Corrigé de X-ENS 2022, filière PSI

Introduction

Dans toute la suite, nous appellerons *compact* une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}^d$).

D'après le résultat rappelé dans le préambule (le *théorème de Bolzano–Weierstrass*), on note par ailleurs (d'après la caractérisation séquentielle de la fermeture) que toute suite d'éléments d'un compact possède une extraction qui converge dans ce compact.

Pour finir ce préambule, mentionnons également le résultat suivant, que nous utiliserons de nombreuses fois dans la suite :

Lemme 1 (Image linéaire réciproque d'un convexe)**.** *Soient $d, m \geqslant 1$ deux entiers ainsi que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors, pour tout convexe C de $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(C)$ est un convexe de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(C)$ ainsi que $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \in C$$

puisque $f(x_1), f(x_2) \in C$, par convexité de C. $\square$

Partie I : Projection et séparation

Projection

1. *Existence.* Par caractérisation séquentielle de l'infimum, il existe d'abord une suite (y_n) telle que

$$\|x - y_n\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} i := \inf_{y \in C} \|x-y\|^2 .$$

Comme cet infimum est réel positif (l'ensemble C est non vide et les $\|x-y\|^2$ sont toutes supérieures ou égales à 0 pour $y \in C$), la suite $(\|x - y_n\|)$ est bornée (car convergente). L'inégalité triangulaire (qui fournit $\|y_n\| \leqslant \|x - y_n\| + \|x\|$ pour tout n) permet d'en déduire que (y_n) est bornée.

D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, il existe donc une suite extraite de la forme $\left(y_{\phi(n)}\right)$ et un élément $y \in \overline{C} = C$ (puisque C est fermé) tels que $y_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ puis, par continuité de la norme et propriété des suites extraites,

$$\left\|x - y_{\phi(n)}\right\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x-y\|^2 \quad \text{et} \quad \left\|x - y_{\phi(n)}\right\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} i.$$

On a donc (par unicité de la limite) $\|x-y\|^2 = i$ c'est-à-dire que

$$\forall z \in C \quad \|x-y\|^2 \leqslant \|x-z\|^2 .$$

Unicité. Supposons qu'il existe $y_1, y_2 \in C$ tels que

$$\|x-y_1\|^2 = i = \|x-y_2\|^2 ,$$

en conservant la notation précédente. Alors, d'après l'identité $2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2$ (valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}^d$), nous obtenons

$$2\left(\|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2\right) = \left(2\left\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\right\|\right)^2 + \|y_2 - y_1\|^2$$

ce qui fournit encore

$$\|y_2 - y_1\|^2 = 4\left(i - \left\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2\right) \leqslant 0$$

puisque (par convexité de C) $\dfrac{y_1+y_2}{2} \in C$. On en déduit alors immédiatement que $y_1 = y_2$.

Procédons enfin par double–implication pour démontrer que $x = \mathrm{proj}_C(x)$ si et seulement si $x \in C$.

$(\Rightarrow)$ Comme $\mathrm{proj}_C(x) \in C$ par définition, le sens direct est immédiat.

($\Leftarrow$) Si $x \in C$ alors (toujours avec la même notation)

$$i \leqslant \|x - x\|^2 = 0$$

et donc $0 = i = \|x - \mathrm{proj}_C(x)\|^2$ puis $x = \mathrm{proj}_C(x)$.

2. Procédons de nouveau par double–implication, en notant plus simplement $p := \mathrm{proj}_C(x)$.

($\Rightarrow$) Supposons que $y = p$. Alors (par définition de la projection p de x sur C) $y \in C$.
Soit par ailleurs $z \in C$. L'identité $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2a \cdot b$ (valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}^d$) montre que

$$\|x-y\|^2 - \|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 - \Big(\|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 - 2\,(x-y)\cdot(z-y)\Big) = 2\,(x-y)\cdot(z-y) - \|z-y\|^2 . \tag{1}$$

Cette quantité étant négative ou nulle pour tout $z \in C$, on en déduit (quitte à remplacer z par $z' = tz + (1-t)y \in C$) que

$$\forall t \in]0,1] \quad 2t\,(x-y)\cdot(z-y) - t^2\,\|z-y\|^2 \leqslant 0$$

et ainsi, en divisant par $t \in]0,1]$ et en faisant tendre t vers 0^+,

$$(x-y)\cdot(z-y) \leqslant 0.$$

($\Leftarrow$) Supposons réciproquement que $y \in C$ et que $(x-y)\cdot(z-y) \leqslant 0$ pour tout $z \in C$.
Alors, d'après l'identité (1), on a directement

$$\forall z \in C \quad \|x-y\|^2 - \|x-z\|^2 = -\|z-y\|^2 + 2\,(x-y)\cdot(z-y) \leqslant 0.$$

La définition de la projection de x sur C montre bien (rappelons que $y \in C$ par hypothèse) que $y = p$.

3. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$. D'après la question précédente et en posant $p_1 = \mathrm{proj}_C(x_1)$ et $p_2 = \mathrm{proj}_C(x_2)$, on obtient

$$(x_1 - p_1)\cdot(p_2 - p_1) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad (x_2 - p_2)\cdot(p_1 - p_2) \leqslant 0$$

puisque p_2 et p_1 appartiennent à C. En sommant ces inégalités, il vient donc (par bilinéarité du produit scalaire)

$$0 \geqslant ((x_1 - p_1) - (x_2 - p_2))\cdot(p_2 - p_1) = \|p_1 - p_2\|^2 - (x_1 - x_2)\cdot(p_1 - p_2)$$

et donc (en revenant aux notations de l'énoncé)

$$(\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2))\cdot(x_1 - x_2) \geqslant \|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\|^2 .$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz implique encore que

$$\|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\|^2 \leqslant (\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2))\cdot(x_1 - x_2) \leqslant \|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\|\,\|x_1 - x_2\| ;$$

de sorte qu'une simplification amène (en distinguant le cas trivial où $\|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\|$ est nul)

$$\|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| .$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tous x_1, x_2 de $\mathbb{R}^d$, l'application proj_C est bien continue (et même 1–lipschitzienne).

4. Notons $x^+ = \max(0, x)$ la partie positive d'un réel x ainsi que $\mathrm{sgn}(x) \in \{-1, 0, +1\}$ son signe (défini comme nul si $x = 0$).

i) On a, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_d)$ fixé de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{proj}_C(x) = ((x_1)^+, \cdots, (x_d)^+).$$

En effet, par définition de $C = \mathbb{R}^d_+$, $p := \mathrm{proj}_C(x)$ appartient à C et

$$\forall z = (z_1, \cdots, z_d) \in C \quad (x-p)\cdot(z-p) = \sum_{i=1}^{d} \left(x_i - (x_i)^+\right)\left(z_i - (x_i)^+\right) = \sum_{i \in \{1,\cdots,d\}:\ x_i < 0} x_i z_i \leqslant 0.$$

ii) On a, pour tout x fixé de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{proj}_C(x) = \frac{x}{\max(1, \|x\|)}.$$

