,i})_1, \ldots, (X_{d,i})_d).$$

Ainsi, puisque $\sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i = 1$,

$$x = \lambda \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i ((X_{d,i})_1, \ldots, (X_{d,i})_d, -M) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i ((X_{d,i})_1, \ldots, (X_{d,i})_d, M).$$

x est combinaison des 2^{d+1} vecteurs $X_{d+1,i}$ avec les coefficients $\lambda\lambda_i$ et $(1-\lambda)\lambda_i$ positifs, de somme $\lambda \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i = \lambda + (1-\lambda) = 1$. Ces coefficients appartiennent donc à $[0,1]$.
Ainsi $H(d)$ implique $H(d+1)$, ce qui achève la démonstration.

(b) Soit m le minimum des nombres $f(X_1), \ldots, f(X_{2^d})$.
Pour tout $x \in [-M, M]^d$, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^d} \in [0,1]$ de somme 1 tels que $x = \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i X_i$. Vu (13) :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i X_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i f(X_i) \geqslant \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i m = m.$$

Ainsi $f(x) - f(0) \geqslant m - f(0)$. La constante $D = m - f(0)$, négative vu le cas $x = 0$, convient.

(c) Soit $x \in [-M, M]^d$. Par concavité, $f(0) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) \geqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x)$ or $f(-x) \geqslant f(0) + D$ vu (b). Ainsi $f(0) \geqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}(f(0) + D)$ d'où $f(x) - f(0) \leqslant -D = |D|$. On a aussi par (b) : $f(x) - f(0) \geqslant -|D|$, donc $|f(x) - f(0)| \leqslant |D|$.

(d) Soient $x, y \in [-M/2, M/2]^d$. Quitte à échanger x et y, imposons $f(x) - f(y) \geqslant 0$.
Imposons également $x \neq y$, le cas $x = y$ étant évident.
Soit $t = \frac{M}{2\|y-x\|}$, bien défini et > 0, puis $z = y + t(y - x)$. On a donc $y = \frac{t}{1+t}x + \frac{1}{1+t}z$.
Pour tout i de 1 à d, $|z_i| \leqslant |y_i| + t|y_i - x_i| \leqslant \frac{M}{2} + t\|y - x\| = \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$ donc $z \in [-M, M]^d$.
Avec la question (c), et la question (14) appliquée à $\lambda = \frac{t}{1+t}$,

$$-2|D| \leqslant f(z) - f(0) + f(0) - f(x) = f(z) - f(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{1 - \lambda} = (1 + t)(f(y) - f(x)) \leqslant 0.$$

Ainsi,

$$2|D| \geqslant (1 + t)|f(x) - f(y)| \geqslant \frac{M}{2\|y - x\|}|f(x) - f(y)|$$

donc $|f(x) - f(y)| \leqslant 4|D|\frac{\|y-x\|}{M}$.

(e) La restriction f_M de f à $[-M/2, M/2]^d$ est lipschitzienne, donc continue. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on peut choisir M assez grand pour que x soit intérieur à $[-M/2, M/2]^d$, alors f est continue au point x.

16. (a) Fixons $X_1 \in C$. L'ensemble $\{\|Y - X\|\,;\, \|Y - X\| \leqslant \|Y - X_1\| \text{ et } X \in C\}$ admet un minimum, disons au point $X = Y_0$, en effet : l'espace ambiant est de dimension finie, l'application $X \mapsto \|Y - X\|$ est continue, et $C_1 = C \cap B_f(Y, \|Y - X_1\|)$ est
– borné, car inclus dans la boule fermée $B_f(Y, \|Y - X_1\|)$;
– fermé, comme intersection de deux fermés ;
– non vide vu $X_1 \in C_1$.
Comme $X_1 \in C_1$, $\|Y - X_1\| \geqslant \|Y - Y_0\|$. Pour tout $X \in C$,
– ou bien $X \in C_1$, alors $\|Y - X\| \geqslant \|Y - Y_0\|$ par définition de Y_0 ;
– ou bien $X \notin C_1$, donc $\|Y - X\| > \|Y - X_1\| \geqslant \|Y - Y_0\|$.
Ainsi, $\forall X \in C$, $\|Y - Y_0\| \leqslant \|Y - X\|$.

