ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2020

LUNDI 20 AVRIL 2020 - 8h00 – 12h00

FILIERE PSI

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(XUCR)

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé
Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout l'énoncé, on adopte les notations suivantes :

– Si E et F sont deux ensembles non vides, alors $E \times F$ désigne l'ensemble de tous les couples de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Si $k \geqslant 1$ est un entier, on note E^k l'ensemble des k-uplets $(x_1, \cdots, x_k)$ avec $x_i \in E$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

– Pour tout entier $d \geqslant 1$, $\langle . | . \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$ défini par

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \forall y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

On note $\| \cdot \|$ la norme associée définie sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \|x\| = (\sum_{i=1}^{d} x_i^2)^{1/2},$$

On note $(e_1, \cdots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

– Si E est un ensemble non vide et g une application de E dans $\mathbb{R}$, on note $\inf_{x \in E} g(x)$ la borne inférieure de l'ensemble non vide $g(E)$ défini par

$$g(E) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in E \text{ tel que } y = g(x)\}.$$

On rappelle que cette borne inférieure est bien définie si g est minorée sur E, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel m tel que

$$\forall x \in E, \ g(x) \geqslant m.$$

De même, on note $\sup_{x \in E} g(x)$ la borne supérieure de $g(E)$. Cette borne supérieure est bien définie s'il existe un nombre réel M tel que

$$\forall x \in E, \ g(x) \leqslant M.$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$, on note $\min(f_1, f_2)$ la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \ \min(f_1, f_2)(x) = \min(f_1(x), f_2(x)).$$

– Si $d \geqslant 1$ est un entier, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction et $K \geqslant 0$ une constante réelle, on dit que f est K-Lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K\|x - y\|.$$

On dit que f est Lipschitzienne s'il existe une constante réelle $K \geqslant 0$ telle que f est K-Lipschitzienne.

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions *bornées* de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on pose

$$|f|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Dans toute la suite, d désignera un entier naturel non nul.

Partie I : approximation par des fonctions Lipschitziennes

Dans toute cette partie, ε et α désignent deux nombres réels avec $\varepsilon > 0$ et $\alpha \geqslant 1$. Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction minorée, on définit, sous réserve d'existence, la fonction $T_\varepsilon h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (T_\varepsilon h)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} (h(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha).$$

1. Soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction minorée. Montrer que la fonction $T_\varepsilon h$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T_\varepsilon h)(x) \leqslant h(x).$$
2. Soient h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ minorées. On pose $H = \min(h_1, h_2)$. Montrer que $T_\varepsilon H$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et que $T_\varepsilon H = \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.
Indication : pour prouver cette dernière identité, on peut d'abord montrer que $T_\varepsilon H \leqslant \min(T_\varepsilon h_1, T_\varepsilon h_2)$.
3. On suppose dans cette question uniquement que $\alpha = 2$. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \|x\|^2.$$
Calculer $(T_\varepsilon g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
Indication : pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on peut décomposer tout vecteur $y \in \mathbb{R}^d$ sous la forme $y = \lambda x + y_\perp$ avec λ un nombre réel et $y_\perp$ un vecteur orthogonal à x.
4. On suppose ici uniquement que $\alpha = 1$. Soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction minorée.
   (a) Montrer que $T_\varepsilon h$ est $\frac{1}{\varepsilon}$-Lipschitzienne.
   (b) Montrer que $T_\varepsilon h = h$ si et seulement si h est $\frac{1}{\varepsilon}$-Lipschitzienne
   (c) On se place dans le cas où $h(x) = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^d, (T_\varepsilon h)(x) = \min(1, \frac{1}{\varepsilon})\|x\|.$$
   (d) Soit $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\ell(x) = \min(1, \|x\|)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$. Exprimer $(T_\varepsilon \ell)(x)$ en fonction de ε et x pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

On revient désormais au cas général où $\alpha \geqslant 1$. Dans toute la suite de cette partie, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une fonction fixée.