Il suffit en effet de traiter le cas où $x \notin C$ et, dans ce cas et par définition de $C = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leqslant 1\right\}$, $p := \mathrm{proj}_C(x)$ appartient à C (car $\|p\| = \|x\| / \|x\| = 1$) et

$$\forall z \in C \quad (x-p)\cdot(z-p) = \frac{1}{\|x\|}(\|x\| - 1)\,(x\cdot(z-p)) = \frac{1}{\|x\|}(\|x\| - 1)\,(x\cdot z - \|x\|) \leqslant 0,$$

selon l'inégalité de Cauchy–Schwarz (puisque $|x \cdot z| \leqslant \|x\|\,\|z\| \leqslant \|x\|$).

iii) Notons $f(x) = x_1 + \cdots + x_n$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ainsi que $e = d^{-1}(1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^d$. On a, pour tout x fixé de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{proj}_C(x) = \begin{cases} x - (f(x) - 1)e & \text{si } f(x) > 1, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit en effet de traiter le cas où $x \notin C$ et, dans ce cas et par définition de $C = f^{-1}(]-\infty, 1])$, $p := \mathrm{proj}_C(x)$ appartient à C (car $f(p) = f(x) - (f(x) - 1)f(e) = 1$) et

$$\forall z \in C \quad (x - p) \cdot (z - p) = (1 - f(x))e \cdot (z - p) = \frac{1 - f(x)}{d}(f(z) - 1) \leqslant 0.$$

iv) On a, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_d)$ fixé de $\mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{proj}_C(x) = \left(\frac{x_1}{\max(|x_1|, 1)}, \cdots, \frac{x_d}{\max(|x_d|, 1)} \right).$$

Il suffit en effet de traiter le cas où $x \notin C$ et, dans ce cas et par définition de $C = [-1, 1]^d$, $p := \mathrm{proj}_C(x)$ appartient à C (car $\left|\frac{x_i}{|x_i|}\right| = 1$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$) et

$$\forall z \in C \quad (x - p) \cdot (z - p) = \sum_{i \in \{1, \cdots, d\}:\ |x_i| \leqslant 1} 0(z_i - p_i) + \sum_{i \in \{1, \cdots, d\}:\ |x_i| > 1} (x_i - \mathrm{sgn}(x_i))(z_i - \mathrm{sgn}(x_i)) \leqslant 0$$

puisque, si $i \in \{1, \cdots, d\}$ est tel que $\pm x_i > 1$, $(x_i - \mathrm{sgn}(x_i))(z_i - \mathrm{sgn}(x_i)) = (|x_i| - 1)(\mp z_i - 1) \leqslant 0$.

Séparation

5. Tout d'abord, 0 ne peut appartenir à $D - C$ (faute de quoi il existerait $(c, d) \in C \times D$ tel que $0 = d - c$ et nous aurions $c = d \in C \cap D$).
Montrons ensuite que $D - C$ est convexe.
Soient $x_1, x_2 \in D - C$ ainsi que $t \in [0, 1]$. Par définition, il existe (c_1, d_1) et (c_2, d_2) deux éléments de $C \times D$ tels que $x_1 = d_1 - c_1$ et $x_2 = d_2 - c_2$ de sorte que

$$(1 - t)x_1 + tx_2 = ((1 - t)c_1 + tc_2) - ((1 - t)d_1 + td_2) \in D - C$$

par convexité de C et D.
Prouvons désormais que $D - C$ est fermé, à l'aide de la caractérisation séquentielle.
Soit (x_n) une suite d'éléments de $D - C$, qui converge dans $\mathbb{R}^d$ vers un certain élément x et dont le terme général peut s'écrire sous la forme $x_n = d_n - c_n$ pour tout n (avec $c_n \in C$ et $d_n \in D$). Par compacité de C (et l'avertissement initial), il existe une suite extraite $(c_{\phi(n)})$ et un élément $c \in C$ tel que

$$c_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} c$$

de sorte que, par propriété des suites extraites,

$$d_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} + c_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x + c =: d.$$

Comme D est fermé, on a de plus $d \in D$ et ainsi $x = d - c \in D - C$.
Finalement, $D - C$ est bien fermé.

6. Considérons la projection de 0 sur le convexe fermé $D - C$. D'après la question 1, il existe (un unique) $y \in D - C$ tel que

$$\forall z \in D - C \quad (0 - y) \cdot (z - y) \leqslant 0 \quad \text{i.e.} \quad (-y) \cdot z \leqslant - \|y\|^2.$$

En posant $p = -y \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon = \|y\|^2 > 0$ (puisque $0 \notin D - C$ et que $y \in D - C$), on obtient bien

$$\forall (c, d) \in C \times D \quad p \cdot (c - d) \leqslant -\varepsilon \quad \text{i.e.} \quad p \cdot c \leqslant p \cdot d - \varepsilon.$$

7. Montrons par double inclusion que C et $C' := \left\{x \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \leqslant \sigma_C(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^d\right\}$ sont égaux.

$(C \subset C')$ Si $x \in C$, la définition de $\sigma_C(p)$ en termes de supremum entraîne

$$\forall p \in \mathbb{R}^d \quad p \cdot x \leqslant \sigma_C(p)$$

et donc $x \in C'$.

($C' \subset C$) Soit $x \notin C$. Alors $\{x\}$ est un convexe compact non vide tandis que C est un convexe fermé non vide et disjoint de $\{x\}$.
La question précédente fournit alors $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall y \in C \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y - \varepsilon$$

et donc $(-p) \cdot x - \varepsilon \geqslant \sigma_C(-p)$ par définition du supremum. En particulier, avec $p' = -p$, $p' \cdot x > \sigma_C(p')$ et donc $x \notin C'$.

8. Raisonnons en plusieurs étapes.

Étape 1 Supposons tout d'abord que $x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{A}$. Alors, en notant que $\overline{A}$ reste convexe (puisque si $x, y \in \overline{A}$ et $t \in [0,1]$ alors il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ de limites x et y et ainsi $(1-t)x + ty = \lim\limits_{n\to\infty}((1-t)x_n + ty_n) \in \overline{A}$), la question 6 montre qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall y \in \overline{A} \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y - \varepsilon$$

(comme $\{x\}$ est un convexe compact et $\overline{A}$ un convexe fermé disjoint de $\{x\}$). Comme $\varepsilon \neq 0$, on a en fait $p \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ et, puisque $A \subset \overline{A}$,

$$\forall y \in A \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y.$$

Notons également que, quitte à remplacer p par $p / \|p\|$, on peut supposer que p appartient à la sphère euclidienne unité S de $\mathbb{R}^d$, partie compacte de $\mathbb{R}^d$.

Dans la suite, on supposera que A n'est pas fermé (la preuve est complète sinon).