(b) Soit $X \in C$. Pour tout $t \in]0, 1]$, le point $Z_t = (1 - t)Y_0 + tX$ appartient à C, car C est convexe. On a donc par définition de Y_0 :

$$\|Y - Y_0\|^2 \leqslant \|Y - Z_t\|^2 = \|Y - Y_0 + t(Y_0 - X)\|^2 = \|Y - Y_0\|^2 + 2t\langle Y - Y_0 \,|\, Y_0 - X\rangle + t^2\|Y_0 - X\|^2.$$

On simplifie et on divise par t (> 0) : $0 \leqslant 2\langle Y - Y_0 \,|\, Y_0 - X\rangle + t\|Y_0 - X\|^2$, puis on fait tendre t vers 0. Il vient $0 \leqslant 2\langle Y - Y_0 \,|\, Y_0 - X\rangle$, soit encore $\langle Y - Y_0 \,|\, X - Y_0\rangle \leqslant 0$.

(c) Supposons que Y_0 et Y_0' conviennent en (a). En prenant $X = Y_0'$ en (b), on obtient

$$\langle Y - Y_0 \,|\, Y_0' - Y_0\rangle \leqslant 0.$$

On peut échanger les rôles, d'où symétriquement

$$\langle Y - Y_0' \,|\, Y_0 - Y_0'\rangle \leqslant 0.$$

On ajoute les deux : $\langle Y_0' - Y_0 \,|\, Y_0' - Y_0\rangle = \|Y_0' - Y_0\|^2 \leqslant 0$, donc $Y_0' = Y_0$, d'où l'unicité.

17. (a) C'est la conséquence directe de (16.a) avec $C = E_f$, $Y = (x_*, f(x_*) + \varepsilon)$ et $Y_0 = X_\varepsilon$, car E_f est convexe, fermé, non vide.
- E_f est convexe : si (x, y), $(x', y') \in E_f$ et $\lambda \in [0, 1]$, notons $(x'', y'') = \lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y')$. On a $y'' = \lambda y + (1 - \lambda)y' \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x')$ car (x, y) et $(x', y') \in E_f$, or par concavité de f, $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') \leqslant f(\lambda x + (1 - \lambda)x') = f(x'')$, ainsi $y'' \leqslant f(x'')$: $(x'', y'') \in E_f$.
- E_f est fermé, car stable par passage à la limite, du fait de la continuité de f vue en (15.e), et de l'inégalité large dans la définition de E_f.
- E_f n'est pas vide puisque $(0, f(0)) \in E_f$.

(b) $X_\varepsilon \in E_f$ donc $y_\varepsilon \leqslant f(x_\varepsilon)$.
On est dans la situation du (16) avec $Y = (x_*, f(x_*) + \varepsilon)$ et $Y_0 = X_\varepsilon$. De plus $Y \notin C = E_f$, donc $Y \neq Y_0$. Pour $0 < t < 1$, posons

$$X_t = tY + (1-t)Y_0 = (tx_* + (1-t)x_\varepsilon, tf(x_*) + t\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon).$$

