

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Concours d'admission 2021

Filière PSI  
**Épreuve de mathématiques**

Durée : quatre heures  
(calculatrices interdites)

## Préambule

On s'intéresse dans ce problème à certains sous-ensembles de l'espace des fonctions à valeurs réelles et continues sur  $]0, +\infty[$ . On peut classiquement définir les opérations d'intégration  $J$  et de dérivation  $D$  de sorte qu'en particulier la composition  $D \circ J$  soit l'opérateur identité, où la notation  $\circ$  désigne l'opérateur de composition usuel.

On cherche alors à définir pour tout réel  $\alpha > 0$  des opérateurs fractionnaires d'intégration  $J^\alpha$  et de dérivation  $D^\alpha$  tels que  $D^\alpha \circ J^\alpha$  soit l'identité et tels que pour tout  $\alpha, \beta > 0$  on ait :

$$J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta} \text{ et } D^\alpha \circ D^\beta = D^{\alpha+\beta}.$$

En particulier pour  $\alpha = 1/2$ , on cherche à définir une racine carrée de  $D$ , i.e. un opérateur  $D^{1/2}$  tel que  $D^{1/2} \circ D^{1/2} = D$ .

Parmi les nombreuses approches possibles, nous allons suivre celles de Riemann-Liouville et Caputo.

- On commence par des préliminaires sur la fonction Gamma ;
- on démontre ensuite une version simple du théorème de Fubini pour des fonctions continues sur un carré et qu'on s'autorisera à utiliser dans la suite du problème dans un cadre plus général, cf. la question 2) ;
- on introduit enfin la transformation de Laplace et on prouve son caractère injectif sur les fonctions continues.

L'intégration fractionnaire est définie dans la partie A alors que les dérivées fractionnaires le seront dans la partie B. Dans la dernière partie on s'intéressera enfin à deux équations différentielles fractionnaires simples.

*Le candidat est libre d'admettre les résultats de la partie Préliminaires, pour aborder les parties A, B et C. Pour simplifier les arguments dans les préliminaires on se restreint aux fonctions continues sur  $]0, +\infty[$ , alors qu'on aura parfois besoin de considérer des fonctions continues sur  $]0, +\infty[$  intégrables au voisinage de 0. Le candidat est autorisé à utiliser les résultats des préliminaires dans ce cadre plus général.*

## Préliminaires

1. On considère la fonction Gamma définie par :  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .
  - (a) Montrer que  $\Gamma$  est bien définie pour  $x$  réel strictement positif.
  - (b) Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a la relation  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .
- **On admettra pour la suite** que la fonction Gamma précédente peut être prolongée en une fonction qu'on notera encore  $\Gamma$ , définie sur  $\mathbf{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$  et vérifiant l'équation fonctionnelle  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$  : l'écriture  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  n'est alors valable que pour  $x > 0$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose en outre  $\Gamma(-n) := +\infty$ .

— **On utilisera aussi** sans justification l'égalité suivante :

$$B(p, q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (E_1)$$

où  $p, q$  sont des réels strictement positifs.

2. Soit  $a \in \mathbf{R}$  strictement positif et soit  $f : [0, a] \times [0, a] \rightarrow \mathbf{R}$  définie et continue. Dans cette question on cherche à établir la version simple suivante du théorème de Fubini :

$$\int_0^a dt \left( \int_0^t f(t, u) du \right) = \int_0^a du \left( \int_u^a f(t, u) dt \right), \quad (E_2)$$

**que le candidat pourra utiliser dans la suite du problème pour  $a = +\infty$  lorsque  $\int_0^{+\infty} dt \left( \int_0^t |f(t, u)| du \right)$  converge.**

(a) i. Pour  $t \in [0, a]$  fixé, soit  $h(\eta) = \int_0^t |f(t+\eta, u) - f(t, u)| du$  définie pour  $\eta \in [-t, a-t]$ .  
Montrer que  $h(\eta)$  tend vers 0 lorsque  $\eta$  tend vers 0.

ii. Montrer avec soin la continuité de  $t \mapsto \int_0^t f(t, u) du$  sur  $[0, a]$ .

iii. Calculer la dérivée de la fonction  $F : x \mapsto \int_0^x dt \left( \int_0^t f(t, u) du \right)$ .

(b) Pour tous  $0 \leq \alpha, \beta \leq a$ , on introduit  $h(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha du \left( \int_u^\beta f(t, u) dt \right)$ .

i. Expliciter la dérivée partielle  $\frac{\partial h}{\partial \alpha}$ .

ii. Expliciter  $\frac{\partial h}{\partial \beta}$ .

iii. Donner alors une expression de la dérivée de  $G : x \mapsto \int_0^x du \left( \int_u^x f(t, u) dt \right)$ .

(c) Dédire de ce qui précède une preuve de l'égalité  $(E_2)$ .