Étape 2 Montrons ensuite le résultat pour $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ si $\mathring{A} \neq \varnothing$. Débutons par le

Lemme 2. *Soit $x \in \mathring{A}$ et $y \in \overline{A}$. Alors $[x, y[\subset \mathring{A}$.*
Démonstration. Soit $z \in [x, y[$. Notons $t \in [0,1[$ tel que $z = (1-t)x + ty$ ainsi que $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x, r)$ soit incluse dans A.
Soit maintenant $\epsilon > 0$ à fixer ultérieurement. Puisque $y \in \overline{A}$, on a d'abord $y \in A + B_o(0, \epsilon)$ et ainsi, par convexité de $B_o(0, \epsilon)$,

$$B_o(z, \epsilon) = (1-t)x + ty + B_o(0, \epsilon) \subset (1-t)x + t(A + B_o(0, \epsilon)) + B_o(0, \epsilon) \subset (1-t)B_o\left(x, \frac{1+t}{1-t}\epsilon\right) + tA \subset A$$

pourvu que $\dfrac{1+t}{1-t}\epsilon \leqslant r$ et par convexité de A. La preuve est complète. $\square$
On en déduit aussi le
Lemme 3. *Si $\mathring{A} \neq \varnothing$, $\mathring{\overline{A}} \subset \mathring{A}$.*
Démonstration. Fixons $x \in \mathring{A}$ ainsi que $y \in \mathring{\overline{A}}$. Pour $t \in [0,1[$, définissons $x_t \in \mathbb{R}^d$ tel que $y = (1-t)x_t + tx$. Comme $x_t = \dfrac{y - tx}{1-t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} y \in \mathring{\overline{A}}$, il existe $t > 0$ tel que $x_t \in \overline{A}$ et donc $y \in [x, x_t[\subset \mathring{A}$ selon le lemme 1. $\square$
Notons alors que $\mathbb{R}^d \backslash \overline{A}$ est dense dans $\mathbb{R}^d \backslash A$. Soit en effet $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$. On a aussi $x \notin \mathring{A}$ donc $x \notin \mathring{\overline{A}}$ (d'après le lemme 2) de sorte que, pour tout $\epsilon > 0$, la boule $B_o(x, \epsilon)$ n'est pas incluse dans $\overline{A}$ c'est–à–dire que $B_o(x, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^d \backslash \overline{A}) \neq \varnothing$.
On peut alors conclure par compacité de la sphère S. La densité précédente montre qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^d \backslash \overline{A}$ ainsi que, d'après la première étape, une suite (p_n) d'éléments de S telles que

$$\forall n \quad \forall y \in A \quad p_n \cdot x \leqslant p_n \cdot y.$$

La compacité de S fournit par ailleurs une extractrice ϕ et un élément $p \in S$ tel que $p_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ et donc par passage à la limite dans les inégalités larges précédentes

$$p \cdot x \leqslant p \cdot y$$

pour tout $y \in A$ fixé.

Étape 3 Montrons finalement que l'on peut se ramener à la situation où $\mathring{A} \neq \varnothing$.
Tout d'abord, quitte à considérer le convexe $A - a$ avec a un élément fixé de A, on peut supposer que $0 \in A$ (la condition $p \cdot x \leqslant p \cdot y$ pour tout $y \in A$ est équivalente à $p \cdot (x - a) \leqslant p \cdot (y - a)$ pour tout $y \in A$).

Lemme 4. *Supposons que $0 \in A$. Alors l'espace euclidien $E = \mathrm{Vect}(A)$ est de dimension non nulle et, dans l'espace vectoriel normé E, $\mathring{A} \neq \varnothing$.*

Démonstration. Puisque $E \neq \{0\}$ (car A, non fermé, n'est pas réduit à $\{0\}$), on a d'abord $d := \dim(E) \geqslant 1$. De plus, le théorème de la base incomplète appliqué à la famille génératrice A fournit une base de E de la forme $\mathcal{A} = (a_1, \cdots, a_d)$ avec $a_i \in A$ pour $i = 1, \cdots, d$.

Posons $x=\dfrac{0+a_1+\cdots+a_d}{d+1}$. Par convexité de A, on a $x\in A$ et, pour la norme infinie associée à la base $\mathcal{A}$, $B_o\left(x,\dfrac{1}{d(d+1)}\right)\subset A$.

En effet, si $y\in B_o\left(x,\dfrac{1}{d(d+1)}\right)$ alors il existe $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant d}\in\left]-\dfrac{1}{d(d+1)},\dfrac{1}{d(d+1)}\right[^d$ tel que

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{d+1}0+\left(\frac{1}{d+1}+z_1\right)a_1+\cdots+\left(\frac{1}{d+1}+z_d\right)a_d \\ &= \left(\frac{1}{d+1}-(z_1+\cdots+z_d)\right)0+\left(\frac{1}{d+1}+z_1\right)a_1+\cdots+\left(\frac{1}{d+1}+z_d\right)a_d\in A \end{aligned}$$

puisque $\dfrac{1}{d+1}-(z_1+\cdots+z_d)\geqslant\dfrac{1}{d+1}-d\dfrac{1}{d(d+1)}=0$, $\dfrac{1}{d+1}+z_i\geqslant\dfrac{1}{d+1}-\dfrac{1}{d(d+1)}\geqslant 0$ pour tout $i\in\{1,\cdots,d\}$ et

$$\left(\frac{1}{d+1}-(z_1+\cdots+z_d)\right)+\left(\frac{1}{d+1}+z_1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{d+1}+z_d\right)=1.$$

La preuve est complète. $\square$

Considérons enfin le sous-espace E de $\mathbb{R}^d$ du lemme précédent. D'après l'étape 2 (immédiatement adaptée au cas de l'espace euclidien E de dimension non nulle), il existe $p\in E\backslash\{0\}$ tel que

$$\forall y\in A\quad p\cdot x\leqslant p\cdot y,$$

ce qui conclut (car $p\in\mathbb{R}^d$).

Partie II : Points extrémaux

Cas particuliers

9. (a) Procédons par récurrence sur I.
Le résultat est immédiat si $I=1$. De plus, si le résultat est supposé vrai à un certain rang I, que $x_1,\cdots,x_{I+1}\in A$ et que $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{I+1})\in\mathbb{R}_+^{I+1}$ vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^{I+1}\lambda_i=1$ alors
— $\displaystyle\sum_{i=1}^{I+1}\lambda_i x_i=x_{I+1}\in A$ si $\lambda_{I+1}=1$,
— sinon alors, avec $\Lambda:=1-\lambda_{I+1}>0$,

$$\sum_{i=1}^{I+1}\lambda_i x_i=\Lambda\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{\lambda_i}{\Lambda}x_i\right)+(1-\Lambda)x_{I+1}\in A$$

puisque, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{i=1}^{I}\frac{\lambda_i}{\Lambda}x_i\in A$$

comme les $\frac{\lambda_i}{\Lambda}$ $(1\leqslant i\leqslant I)$ sont positifs et de somme égale à $\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\frac{\lambda_i}{\Lambda}=\Lambda/\Lambda=1$.

La preuve est complète.

(b) On peut procéder par récurrence sur le cardinal de $E=\{i\in\{1,\cdots,I\}:\lambda_i>0\}$.
Le résultat est évident si $\#(E)=1$ (car alors $x=x_i$ avec i l'unique élément de E). Supposons maintenant le résultat vrai lorsque $\#(E)=n$ et montrons–le lorsque $\#(E)=n+1$ pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$ fixé.
Pour $i_0\in E$ et $\Lambda=1-\lambda_{i_0}>0$, on a alors (puisque $\lambda_{i_0}\neq 1$ comme $\#(E)\neq 1$)

$$x=(1-\Lambda)x_{i_0}+\Lambda\left(\sum_{i\in E\backslash\{i_0\}}\frac{\lambda_i}{\Lambda}x_i\right).$$

Puisque (d'après (a)) $\displaystyle\sum_{i\in E\backslash\{i_0\}}\frac{\lambda_i}{\Lambda}x_i\in A$, l'hypothèse d'extrémalité de x fournit alors

$$x_{i_0}=x\quad\text{et}\quad\sum_{i\in E\backslash\{i_0\}}\frac{\lambda_i}{\Lambda}x_i=x,$$

comme $\Lambda < 1$ (car0 $\lambda_{i_0} \neq 0$). L'hypothèse de récurrence montre alors que $x_i = x$ pour tout $i \in E \backslash \{i_0\}$; on a donc bien démontré $x_i = x$ pour tout $i \in E$.