$\|Y - X_t\| = (1-t)\|Y - Y_0\| < \|Y - Y_0\|$ (car $\|Y - Y_0\| > 0$), donc par minimalité $X_t \notin E_f$, soit :

$$tf(x_*) + t\varepsilon + (1-t)y_\varepsilon > f(tx_* + (1-t)x_\varepsilon).$$

On fait tendre t vers 0, or f est continue, d'où : $y_\varepsilon \geqslant f(x_\varepsilon)$. Finalement $y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On applique (16.b) avec $Y = (x_*, f(x_*) + \varepsilon)$, $Y_0 = (x_\varepsilon, f(x_\varepsilon))$, $X = (x, f(x)) \in E_f$: $0 \geqslant \langle Y - Y_0 \,|\, X - Y_0 \rangle =$

$$\langle (x_* - x_\varepsilon, a(\varepsilon)) \,|\, (x - x_\varepsilon, f(x) - f(x_\varepsilon)) \rangle = \langle x_* - x_\varepsilon \,|\, x - x_\varepsilon \rangle + a(\varepsilon)(f(x) - f(x_\varepsilon))$$

$= \langle x_* - x_\varepsilon \,|\, x - x_* + x_* - x_\varepsilon \rangle + a(\varepsilon)(f(x) - f(x_\varepsilon)) = \langle x_* - x_\varepsilon \,|\, x - x_* \rangle + \|x_* - x_\varepsilon\|^2 + a(\varepsilon)(f(x) - f(x_\varepsilon))$.

(d) L'inégalité (c) vaut en particulier pour $x = x_*$: $0 \geqslant \|x_* - x_\varepsilon\|^2 + a(\varepsilon)(f(x_*) - f(x_\varepsilon))$, soit

$$(\Phi) \ : \quad \|x_* - x_\varepsilon\|^2 + a(\varepsilon)(a(\varepsilon) - \varepsilon) \leqslant 0.$$

- Nécessairement, $a(\varepsilon)(a(\varepsilon) - \varepsilon) \leqslant 0$ donc $a(\varepsilon)$ se situe entre les deux racines de $X(X - \varepsilon)$: $0 \leqslant a(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Mais si $a(\varepsilon) = 0$, l'inégalité (Φ) devient $\|x_* - x_\varepsilon\|^2 \leqslant 0$ donc $x_* = x_\varepsilon$ or $a(\varepsilon) = 0 \iff f(x_\varepsilon) = f(x_*) + \varepsilon$. On a donc $f(x_*) = f(x_*) + \varepsilon$: contradiction, donc $a(\varepsilon) \neq 0$. Ainsi, $0 < a(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.
- L'inégalité (Φ) s'écrit $\|x_* - x_\varepsilon\|^2 \leqslant a(\varepsilon)(\varepsilon - a(\varepsilon))$ où les deux facteurs sont positifs. Or pour tous réels $u, v \geqslant 0$, $\sqrt{uv} \leqslant \frac{1}{2}(u+v)$, donc $uv \leqslant \frac{1}{4}(u+v)^2$, ainsi

$$\|x_* - x_\varepsilon\|^2 \leqslant a(\varepsilon)(\varepsilon - a(\varepsilon)) \leqslant \frac{1}{4}(a(\varepsilon) + \varepsilon - a(\varepsilon))^2 = \frac{1}{4}\varepsilon^2$$

puis $\|x_* - x_\varepsilon\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

(e) On peut appliquer la question (15.d) à la fonction translatée $f^* : z \mapsto f(x_* + z)$, également concave ; la vérification est immédiate. Comme $\|x_* - x_\varepsilon\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, on choisit $M = 1$ et une constante D associée. On a $|f^*(x_\varepsilon - x_*) - f^*(0)| \leqslant \frac{4|D|}{1}\|x_\varepsilon - x_*\|$ soit $|f(x_\varepsilon) - f(x_*)| \leqslant 4|D| \cdot \|x_\varepsilon - x_*\|$.