3. Pour  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  des fonctions continues, on définit leur produit de convolution :

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

(a) Montrer que  $f * g$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

(b) Montrer que le produit de convolution est commutatif.

(c) Montrer que le produit de convolution est associatif.

4. Une fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  continue est dite d'ordre exponentiel s'il existe des réels  $M > 0$  et  $r$  tels que pour tout  $t \geq 0$ , on ait :  $|f(t)| \leq M e^{rt}$ . Pour une telle fonction  $f$ , on définit alors sa transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

(a) Montrer que  $\mathcal{L}(f)(s)$  est bien définie pour tout réel  $s$  assez grand.

(b) Montrer que si  $f$  est de classe  $C^1$  avec  $f$  et  $f'$  d'ordre exponentiel, alors pour  $s$  assez grand,  $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ .

(c) Soient  $f$  et  $g$  des fonctions continues sur  $[0, +\infty[$  et d'ordre exponentiel. Montrer que  $f * g$  est d'ordre exponentiel.

- (d) Sous les hypothèses de la question précédente, en utilisant  $(E_2)$  pour  $a = +\infty$ , montrer que, pour  $s$  assez grand,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).$$

5. On cherche à présent à montrer que  $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$  pour tout  $s$  assez grand si et seulement si  $f = g$ .

- (a) Justifier qu'on peut se ramener à chercher les fonctions  $f$  telles que  $\mathcal{L}(f)(s) = 0$  pour tout  $s$  assez grand.

- (b) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue telle que pour tout  $n \geq 0$ , on ait :  $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$ .

Montrer que  $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ , et en déduire que  $f$  est la fonction nulle.

*Indication* : on pourra utiliser, sans justification, le théorème d'approximation de Weierstrass qui établit l'existence pour tout  $\epsilon > 0$ , d'un polynôme  $p_\epsilon \in \mathbf{R}[X]$  tel que :  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_\epsilon(x)| \leq \epsilon$ .

- (c) En déduire que  $\mathcal{L}$  est injective.

*Indication* : on pourra utiliser un changement de variable  $y = e^{-t}$ .

**Dans la suite du problème** le candidat pourra librement utiliser les résultats de ces préliminaires dans le cas où les fonctions ne sont plus nécessairement continues en 0 mais y sont seulement intégrables.

## A – Intégration fractionnaire

6. Pour  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue en 0 et intégrable au voisinage de 0, on note  $I(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$  et pour tout  $n \geq 2$  on définit par récurrence :

$$I^n(f)(x) := I^{n-1}(I(f))(x).$$

Montrer que  $I^2 f(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ , puis que :

$$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

7. Pour tout réel  $\alpha \in \mathbf{R}$ , on note  $\Phi_\alpha : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

en convenant que pour  $\alpha \in \mathbf{Z}$  négatif ou nul,  $\Phi_\alpha$  est la fonction nulle.

- (a) Quelle est la dérivée  $m^e$  de  $\Phi_\alpha$  ?

- (b) Montrer, en utilisant  $(E_1)$ , que pour tous  $\alpha, \beta$  des réels strictement positifs, on a :  $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}$ .

- (c) Expliciter  $\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)$  pour  $\alpha > 0$ .

8. Pour tout réel  $\alpha > 0$ , on définit :

$$J^\alpha(f)(x) = \Phi_\alpha * f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du,$$

et on note  $J^0$  l'opérateur identité, i.e.  $J^0(f)(x) = f(x)$ . D'après la question 6), pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a donc  $J^n = I^n$ .

- (a) Montrer que pour tous réels  $\alpha, \beta$  positifs, on a :  $J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}$ .
- (b) On suppose  $f$  d'ordre exponentiel. Pour  $\alpha > 0$ , montrer que  $\mathcal{L}(J^\alpha f)(s)$  est bien défini pour  $s$  assez grand, et égal alors à  $s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s)$ .
- (c) Pour  $\alpha$  et  $\gamma$  des réels strictement positifs, montrer que  $J^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma+\alpha}$ .
- (d) Soit  $f$  d'ordre exponentiel et soit  $\alpha > 0$ . Montrer que  $J^\alpha f$  est la fonction nulle si et seulement si  $f$  est la fonction nulle.

## B – Dérivées fractionnaires

On note  $D$  l'opération de dérivation usuel,  $D(f)(x) = f'(x)$  lorsque  $f$  est dérivable. Par récurrence, lorsque cela est possible, on définit  $D^n(f) = D(D^{n-1}f)$  de sorte que trivialement  $D^n \circ J^n$  soit l'opérateur identité.

- 9. Pour  $f$  dérivable  $n$  fois, montrer que  $J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$ .
- 10. Étant donné un réel  $\alpha > 0$ , on note  $m$  l'entier tel que  $m - 1 < \alpha \leq m$ , et on déduit  $D^\alpha := D^m \circ J^{m-\alpha}$ , i.e., sous réserve d'existence,

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} du \right) & \text{si } m-1 < \alpha < m, \\ D^m f(t) & \text{si } \alpha = m, \end{cases}$$

et on note  $D^0$  l'opérateur identité.