5. Montrer que $T_\varepsilon f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $|T_\varepsilon f|_\infty \leqslant |f|_\infty$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose
$$A(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha \leqslant f(x)\}.$$
Montrer que $A(x) \neq \emptyset$, que
$$\forall y \in A(x),\ \|y - x\| \leqslant (2\varepsilon |f|_\infty)^{1/\alpha}.$$
et que
$$(T_\varepsilon f)(x) = \inf_{y \in A(x)} (f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha).$$

7. On suppose dans cette question que f est continue. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $y_x \in \mathbb{R}^d$ tel que
$$(T_\varepsilon f)(x) = f(y_x) + \frac{1}{\varepsilon}\|y_x - x\|^\alpha.$$

8. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on a
$$|f(y) - f(x)| \leqslant |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^\alpha.$$

9. On pose ici et dans toute la suite, sous réserve d'existence,
$$\forall r \in [0, +\infty[, \quad \omega_f(r) = \sup_{(x,y)\in\mathcal{B}_0(r)} |f(x) - f(y)|,$$
où
$$\mathcal{B}_0(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| \leqslant r\}.$$
Démontrer les deux assertions suivantes
(a) Pour tout réel $r \geqslant 0$, $\omega_f(r)$ est bien défini et
$$\omega_f(r) \leqslant |T_\varepsilon f - f|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}r^\alpha.$$
(b) La fonction $r \in [0, +\infty[\mapsto \omega_f(r)$ est croissante.

10. Montrer que
$$|T_\varepsilon f - f|_\infty \leqslant \omega_f(r_\varepsilon) \text{ où } r_\varepsilon = (2\varepsilon|f|_\infty)^{1/\alpha}.$$

11. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) La suite de fonctions $(T_{1/n}f)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f.
(ii) $\lim_{t\to 0^+} \omega_f(t) = 0$.

Partie II : fonctions concaves

On dit que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est concave si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in [0,1]$,
$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$
On dit que f est convexe si $-f$ est concave.

Dans la suite, f sera une fonction concave de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

12. Soit f_0 une autre fonction concave de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f + f_0$ et $\min(f, f_0)$ sont concaves.

13. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, si $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifient $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors
$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

14. Soient $x \neq z$ deux points distincts de $\mathbb{R}^d$ et $\lambda \in]0,1[$. On pose $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. Montrer que
$$\frac{f(z)-f(y)}{\lambda} \leqslant f(z)-f(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{1-\lambda}.$$

15. Soit $M > 0$ un réel fixé. On note $X_1, \cdots, X_{2^d}$ les 2^d éléments de $\{-M, M\}^d$ (énumérés dans un ordre arbitraire).
   (a) Montrer que pour tout $x \in [-M,M]^d$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2^d} \in [0,1]$ tels que
   $$\sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{2^d} \lambda_i X_i = x.$$
   Indication : on peut procéder par récurrence.
   (b) Montrer qu'il existe une constante réelle $D \leqslant 0$ telle que :
   $$\forall x \in [-M,M]^d,\ f(x) - f(0) \geqslant D.$$
   (c) En déduire que
   $$\forall x \in [-M,M]^d,\ |f(x) - f(0)| \leqslant |D|.$$
   Indication : on peut observer que $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)$ pour tout $x \in [-M,M]^d$
   (d) En déduire que pour tous $x, y \in [-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]^d$ on a
   $$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{4|D|}{M}\|x-y\|.$$
   Indication : on peut considérer un point $z = y + t(y-x)$ avec $t > 0$ un nombre réel convenablement choisi.
   (e) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^d$.

16. Soit $C \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un ensemble convexe fermé non vide et $Y \in \mathbb{R}^{d+1}$.
   (a) Montrer qu'il existe $Y_0 \in C$ tel que
   $$\forall X \in C, \quad \|Y - Y_0\| \leqslant \|Y - X\|.$$
   (b) Montrer que
   $$\forall X \in C,\ \langle Y - Y_0 \,|\, X - Y_0 \rangle \leqslant 0.$$
   (c) En déduire que Y_0 est unique.