On reprend (c) avec $x = x_*$: $\|x_* - x_\varepsilon\|^2 \leqslant a(\varepsilon)(f(x_\varepsilon) - f(x_*))$. On a donc

$$\|x_* - x_\varepsilon\|^2 \leqslant a(\varepsilon)(f(x_\varepsilon) - f(x_*)) \leqslant a(\varepsilon)4|D| \cdot \|x_\varepsilon - x_*\|.$$

En divisant par $\|x_* - x_\varepsilon\|$, s'il est non nul, on obtient : $\|x_* - x_\varepsilon\| \leqslant a(\varepsilon)4|D|$, qui reste vrai lorsque $\|x_* - x_\varepsilon\| = 0$. Rappelons que $a(\varepsilon) > 0$, ainsi : $\frac{1}{a(\varepsilon)}\|x_* - x_\varepsilon\| \leqslant 4|D|$.

18. (a) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ donc $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$ par une récurrence évidente, ainsi $b_n - a_n \geqslant 0$ et $b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Ensuite, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ ou 0, donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ pour tout n : (a_n) est croissante. De même, (b_n) est décroissante. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

(b) On note $P(n)$ la propriété : $\{k \in \mathbb{N}\,;\, a_n \leqslant u_k \leqslant b_n\}$ est infini. La propriété $P(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. On a

$$\{k \in \mathbb{N}\,;\, a_n \leqslant u_k \leqslant b_n\} = \left\{k \in \mathbb{N}\,;\, a_n \leqslant u_k \leqslant \frac{a_n + b_n}{2}\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N}\,;\, \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant u_k \leqslant b_n\right\}.$$

Vu $P(n)$, l'un au moins de ces deux ensembles est infini. Si le premier est infini, par définition $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, donc $\{k \in \mathbb{N}\,;\, a_{n+1} \leqslant u_k \leqslant b_{n+1}\}$ est infini. Sinon, le deuxième est infini, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$, donc $\{k \in \mathbb{N}\,;\, a_{n+1} \leqslant u_k \leqslant b_{n+1}\}$ est infini. Ainsi $P(n+1)$ est vraie. Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) D'après (a) les suites (a_n) et (b_n) convergent, et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence une suite d'entiers naturels $(\varphi(0), \varphi(1), \dots)$ ainsi : on pose $\varphi(0) = 0$, puis ayant défini $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)$ on sait que $\{k \in \mathbb{N}\,;\, a_n \leqslant u_k \leqslant b_n\}$ est infini ; on peut donc choisir $\varphi(n)$ dans cet ensemble, avec $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. On obtient une suite $(\varphi(n))_{n\geqslant 0}$ strictement croissante, telle que $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ par construction. Par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

19. On applique (17.e) avec $\varepsilon = 1/n \in]0,1]$. Posons

$$p_n = (p_{1,n}, \dots, p_{d,n}) = \frac{1}{a(1/n)}(x_{1/n} - x_*) \in \mathbb{R}^d.$$

La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, donc les d suites $(p_{i,n})_{n\geqslant 1}$ sont des suites réelles bornées. Avec (18), par d extractions successives, on obtient l'existence d'une suite extraite $(p_{\varphi(n)})$ qui converge vers un certain $p_* \in \mathbb{R}^d$. En effet : il existe une extractrice φ_1 telle que la suite $(p_{1,\varphi_1(n)})_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ_1. La suite $(p_{2,\varphi_1(n)})_{n\geqslant 1}$ étant bornée, il existe une extractrice φ_2 telle que la suite $(p_{2,\varphi_1(\varphi_2(n))})_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ_2 ; on note que $(p_{1,\varphi_1(\varphi_2(n))})_{n\geqslant 1}$ converge encore vers ℓ_1. On continue ainsi, d'où une extractrice $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_d$ telle que $(p_{\varphi(n)})$ converge dans $\mathbb{R}^d$.