Le principe de récurrence conclut.

10. Montrons d'abord que $\mathrm{co}(E)$ est un convexe contenant E. Soient $x, y \in \mathrm{co}(E)$ ainsi que $t \in [0,1]$. Par définition, il existe deux familles $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant I}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant J}$ d'éléments de E ainsi que deux familles $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant I}$ et $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant J}$ de réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$ et $\sum\limits_{j=1}^{J} \mu_j = 1$ vérifiant

$$x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{J} \mu_j y_j.$$

On a alors

$$(1-t)x + ty = \sum_{k=1}^{I+J} \nu_k z_k$$

avec, pour tout $k \in \{1, \cdots, I+J\}$,

$$\nu_k = \begin{cases} (1-t)\lambda_k & \text{si } k \leqslant I, \\ t\mu_{k-I} & \text{si } k > I, \end{cases} \quad \text{et} \quad z_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k \leqslant I, \\ y_{k-I} & \text{si } k > I. \end{cases}$$

Comme les z_k appartiennent à E et que les ν_k appartiennent à $\mathbb{R}_+$, on a bien $(1-t)x + ty \in \mathrm{co}(E)$ puisque de plus

$$\sum_{k=1}^{I+J} \nu_k = (1-t)\sum_{i=1}^{I} \lambda_i + t\sum_{j=1}^{J} \mu_j = 1.$$

Puisque tout élément x de E s'écrit sous la forme $x = \sum\limits_{i=1}^{1} 1x$, on a par ailleurs bien $E \subset \mathrm{co}(E)$.

Montrons maintenant que $\mathrm{co}(E)$ est le plus petit convexe contenant E.

Soit A une partie convexe contenant E. Alors, d'après la question 9.(a),

$$\forall I \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant I} \in E^I \quad \forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant I} \in \mathbb{R}_+^I \quad \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i \in A$$

de sorte que (par définition de l'enveloppe convexe) $\mathrm{co}(E) \subset A$.

Comme $\mathrm{co}(E)$ est une partie convexe contenant E, il s'agit bien de la plus petite partie vérifiant cette propriété.

Enfin, vérifions que $\mathrm{Ext}\,(\mathrm{co}(E)) \subset E$. Soit x un point extrémal du convexe $A := \mathrm{co}(E)$. Par définition, il existe une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant I}$ d'éléments de E ainsi qu'une famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant I}$ de réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$ vérifiant

$$x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i.$$

Comme il existe $i \in \{1, \cdots, I\}$ tel que $\lambda_i > 0$ (puisque $\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i \neq 0$), la question 9.(b) montre qu'il existe $i \in \{1, \cdots, I\}$ tel que $x = x_i \in E$.

11. Montrons d'abord que $x := (1 + \cos(\theta), \sin(\theta), 0) \in \mathrm{Ext}(A)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$ fixé.

Soient donc $\lambda \in]0,1[$ et $y = (y', y_3), z = (z', z_3) \in A$ (avec $y', z' \in \mathbb{R}^2$) tels que $x = (1-\lambda)y + \lambda z$.

Projetant sur les deux premières coordonnées et puisque $(0,0) = (1 + \cos(\pi), \sin(\pi))$, on voit que $y', z' \in \mathrm{co}\left(\{(1 + \cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi]\}\right) = \mathrm{co}\left(\left\{1 + e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\right\}\right)$, en identifiant aussi $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Puisque le disque fermé $D_f(1,1)$ est une partie convexe contenant l'ensemble des $1 + e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, on a $y', z' \in D_f(1,1)$ et il existe $r_1, r_2 \in [0,1]$ ainsi que $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ tels que

$$y' = 1 + r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad z' = 1 + r_2 e^{i\theta_2}.$$

Puisque $1 + e^{i\theta} = (1-\lambda)y' + \lambda z'$, on a également $e^{i\theta} = (1-\lambda)r_1 e^{i\theta_1} + \lambda r_2 e^{i\theta_2}$ et donc, par inégalité triangulaire, $1 \leqslant (1-\lambda)r_1 + \lambda r_2 \leqslant (1-\lambda) + \lambda = 1$ puis (comme $\lambda, 1-\lambda > 0$) $r_1 = r_2 = 1$.

On obtient ainsi $e^{i\theta} = (1-\lambda)e^{i\theta_1} + \lambda e^{i\theta_2}$ donc

$$1 = (1-\lambda)e^{i(\theta_1 - \theta)} + \lambda e^{i(\theta_2 - \theta)} \quad \text{puis} \quad 1 = (1-\lambda)\cos(\theta_1 - \theta) + \lambda \cos(\theta_2 - \theta)$$

et, de même que précédemment, $\cos(\theta_1 - \theta) = 1 = \cos(\theta_2 - \theta)$. Ainsi $\theta_1 = \theta = \theta_2 [2\pi]$ et donc $y = (1 + \cos(\theta), \sin(\theta), y_3)$ et $z = (1 + \cos(\theta), \sin(\theta), z_3)$.

Pour conclure, montrons que, pour $t_3 \in [-1,1]$, $t := (1+\cos(\theta), \sin(\theta), t_3)$ appartient à A seulement si $t_3 = 0$. Puisque $t \in A$ et que $\operatorname{co}\{(1+\cos(\theta), \sin(\theta), 0) : \theta \in [0, 2\pi]\} \subset \{(1 + r\cos(\phi), r\sin(\phi), 0) : r \in [0,1], \phi \in [0, 2\pi]\}$ (par convexité de cette dernière partie, égale au disque unité de centre $(1,0,0)$ du plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$), l'associativité du barycentre montre qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ainsi que $r \in [0,1]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$ tels que

$$t = \alpha(1 + r\cos(\phi), r\sin(\phi), 0) + \beta(0,0,1) + \gamma(0,0,-1). \tag{2}$$

En projetant sur les deux premières coordonnées, on a encore

$$1 + e^{i\theta} = \alpha(1 + re^{i\phi}). \tag{3}$$

puis, puisque $r \in [0,1]$,

$$1 = \left|-e^{i\theta}\right| = \left|1 - \alpha + \alpha r e^{i(\phi+\pi)}\right| \leqslant |1-\alpha| + \underbrace{\left|\alpha r e^{i(\phi+\pi)}\right|}_{=\alpha r} \leqslant (1-\alpha) + \alpha = 1.$$

En notant que $\alpha \neq 0$ (puisque $1 + e^{i\theta} \neq 0$), on déduit que $r = 1$ et, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire et dans le cas où $\alpha \neq 1$, $e^{i(\phi+\pi)} \in \mathbb{R}_+$ i.e. $\phi = \pi[2\pi]$, contradiction avec $1 + e^{i\theta} \neq 0$ d'après (3). On a donc nécessairement $\alpha = 1$ et ainsi $t_3 = 0$ d'après (2).
L'application du fait ainsi démontré à y et z montre alors que $y = x = z$; x est bien un point extrémal de A.
Il suffit enfin de noter que $0_{\mathbb{R}^3} = \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{2}(0,0,-1)$ n'est pas un point extrémal de A pour conclure que $\operatorname{Ext}(A)$ n'est pas fermé (car $(1+\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \xrightarrow[\theta \to \pi^-]{} 0_{\mathbb{R}^3}$).