*Remarque :* on ne demande pas au candidat de donner des conditions nécessaires pour l'existence de  $D^\alpha f$ .

- (a) Pour tout  $\alpha > 0$ , expliciter  $D^\alpha \circ J^\alpha$ .
- (b) Pour  $f = \mathbb{1}$ , expliciter  $D^\alpha \mathbb{1}$  et préciser pour quel  $\alpha$ , la fonction  $D^\alpha \mathbb{1}$  est la fonction nulle<sup>1</sup>.
- (c) Pour  $\alpha > 0$  et  $\gamma > 0$ , montrer que  $D^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma-\alpha}$ .
- (d) Pour  $f$  d'ordre exponentiel, montrer que  $D^\alpha f$  est la fonction nulle si et seulement si  $f$  s'écrit sous la forme  $f(x) = \sum_{j=1}^m c_j x^{\alpha-j}$ , où  $m - 1 < \alpha \leq m$ .

11. Loi des exposants.

- (a) Soient  $f = \Phi_{1/2}$  et  $\alpha = \beta = 1/2$ . Calculer  $(D^\alpha \circ D^\beta)f$  et  $D^{\alpha+\beta}f$ .
- (b) Soient  $g = \Phi_{3/2}$ ,  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 3/2$ . Calculer  $(D^\alpha \circ D^\beta)g$ ,  $(D^\beta \circ D^\alpha)g$  et  $D^{\alpha+\beta}g$ .
- (c) Soit  $f(t) = t^\lambda \eta(t)$  où  $\lambda > -1$  et  $\eta(t) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$  admet un rayon de convergence  $R > 0$ .

Montrer alors que pour tous  $0 \leq t < R$ ,  $0 \leq \beta < \lambda+1$  et  $\alpha \geq 0$ , on a :  $(D^\alpha \circ D^\beta)f = D^{\alpha+\beta}f$ .

12. Soit un réel  $\alpha > 0$  et  $m - 1 < \alpha \leq m$ . On pose alors, sous réserve d'existence,  $D_*^\alpha f := J^{m-\alpha} \circ D^m f$ , i.e.

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} du & \text{si } m-1 < \alpha < m, \\ D^m f(t) & \text{si } \alpha = m. \end{cases}$$

- (a) Soit une fonction  $f$  de classe  $C^m$ , telle que  $D_*^\alpha f$  soit bien définie et égale à la fonction nulle. Montrer que  $f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $m - 1$ .

---

1. La fonction  $\mathbb{1}$ , qui n'est pas définie explicitement dans l'énoncé d'origine, est vraisemblablement la fonction constante égale à 1.

- (b) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ , et soit  $0 < \alpha < 1$ . Montrer que  $(D \circ J^\alpha)f(x) = (J^\alpha \circ D)f(x) + f(0)\Phi_\alpha(x)$ .
- (c) Soit  $m - 1 < \alpha < m$  et soit  $f$  de classe  $C^m$  sur  $[0, +\infty[$ , à valeurs réelles. Sous réserve d'existence de tous les termes, montrer que :

$$D^\alpha f(x) = D_*^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

- (d) En déduire que  $D^\alpha \left( f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = D_*^\alpha f(x)$ .

## C – Deux équations différentielles fractionnaires

13. Pour  $0 < \alpha < 1$ , l'équation d'Abel en  $g$  est :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du = f(t),$$

où  $f$  est une fonction dérivable sur  $[0, +\infty[$  et d'ordre exponentiel.

- (a) Exprimer  $g$  en fonction de  $f$  à l'aide de l'opérateur  $D^\alpha$ .
- (b) On suppose que  $g$  est d'ordre exponentiel. Exprimer la transformée de Laplace de  $g$  en fonction de celle de  $f$ .

14. Pour  $\alpha \geq 0$  on introduit la série entière :

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}.$$

- (a) Calculer  $E_0(\theta)$ ,  $E_1(\theta)$  et  $E_2(-\theta^2)$ .
- (b) Montrer que le rayon de convergence de  $E_\alpha(\theta)$  est strictement positif.
- (c) On pose  $e_\alpha(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$  et on admet qu'il est d'ordre exponentiel. Montrer que pour  $s > 1$ , on a  $\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}$ .

- (d) On pose  $u_k := J^k e_\alpha$ . Montrer que  $\mathcal{L}(u_k)(s) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1}$ .

15. On cherche à résoudre l'équation  $D_*^\alpha u = -u$ . Montrer qu'après application de l'opérateur  $J^\alpha$ , cette équation devient :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} - J^\alpha u(t),$$

où on précisera les  $c_k$ .

16. On suppose que  $u$  est d'ordre exponentiel. Montrer que :

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(u)(s),$$

et en déduire que  $u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k$ .

FIN DE L'ÉPREUVE