Par (17.c) et stricte positivité de $a(\varepsilon)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\Psi) \ : \quad f(x) - f\left(x_{1/\varphi(n)}\right) \leqslant \left\langle x - x_* \,\middle|\, \frac{x_{1/\varphi(n)} - x_*}{a(1/\varphi(n))} \right\rangle - \frac{\|x_* - x_{1/\varphi(n)}\|^2}{a(1/\varphi(n))}.$$

De $0 < a(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ par (17.d), on tire $a(1/\varphi(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, puis

$$x_{1/\varphi(n)} - x_* = a(1/\varphi(n)) \times p_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times p_* = 0.$$

En écrivant

$$\frac{\|x_* - x_{1/\varphi(n)}\|^2}{a(1/\varphi(n))} = \|x_* - x_{1/\varphi(n)}\| \cdot \frac{\|x_* - x_{1/\varphi(n)}\|}{a(1/\varphi(n))} = \|x_* - x_{1/\varphi(n)}\| \cdot \|p_{\varphi(n)}\|$$

on voit que ceci converge vers 0. On passe à la limite dans l'inégalité large (Ψ), f étant continue :

$$f(x) - f(x_*) \leqslant \langle x - x_* \,|\, p_* \rangle.$$

20. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe et concave. Soit $x_* \in \mathbb{R}^d$. Comme g et $g' = -g$ sont concaves, on dispose de vecteurs p_* et p'_* comme en (19) :

$$g(x) - g(x_*) \leqslant \langle p_* \,|\, x - x_* \rangle \ ; \quad -g(x) + g(x_*) \leqslant \langle p'_* \,|\, x - x_* \rangle$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. En ajoutant les deux, il vient $0 \leqslant \langle p_* + p'_* \,|\, x - x_* \rangle$ donc pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $0 \leqslant \langle p_* + p'_* \,|\, y \rangle$. En prenant alors $-y$ au lieu de y, on obtient $\langle p_* + p'_* \,|\, y \rangle = 0$: $p_* + p'_*$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^d$, en particulier à lui-même, donc $p_* + p'_* = 0$. Ceci montre que $p'_* = -p_*$, ainsi $-g(x) + g(x_*) \leqslant \langle p'_* \,|\, x - x_* \rangle \iff -g(x) + g(x_*) \leqslant \langle -p_* \,|\, x - x_* \rangle \iff g(x) - g(x_*) \geqslant \langle p_* \,|\, x - x_* \rangle$. Finalement, $g(x) - g(x_*) = \langle p_* \,|\, x - x_* \rangle$. g est donc du type $x \mapsto \alpha + \langle \beta \,|\, x \rangle$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Réciproquement, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la fonction $x \mapsto \alpha + \langle \beta \,|\, x \rangle$ est clairement convexe et concave.

Partie III

21. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. $(T_\varepsilon f)(x) = \inf \left\{ f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^2 \,;\, y \in \mathbb{R}^d \right\}$ donc

$$(T_\varepsilon f)(x) - \frac{1}{\varepsilon}\|x\|^2 = \inf \left\{ f(y) + \frac{1}{\varepsilon}(\|y - x\|^2 - \|x\|^2) \,;\, y \in \mathbb{R}^d \right\}$$

or $\|y - x\|^2 - \|x\|^2 = \langle y - x + x \,|\, y - x - x \rangle = \langle y \,|\, y - 2x \rangle$ donc $f(y) + \frac{1}{\varepsilon}(\|y-x\|^2 - \|x\|^2) = f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\langle y \,|\, y - 2x \rangle$ ce qui définit une fonction concave de la variable x (voir question (20)).
Ainsi $(T_\varepsilon f)(x) - \frac{1}{\varepsilon}\|x\|^2 = \inf \left\{ g_y(x) \,;\, y \in \mathbb{R}^d \right\}$ avec les g_y concaves. On procède alors comme dans la question (12) pour le minimum de deux fonctions concaves, d'où $x \mapsto (T_\varepsilon f)(x) - \frac{1}{\varepsilon}\|x\|^2$ est concave.