Remarque. D'après la question précédente, on a également $\operatorname{Ext}(A) \subset E$ puis $\operatorname{Ext}(A) = E \backslash \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ d'après ce qui précède. On retrouve le fait que $\operatorname{Ext}(A)$ n'est pas fermé.

12. Tout d'abord, $A = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \left\{x \in \mathbb{R}^d : p_i \cdot x \leqslant b_i\right\}$ est convexe et fermé en tant qu'intersection de tels ensembles (images réciproques du convexe fermé $]-\infty, b_i]$ par l'application $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \mid x \longmapsto p_i \cdot x$ linéaire donc continue, puisque $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie). Montrons ensuite l'équivalence (pour $x \in A$)

$$\boxed{x \in \operatorname{Ext}(A) \Longleftrightarrow \operatorname{rang}\left(\{p_i : i \in I(x)\}\right) = d.}$$

($\Leftarrow$) Soit $x \notin \operatorname{Ext}(A)$. Il existe alors $\lambda \in]0,1[$ et $y, z \in A$ tels que $y \neq z$ et $x = (1-\lambda)y + \lambda z$.
Pour $i \in I(x)$, on obtient alors

$$b_i = p_i \cdot x = (1-\lambda) p_i \cdot y + \lambda p_i \cdot z$$

donc, puisque $p_i \cdot y \leqslant b_i$ et $p_i \cdot z \leqslant b_i$ (car $y, z \in A$),

$$(1-\lambda)p_i \cdot y = (1-\lambda)b_i \quad \text{et} \quad \lambda p_i \cdot z = \lambda b_i \quad \text{donc} \quad p_i \cdot y = b_i = p_i \cdot z.$$

En particulier, on a $z - y \notin \operatorname{Vect}\left(\{b_i : i \in I(x)\}\right)$ (sinon $(z-y)\cdot(z-y)$ serait nul, comme les $p_i \cdot (z-y)$) et, puisque $z - y$ est non nul,

$$\operatorname{rang}\left(\{p_i : i \in I(x)\}\right) = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\{p_i : i \in I(x)\}\right)\right) \neq d.$$

($\Rightarrow$) Supposons que $\operatorname{rang}\left(\{p_i : i \in I(x)\}\right) \neq d$ de sorte qu'il existe $h \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ tel que $p_i \cdot h = 0$ pour tout $i \in I(x)$ (le sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ engendré par les p_i, $i \in I(x)$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$). Alors, il existe $t > 0$ tel que, pour tout $i \in \{1, \cdots, k\} \backslash I(x)$, $t\,|p_i \cdot h| \leqslant b_i - p_i \cdot x$ (il suffit par exemple de prendre le minimum des réels $t_i > 0$ tels que $t_i\,|p_i \cdot h| \leqslant b_i - p_i \cdot x$, réels dont l'existence est garantie par l'inégalité $b_i - p_i \cdot x > 0$).
On a alors $x \pm th \in A$ puisque

$$\forall i \in I(x) \quad p_i \cdot (x \pm th) = p_i \cdot x \pm t(p_i \cdot h) = p_i \cdot x = b_i$$

et, par choix de t,

$$\forall i \in \{1, \cdots, k\} \backslash I(x) \quad p_i \cdot (x \pm th) = p_i \cdot x \pm t(p_i \cdot h) \leqslant b_i.$$

Ainsi $x = \frac{1}{2}(x + th) + \frac{1}{2}(x - th)$ n'est pas extrémal (puisque $x + th \neq x - th$).

On en déduit maintenant que $\operatorname{Ext}(A)$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à 2^k. Soit $x \in \operatorname{Ext}(A)$. D'après l'équivalence précédente, il existe une partie $I = I(x)$ de $\{1, \cdots, k\}$ telle que $(p_i)_{i \in I}$ est une base de $\mathbb{R}^d$ et (par définition de $I(x)$) $p_i \cdot x = b_i$ pour tout $i \in I$.
Vérifions alors que l'application $\operatorname{Ext}(A) \to \mathcal{P}(\{1, \cdots, k\}) \mid x \mapsto I(x)$ est injective.

Soient $x, y \in \operatorname{Ext}(A)$ tels que $I(x)$ et $I(y)$ sont égaux à une certaine partie I. La famille $(p_i)_{i\in I}$ est alors une base de $\mathbb{R}^d$ et

$$\forall i \in I \quad p_i \cdot x = b_i = p_i \cdot y,$$

de sorte que $x - y$ est orthogonal à $\operatorname{Vect}((p_i)_{i\in I}) = \mathbb{R}^d$ et donc nul.

L'ensemble $\operatorname{Ext}(A)$ est bien de cardinal inférieur à $2^k = \#(\mathcal{P}(\{1, \cdots, k\}))$.

Remarque. Comme l'application précédente est même à valeurs dans l'ensemble des parties à d éléments de $\{1, \cdots, k\}$, on a également $\#(\operatorname{Ext}(A)) \leqslant \binom{k}{d}$.

Cas d'un convexe fermé borné

13. Par continuité de l'application linéaire $y \mapsto p \cdot y$ sur l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$ et donc sur le compact K, le théorème des bornes atteintes fournit $x \in K$ tel que

$$\forall y \in K \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y.$$

Ainsi K_p est non vide (il contient x).

On a par ailleurs

$$K_p = K \cap \bigcap_{y\in K} \left\{x \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \leqslant p \cdot y\right\}$$

et donc, comme à la question 12, K_p est une partie convexe et fermée (intersection d'images réciproques par une application linéaire continue de convexes fermés).

<u>Montrons finalement l'inclusion $\operatorname{Ext}(K_p) \subset \operatorname{Ext}(K)$.</u>

Soit x un élément de $\mathbb{R}^d$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ext}(K)$. Il existe donc $\lambda \in]0,1[$ et $x_1 \neq x_2$ appartenant à K tels que $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$.

Si x n'appartient pas à K_p, on a d'abord évidemment $x \notin \operatorname{Ext}(K_p)$.

Si maintenant x appartient à K_p alors

$$\forall y \in K \quad (1-\lambda)p \cdot x_1 + \lambda p \cdot x_2 = p \cdot x \leqslant p \cdot y$$

et donc, en choisissant y sous la forme $(1-\lambda)x_1 + \lambda z \in K$ (avec $z \in K$), on obtient

$$\forall z \in K \quad p \cdot x_2 \leqslant p \cdot z$$

puisque $\lambda > 0$. De même, en choisissant y sous la forme $(1-\lambda)z + \lambda x_2 \in K$ (avec $z \in K$), on obtient

$$\forall z \in K \quad p \cdot x_1 \leqslant p \cdot z,$$

ce qui montre que $x_1, x_2 \in K_p$. Comme $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ avec $\lambda \in]0,1[$, on a donc bien montré que (dans tous les cas) $x \notin \operatorname{Ext}(K_p)$.