17. On note $E_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid y \leqslant f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$. On fixe dans la suite de cette question $x_\star \in \mathbb{R}^d$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $X_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in E_f$ tel que
   $$\forall X \in E_f, \quad \|(x_\star, f(x_\star)+\varepsilon) - X_\varepsilon\| \leqslant \|(x_\star, f(x_\star)+\varepsilon) - X\|.$$
   (b) Montrer que $y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$.
   (c) On pose désormais $a(\varepsilon) = f(x_\star) - f(x_\varepsilon) + \varepsilon$. Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \langle x - x_\star \,|\, x_\star - x_\varepsilon \rangle + \|x_\star - x_\varepsilon\|^2 + a(\varepsilon)(f(x) - f(x_\varepsilon)) \leqslant 0.$$

(d) En déduire les deux inégalités

$$0 < a(\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$
$$\|x_\star - x_\varepsilon\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

(e) On suppose dans cette question que $\varepsilon \in]0,1]$. Montrer qu'il existe une constante K_0 dépendant uniquement de f et de $x_\star$, et indépendante de ε, telle que

$$\frac{1}{a(\varepsilon)}\|x_\star - x_\varepsilon\| \leqslant K_0.$$

18. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \geqslant 0,\ |u_n| \leqslant K_0$.
On définit les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la manière suivante :
— $a_0 = -K_0$ et $b_0 = K_0$
— pour tout entier $n \geqslant 0$:
- si l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]\}$ est infini alors

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

- sinon

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n.$$

(a) Montrer que ces deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n, b_n]\}$ est infini.

(c) En déduire qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge.

19. Montrer l'existence d'un vecteur $p_\star \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) - f(x_\star) \leqslant \langle p_\star \,|\, x - x_\star\rangle.$$

Indication : on peut considérer les éléments de $\mathbb{R}^d$

$$p_n = \frac{1}{a(\frac{1}{n})}(x_{\frac{1}{n}} - x_\star), \text{ pour } n \geqslant 1.$$

20. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui sont à la fois convexes et concaves.

Partie III : fonctions semi-concaves

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et $K \geqslant 0$ un nombre réel. On dit que f est K-semi-concave si la fonction $x \mapsto f(x) - K\|x\|^2$ est concave. On dit que f est K-semi-convexe si $-f$ est K-semi-concave.

La fonction f est semi-concave s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que f est K-semi-concave. Enfin, on dit que f est semi-convexe si $-f$ est semi-concave.

21. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel et $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On rappelle que quand $\alpha = 2$, $T_\varepsilon f$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (T_\varepsilon f)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} (f(y) + \frac{1}{\varepsilon}\|y - x\|^2).$$

Montrer que, dans ce cas, $T_\varepsilon f$ est $\frac{1}{\varepsilon}$-semi-concave.

22. On suppose dans cette question et dans toute la suite que $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une fonction K-semi-concave. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $p_x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad f(y) - f(x) \leqslant \langle p_x | y - x \rangle + K\|y - x\|^2.$$

23. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(y) - K\|y - x\|^2$ est concave.

 (b) Montrer qu'il existe une constante $K' > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|x - y\| \leqslant 1$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K'\|x - y\|.$$

 (c) Montrer que f est K'-Lipschitzienne.

24. On suppose dans cette question que f est à la fois K-semi-concave et K-semi-convexe.

 (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $p_x, q_x \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \langle q_x | y - x \rangle - K\|y - x\|^2 \leqslant f(y) - f(x) \leqslant \langle p_x | y - x \rangle + K\|y - x\|^2.$$

 (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $p_x = q_x$.

 (c) Conclure que f admet des dérivées partielles en tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $\nabla f(x) = p_x$ (où l'on a noté $\nabla f(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées dans la base canonique sont les dérivées partielles en x de f).

 (d) Montrer que pour tous $x, y, h \in \mathbb{R}^d$ on a l'inégalité

$$|\langle \nabla f(y) - \nabla f(x) \,|\, h \rangle| \leqslant K(\|h\|^2 + \|x + h - y\|^2 + \|x - y\|^2).$$

 Indication : on peut utiliser l'inégalité suivante après l'avoir justifiée :

$$-K\|y + h - x\|^2 \leqslant f(y + h) - f(x) - \langle \nabla f(x) \,|\, y + h - x \rangle \leqslant K\|y + h - x\|^2.$$

 valables pour tous $x, y, h \in \mathbb{R}^d$.

 (e) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ on a $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant 6K\|x - y\|$ et que f est de classe C^1.