22. La fonction $g : x \mapsto f(x) - K\|x\|^2$ est concave. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Par (19), il existe $q_x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $g(y) - g(x) \leqslant \langle q_x \,|\, y - x\rangle$ soit

$$f(y) - f(x) \leqslant \langle q_x \,|\, y - x\rangle + K\|y\|^2 - K\|x\|^2 = \langle q_x \,|\, y - x\rangle + K\langle y + x \,|\, y - x\rangle$$

puis en décomposant $y + x = 2x + (y - x)$,

$$f(y) - f(x) \leqslant \langle q_x + 2Kx \,|\, y - x\rangle + K\|y - x\|^2.$$

Le vecteur $p_x = q_x + 2Kx$ convient.

23. (a) $f(y) - K\|y - x\|^2 = f(y) - K\|y\|^2 + K(\|y\|^2 - \|y - x\|^2) = f(y) - K\|y\|^2 + K\langle 2y - x \,|\, x\rangle$ or $y \mapsto f(y) - K\|y\|^2$ et $y \mapsto K\langle 2y - x \,|\, x\rangle$ sont concaves, donc leur somme aussi d'après (12). La fonction $y \mapsto f(y) - K\|y - x\|^2$ est donc concave, pour tout x fixé.

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|x - y\| \leqslant 1$. La fonction $z \mapsto f(z) - K\|z - x\|^2$ étant concave, sa translatée $\varphi_x : z \mapsto f(z + x) - K\|z\|^2$ l'est aussi.

On lui applique (15.d) pour $M = 2$ avec une constante D qui ne dépend pas de x. En effet, f est bornée donc pour tout $z \in [-2, 2]^d$,

$$\varphi_x(z) - \varphi_x(0) = f(z + x) - K\|z\|^2 - f(x) \geqslant -2|f|_\infty - 4Kd.$$

La constante $D = -2|f|_\infty - 4Kd$ convient.

Comme $z_0 = y - x$ vérifie $\|z_0\| \leqslant 1$, on a aussi $z_0 \in [-1, 1]^d$ donc

$$|\varphi_x(0) - \varphi_x(z_0)| \leqslant \frac{4|D|}{M}\|0 - z_0\|$$

soit $|f(x) - f(y) + K\|y - x\|^2| \leqslant 2|D| \cdot \|y - x\|$. On termine avec l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(y) + K\|y - x\|^2 - K\|y - x\|^2|$$

$\leqslant |f(x) - f(y) + K\|y - x\|^2| + K\|y - x\|^2 \leqslant 2|D| \cdot \|y - x\| + K\|y - x\|^2$

$\leqslant 2|D| \cdot \|y - x\| + K\|y - x\|$ car $\|y - x\| \leqslant 1$.

On a donc $|f(x) - f(y)| \leqslant K'\|y - x\|$ en posant $K' = 2|D| + K = 4|f|_\infty + 8Kd + K$.

(c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|x - y\| > 1$. Prenons un entier $k \geqslant \|x - y\|$ et posons $x_j = x + \frac{j}{k}(y - x)$ pour $j = 0, 1, \ldots, k$. Alors $x_0 = x$, $x_k = y$, et pour $j < k$, $\|x_{j+1} - x_j\| = \frac{1}{k}\|x - y\| \leqslant 1$ donc, d'après (b), $|f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leqslant K'\|x_{j+1} - x_j\| = K'\frac{1}{k}\|x - y\|$. On a

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{j=0}^{k-1} f(x_{j+1}) - f(x_j)\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leqslant K' \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k}\|x - y\|$$

soit $|f(x) - f(y)| \leqslant K'\|x - y\|$.

24. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Avec (22), on a l'entier p_x.

En appliquant (22) à $-f$, on a un entier p'_x tel que $-f(y) + f(x) \leqslant \langle p'_x \,|\, y - x\rangle + K\|y - x\|^2$ pour tout y. Ainsi, $\langle -p'_x \,|\, y - x\rangle - K\|y - x\|^2 \leqslant f(y) - f(x)$ donc le vecteur $q_x = -p'_x$ convient.