14. Procédons plutôt par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ pour montrer l'énoncé suivant :

   « dans tout espace euclidien E de dimension d, on a $\operatorname{Ext}(K) \neq \varnothing$ si K est un convexe compact non vide de E ».

   — Le résultat est immédiat si $d = 0$ (tout convexe compact K non vide d'un espace de dimension 0 est de la forme $\{0\}$ et 0, seul point de $E = K$ est évidemment extrémal).

   — Supposons désormais le résultat acquis à un rang $d-1$ pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$ et montrons–le au rang d. Soit K un convexe compact non vide d'un espace euclidien E de dimension d.

   Il suffit, d'après la question précédente (immédiatement adaptée au cas d'un espace euclidien de dimension d), de montrer que $\operatorname{Ext}(K_p)$ est non vide pour un certain $p \neq 0$ fixé de E.

   Pour x_0 un élément fixé de K_p (qui existe d'après la question précédente), observons que $K_p \subset x_0 + p^\perp$ (pour $x \in K_p$, on a en effet $p \cdot x_0 = \min_{y\in K}(p \cdot y) = p \cdot x$ et donc $p \cdot (x - x_0) = 0$).

   La partie $K_p - x_0$ est alors convexe (évident d'après le début de la question 5), compact (car K_p est une partie fermée du compact K) et non vide (il contient $0 = x_0 - x_0$). Puisque $p^\perp$ est un espace euclidien de dimension $d-1$, l'hypothèse de récurrence montre que $\operatorname{Ext}(K_p - x_0)$ est non vide et donc $\operatorname{Ext}(K_p) \neq \varnothing$ (car si y est un point extrémal de $K_p - x_0$, une contraposée montre immédiatement que $y + x_0$ est un point extrémal de K_p).

15. On remarque d'abord que, puisque $\operatorname{Ext}(K) \subset K$, le plus petit convexe contenant $\operatorname{Ext}(K)$ est inclus dans K et donc, selon la question 10, $\operatorname{co}(\operatorname{Ext}(K)) \subset K$.

   Procédons ensuite par récurrence pour démontrer l'énoncé suivant :

   « dans tout espace euclidien E de dimension d, on a $K \subset \operatorname{co}(\operatorname{Ext}(K))$ si K est un convexe compact non vide de E ».

— Le résultat est immédiat si $d = 0$ (le seul compact convexe non vide de $\{0\}$ est $K = \{0\}$, évidemment égal à l'enveloppe convexe de $\{0\} = \mathrm{Ext}(K)$).

— Supposons le résultat acquis à un certain rang $d-1$ pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$ et montrons–le au rang d. Soit donc K un convexe compact d'intérieur non vide d'un espace euclidien E de dimension d.

Tout d'abord, quitte à considérer $x_0 \in K$ et le compact convexe non vide $K - x_0$, on peut toujours supposer que $0 \in K$ (car l'ensemble des points extrémaux de $K - x_0$ est inclus dans $\mathrm{Ext}(K) - x_0$). Dans ce cas, on peut également supposer que $\mathrm{Vect}(K) = E$ (puisque sinon $\mathrm{Vect}(K)$ donc K seraient inclus dans un hyperplan de E et l'hypothèse de récurrence s'appliquerait).

D'après le lemme 4 précédent, $\mathring{K}$ est alors non vide et, d'après le lemme 2 précédent, $\overline{\mathring{K}} \supset K$ (pour $x \in \mathring{K}$, tout élément y de K appartient à l'adhérence de $[x, y[\subset \mathring{K}$).

Soit maintenant $x \in K$. Montrons pour le moment que $x \in \mathrm{co}\,(\mathrm{Ext}(K))$ si $x \in \partial K$.

Sous cette hypothèse, on a $x \notin \mathring{K}$ et la question 8 fournit $p \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ tel que

$$\forall y \in \mathring{K} \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y$$

et donc, par densité de $\mathring{K}$ dans K et continuité de l'application linéaire $E \to \mathbb{R} \mid y \mapsto p \cdot y$,

$$\forall y \in K \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y.$$

On a donc $x \in K_p$. Puisque (comme à la question précédente) $K_p - x_0$ est un convexe compact inclus dans $p^{\perp}$, l'hypothèse de récurrence montre que $x \in \mathrm{co}\,(\mathrm{Ext}(K_p)) \subset \mathrm{co}\,(\mathrm{Ext}(K))$ puisque $\mathrm{Ext}(K_p) \subset \mathrm{Ext}(K)$ (question 13).

Montrons maintenant que $x \in \mathrm{co}\,(\mathrm{Ext}(K))$ dans le cas général.

Pour x_1 un élément fixé de $\mathrm{Ext}(K)$ (dont l'existence est garantie par la question 13) supposé de plus distinct de x (il n'y a rien à démontrer sinon), considérons l'intersection de la demi-droite $[x_1, x)$ avec K. Fait : cette intersection contient un point $x_2 \in \partial K$ tel que $x \in [x_1, x_2]$.

En effet, considérons

$$\alpha = \sup \{t \in \mathbb{R}_+ : (1-t)x_1 + tx \in K\}.$$

Il s'agit d'un réel supérieur ou égal à 1 (l'ensemble contient 1 et est majoré par $\sup\limits_{y \in K} \frac{\|y - x_1\|}{\|x - x_1\|}$, quantité définie par compacité de K). Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe de plus une suite de terme général t_n ($n \in \mathbb{N}$) convergeant vers α telle que $(1-t_n)x_1 + t_n x \in K$ et donc

$$x_2 := (1-\alpha)x_1 + \alpha x = \lim_{n \to \infty} ((1-t_n)x_1 + t_n x) \in \overline{K} = K.$$

Comme $\alpha \geqslant 1$, on a ensuite

$$x = (1-\alpha^{-1})x_1 + \alpha^{-1}x_2 \in [x_1, x_2].$$

De plus, si $x_2 \in \mathring{K}$, alors il existerait $\epsilon > 0$ tel que (la boule fermée) $B_f(x_2, \epsilon) \subset K$ et donc avec $\alpha' = \alpha + \dfrac{\epsilon}{\|x - x_1\|} > \alpha$, nous aurions la contradiction

$$(1-\alpha')x_1 + \alpha' x = x_2 + \epsilon \frac{x - x_1}{\|x - x_1\|} \in K.$$

On a donc bien $x_2 \in \partial K$, ce qui conlut la preuve du fait énoncé ci–dessus.

Finalement, d'après le premier cas, $x_1, x_2 \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$ et donc, par convexité de $\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$,

$$x \in [x_1, x_2] \subset \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K)).$$

La preuve est complète.

Remarques.

- On a en fait $\mathrm{Ext}(K) \subset \partial K$ (démonstration laissée à titre d'exercice), ce qui permet de mieux comprendre le rôle géométrique des points x_1 et x_2 ci–dessus.
- Le résultat démontré ici est connu comme le théorème de Krein-Milmann-Minkowski.

Partie III. Un résultat de dualité

Cônes convexes

16. Comme aux questions 12 et 13, E^+ et E^{++} sont d'abord des convexes fermés (intersections d'images réciproques de fermés convexes par des applications linéaires continues).
De plus, si $p \in E^+, \xi \in E^{++}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ alors

$$\forall x \in E \quad p \cdot x \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad (\lambda p) \cdot x = \lambda(p \cdot x) \geqslant 0$$

et

$$\forall q \in E^+ \quad \xi \cdot q \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad (\lambda \xi) \cdot q = \lambda(\xi \cdot q) \geqslant 0.$$

Ainsi, $\lambda E^+ \subset E^+$ et $\lambda E^{++} \subset E^{++}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$; $\underline{E^+ \text{ et } E^{++} \text{ sont donc bien des cônes convexes fermés}}$.
Enfin, si $x \in E$ alors (par définition de E^+)

$$\forall p \in E^+ \quad x \cdot p = p \cdot x \geqslant 0$$

et donc $x \in E^{++}$. On a bien montré $E \subset E^{++}$.

17. Procédons de nouveau par double–implication.
   ($\Rightarrow$) Si $E = E^{++}$ alors E est immédiatement un cône convexe fermé d'après la question précédente (puisque E^{++} en est un).
   ($\Leftarrow$) Supposons que E est un cône convexe fermé.
   D'après la question précédente, il suffit de montrer que $E^{++} \subset E$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in E^{++} \backslash E$.
   Alors, d'après la question 6 (appliquée au compact convexe non-vide $\{x\}$ et au convexe fermé non-vide E), il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tel que

   $$\forall y \in E \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y - \varepsilon. \tag{4}$$

   Comme $0 \in E$ (car $0E \subset E$ par hypothèse), on obtient en particulier $p \cdot x \leqslant -\varepsilon < 0$ et donc, puisque $x \in E^{++}$, $p \notin E^+$.
   Par définition, il existe alors $x' \in E$ tel que $p \cdot x' < 0$ et donc, d'après (4) (et puisque $\lambda E \subset E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$),

   $$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad p \cdot x \leqslant \lambda(p \cdot x') - \varepsilon;$$

   contradiction lorsque λ tend vers $+\infty$ (puisque $p \cdot x' < 0$). La preuve est complète.

   Remarque. On pouvait également utiliser la question 7 pour montrer directement que $E = (E^+)^+$. En effet, le fermé convexe $-E$ est aussi l'intersection, pour $p \in \mathbb{R}^d$, des ensembles des $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $p \cdot x \leqslant \sigma_{-E}(p)$, quantité valant en fait 0 si $p \in E^+$ ou $+\infty$ si $p \notin E^+$.

18. Il est tout d'abord aisé de vérifier que F est un cône convexe.
Appelons ensuite *cône à faces* d'un espace euclidien E tout ensemble de la forme $F = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i : \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+ \right\}$ pour certains $k \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \cdots, \xi_k \in E$ [1].
<u>Montrons que tout cône à faces est fermé</u> par récurrence sur la dimension d de E.
   — Le résultat est immédiatement vrai si $d = 0$ puisque l'unique possibilité à traiter est le cas $F = \{0\} = E$.
   — Soit maintenant $d \geqslant 1$ tel que le résultat est vrai au rang $d-1$; montrons le résultat au rang d. Soit donc E un espace euclidien de dimension d ainsi que F un cône à faces de E, de la forme $F = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i : \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+ \right\}$ pour certains $k \in \mathbb{N}^*$, $\xi_1, \cdots, \xi_k \in E$ (F est trivialement fermé dans le cas $k = 0$).
   Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \overline{F} \backslash F$. La question 8, appliquée au convexe non vide F (on a $0 \in F$) et immédiatement adaptée au cas d'un espace euclidien, fournit $p \in E \backslash \{0\}$ tel que

   $$\forall y \in F \quad p \cdot x \leqslant p \cdot y$$

   soit encore

   $$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+ \quad p \cdot x \leqslant \lambda_1 p \cdot \xi_1 + \cdots + \lambda_k p \cdot \xi_k.$$

   On en déduit en particulier (en prenant tous les λ_i nuls) $\underline{p \cdot x \leqslant 0}$ et (en prenant tous les λ_j nuls sauf un)

   $$\forall i \in \{1, \cdots, k\} \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R}_+^* \quad \lambda_i^{-1}(p \cdot x) \leqslant p \cdot \xi_i$$

   d'où, par passage à la limite lorsque λ_i tend vers $+\infty$, $0 \leqslant p \cdot \xi_i$ pour $i = 1, \cdots, k$ puis immédiatement

   $$\forall y \in F \quad p \cdot y \geqslant 0.$$

1. En convenant que $F = \{0\}$ si $k = 0$.

On en déduit encore, par continuité de l'application linéaire $E \to \mathbb{R} \mid y \longmapsto p \cdot y$ et comme $x \in \overline{F}$, $p \cdot x \geqslant 0$ et donc $\boxed{p \cdot x = 0}$.
Notons encore que, par positivité des $p \cdot \xi_i$,

$$p^\perp \cap F = \left\{ \sum_{i:\ p\cdot\xi_i=0} \lambda_i \xi_i : \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \right\},$$

et que $x \in p^\perp \cap \overline{F} = \overline{p^\perp \cap F}$ (puisque $p^\perp$ est fermé, comme noyau de l'application linéaire $E \to \mathbb{R} \mid y \longmapsto p \cdot y$).
L'hypothèse de récurrence appliquée à l'espace euclidien $p^\perp$ et au cône à faces $p^\perp \cap F$ entraîne alors $x \in p^\perp \cap F \subset F$, absurde par construction de x. La preuve par récurrence est complète.
Tout cône à faces d'un espace euclidien est donc fermé, ainsi que l'ensemble F de l'énoncé.

Remarque. Sans utiliser les questions précédentes, on pouvait également démontrer que (l'ensemble de l'énoncé) F est fermé par récurrence sur k, en supposant d'abord que ξ_k n'est combinaison linéaire à coefficients positifs des $\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}$.

Montrons finalement l'équivalence de l'énoncé.
Notons d'abord que, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \xi_i \cdot x \geqslant 0 \Longrightarrow \xi \cdot x \geqslant 0$$

signifie exactement (comme F est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des ξ_i) que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad (\forall p \in F \quad p \cdot x \geqslant 0) \Longrightarrow \xi \cdot x \geqslant 0$$

soit encore que $\xi \cdot x \geqslant 0$ pour tout $x \in F^+$ ou finalement que $\xi \in F^{++}$. L'équivalence demandée découle donc immédiatement de la question précédente (on a $F = F^{++}$ puisque F est un cône convexe fermé).

Programmation linéaire

19. Notons d'abord que, même avec les conventions de l'énoncé, α et β ne sont pas clairement définis.
En effet, les ensembles $A := \{p \cdot x : x \in \mathbb{R}^d, x \geqslant 0, Mx \leqslant b\}$ et $B := \{b \cdot q : q \in \mathbb{R}^k, q \leqslant 0, M^T q \leqslant p\}$ peuvent *a priori* ne pas être minoré et majoré respectivement (pour A si $M = 0$, $b \geqslant 0$ et $p \not\geqslant 0$; pour B si $M = 0$, $p \geqslant 0$ et $b \not\geqslant 0$). Convenons dans ces cas que $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$.
Montrons que tout élément de A est supérieur à tout élément de B. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \geqslant 0$ et $Mx \leqslant b$ ainsi que $q \in \mathbb{R}^k$ tel que $q \leqslant 0$ et $M^T q \leqslant p$. Alors, au vu de l'expression explicite du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$ et en identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$,

$$p \cdot x \geqslant (M^T q) \cdot x = \left(M^T q\right)^T x = q^T M x = q \cdot (Mx) \geqslant q \cdot b$$

puisque $x \geqslant 0$ et $q \leqslant 0$. L'affirmation précédente est donc démontrée.
Ainsi $\alpha = \inf(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est supérieur à tout (éventuel) élément de B par passage à l'infimum (même dans le cas où A est vide ou non minorée) puis, par passage à la borne supérieure,

$$\beta = \sup(B) \leqslant \alpha,$$

même dans les cas où $B = \varnothing$ ou n'est pas majorée.