(b) Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Posons $y = x + tu$ pour $t > 0$. D'après (a), $\langle q_x \,|\, tu\rangle - Kt^2\|u\|^2 \leqslant \langle p_x \,|\, tu\rangle + Kt^2\|u\|^2$.

On divise par t puis on fait tendre t vers 0. Il vient : $\langle q_x \,|\, u\rangle \leqslant \langle p_x \,|\, u\rangle$ soit $\langle p_x - q_x \,|\, u\rangle \geqslant 0$.

Cela vaut pour $-u$, donc $\langle p_x - q_x \,|\, u\rangle = 0$. En prenant $u = p_x - q_x$, on en déduit $p_x - q_x = 0$.

(c) Soit i entier tel que $1 \leqslant i \leqslant d$. Posons $y = x + te_i$ pour $t > 0$. D'après (a) et (b),

$$\langle p_x \,|\, e_i\rangle - Kt \leqslant \frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x)) \leqslant \langle p_x \,|\, e_i\rangle + Kt$$

donc $\frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x)) \xrightarrow[t \to 0^+]{} \langle p_x \,|\, e_i\rangle$. De même en 0^-. Ceci prouve que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est bien définie, avec $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \langle p_x \,|\, e_i\rangle = e_i^*(p_x)$ (i-ième coordonnée de p_x dans la base e). Ainsi, $\nabla f(x)$ est bien défini, et $\nabla f(x) = p_x$.

(d) Soient $x, y, h \in \mathbb{R}^d$. On applique (a) au couple $(x, y+h)$, sachant que $p_x = q_x = \nabla f(x)$:

$$(E_1) \ : \quad -K\|y+h-x\|^2 \leqslant f(y+h) - f(x) - \langle \nabla f(x) \,|\, y+h-x \rangle \leqslant K\|y+h-x\|^2$$

On considère (E_1) pour $h = 0$:

$$(E_2) \ : \quad -K\|y-x\|^2 \leqslant f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x) \,|\, y-x \rangle \leqslant K\|y-x\|^2$$

On considère (E_1) pour $x = y$:

$$(E_3) \ : \quad -K\|h\|^2 \leqslant f(y+h) - f(y) - \langle \nabla f(y) \,|\, h \rangle \leqslant K\|h\|^2$$

Alors $(E_1) - (E_2) - (E_3)$ donne :

$$-K(\|h\|^2 + \|y+h-x\|^2 + \|y-x\|^2) \leqslant \langle \nabla f(y) - \nabla f(x) \,|\, h \rangle \leqslant K(\|h\|^2 + \|y+h-x\|^2 + \|y-x\|^2)$$

d'où $|\langle \nabla f(y) - \nabla f(x) \,|\, h \rangle| \leqslant K(\|h\|^2 + \|y+h-x\|^2 + \|y-x\|^2)$.

(e) On suppose le vecteur $v = \nabla f(x) - \nabla f(y)$ non nul, le résultat étant évident sinon.
On choisit le vecteur $h = \frac{\|x-y\|}{\|v\|} v$, donc $\|h\| = \|x-y\|$, et

$$\langle v \,|\, h \rangle = \|v\| \cdot \|x-y\|.$$

Par (d) :

$$|\langle v \,|\, h \rangle| \leqslant K(\|h\|^2 + \|y+h-x\|^2 + \|y-x\|^2).$$

On a $\|y+h-x\| \leqslant \|y-x\| + \|h\| = 2\|h\|$ et $\|x-y\| = \|h\|$, donc

$$|\langle v \,|\, h \rangle| \leqslant K(\|h\|^2 + 4\|h\|^2 + \|h\|^2) = 6K\|h\|^2.$$

Ainsi, $\|v\| \cdot \|x-y\| \leqslant 6K\|y-x\|^2$, donc en divisant par $\|y-x\|$ $(\neq 0)$:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant 6K\|y-x\|.$$

La fonction ∇f est lipschitzienne, donc continue, ainsi f est de classe C^1.

♦ ♦ ♦