20. (a) Soit donc $z \in \mathbb{R}^d$ tel que $z_j \geqslant 0$ pour tout $j \in J$ et $M_i \cdot z \leqslant 0$ pour tout $i \in I$.
Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{x} + \varepsilon z \geqslant 0$ et $M(\overline{x} + \varepsilon z) \leqslant b$.
D'une part, on a d'abord $\overline{x}_j + \varepsilon z_j = \varepsilon z_j \geqslant 0$ pour tout $j \in J$ si $\varepsilon > 0$. De plus, si $j \in \{1, \cdots, d\} \backslash J$ est fixé alors

$$\overline{x}_j + \varepsilon z_j \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \overline{x}_j > 0$$

donc il existe $\varepsilon_j > 0$ tel que $\overline{x}_j + \varepsilon z_j > 0$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_j]$.
D'autre part, $M_i \cdot (\overline{x} + \varepsilon z) = M_i \cdot \overline{x} + \varepsilon M_i \cdot z \leqslant M_i \cdot \overline{x} \leqslant b_i$ pour tout $i \in I$ pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $M\overline{x} \leqslant b$.
Pour $i \in \{1, \cdots, d\} \backslash I$ fixé, on a également

$$M_i \cdot (\overline{x} + \varepsilon z) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} M_i \overline{x} < b_i$$

et donc il existe $\varepsilon_i' > 0$ tel que $M_i \cdot (\overline{x} + \varepsilon z) < b_i$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_i]$.
En conclusion, le réel $\varepsilon := \min\left(\min_{i \in I} \varepsilon_i', \min_{j \in J} \varepsilon_j\right) > 0$ vérifie bien $\overline{x} + \varepsilon z \geqslant 0$ et $M(\overline{x} + \varepsilon z) \leqslant b$.
Par définition de α, on a donc

$$p \cdot (\overline{x} + \varepsilon z) \geqslant \alpha = p \cdot \overline{x}$$

puis, après simplification, $p \cdot z \geqslant 0$.

(b) Notons d'abord que, puisque $M\overline{x} \leqslant b$ et par définition de I,

$$\forall \overline{q} \in \mathbb{R}^k \quad \begin{cases} \overline{q} & \leqslant 0, \\ \overline{q} \cdot (M\overline{x} - b) & = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{q} & \leqslant 0, \\ \forall i \notin I \quad \overline{q}_i & = 0. \end{cases} \tag{5}$$

De même, puisque $\overline{x} \geqslant 0$ et par définition de J,

$$\forall \overline{q} \in \mathbb{R}^k \quad \begin{cases} M^T\overline{q} & \leqslant p, \\ (p - M^T\overline{q}) \cdot \overline{x} & = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} M^T\overline{q} & \leqslant p, \\ \forall j \notin J \quad p_j & = \left(M^T\overline{q}\right)_j, \end{cases} \tag{6}$$

en notant généralement y_k la k-ième coordonnée d'un vecteur $y \in \mathbb{R}^d$.
Considérons maintenant le cône à faces de $\mathbb{R}^d$ défini par

$$F = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i(-M_i) + \sum_{j \in J} \mu_j e_j : (\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^I \quad \text{et} \quad (\mu_j) \in \mathbb{R}_+^J \right\}$$

en notant e_j le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. La question précédente montre que $p \in F^{++}$ (puisque $p \cdot z \geqslant 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ tel que $z \cdot e_j \geqslant 0$ pour tout $j \in J$ et $z \cdot (-M_i) \geqslant 0$ pour tout $i \in I$). D'après la question 18, on a $p \in F$; il existe donc $(\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^I$ et $(\mu_j) \in \mathbb{R}_+^J$ tels que

$$p = \sum_{i \in I} (-\lambda_i) M_i + \sum_{j \in J} \mu_j e_j.$$

Posons alors $\overline{q} \in \mathbb{R}^d$ tel que $\overline{q}_i = -\lambda_i$ si $i \in I$ et $\overline{q}_i = 0$ si $i \notin \{1, \cdots, d\} \backslash I$. Le système (5) est immédiatement vérifié. De plus, par définition de p et puisque M_i est égale au i–ème vecteur colonne de M^T,

$$p \geqslant \sum_{i \in I} (-\lambda_i) M_i = M^T \overline{q}$$

tandis que, pour $j \in \{1, \cdots, d\} \backslash J$,

$$p_j = \left(\sum_{i \in I} (-\lambda_i) M_i \right)_j = \left(M^T\overline{q}\right)_j.$$

Le système (6) est donc également vérifié et $\overline{q}$ convient.

(c) D'après la question précédente et une identification déjà effectuée, on a d'une part

$$b \cdot \overline{q} = (M\overline{x}) \cdot \overline{q} = (M\overline{x})^T \overline{q} = \overline{x}^T M^T \overline{q} = \overline{x} \cdot (M^T\overline{q}) = \overline{x} \cdot p = \alpha$$

et d'autre part, comme $\overline{q} \leqslant 0$ et $M^T\overline{q} \leqslant b$,

$$b \cdot \overline{q} \leqslant \beta$$

(car $b \cdot \overline{q} \in B$). Comme par ailleurs $\alpha \geqslant \beta$ (quesion 19), on a bien démontré

$$\alpha = b \cdot \overline{q} = \beta.$$

Partie IV : Systèmes linéaires sous–déterminés

21. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y\|_\infty \leqslant 1$,

$$x \cdot y \leqslant \sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leqslant \sum_{i=1}^d |x_i| \, \|y\|_\infty \leqslant \|x\|_1.$$

Par ailleurs, en considérant la fonction signe déjà définie précédemment, le vecteur $y = (\operatorname{sgn}(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant d}$ vérifie bien $\|y\|_\infty \leqslant 1$ et

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i \times \operatorname{sgn}(x_i) = \|x\|_1.$$

On a donc bien

$$\boxed{\|x\|_1 = \max\left\{x \cdot y : y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_\infty \leqslant 1\right\}.}$$

On a également, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y\|_1 \leqslant 1$,

$$x \cdot y \leqslant \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{d} \|x\|_\infty |y_i| \leqslant \|x\|_\infty .$$

Soit également $i_0 \in \{1, \cdots, d\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$ ainsi que $y \in \mathbb{R}^d$ de coordonnées données par $y_i = \mathbb{1}_{i=i_0}\mathrm{sgn}(x_{i_0})$. Alors $\|y\|_1 = |\mathrm{sgn}(x_{i_0})| \leqslant 1$ et

$$x \cdot y = x_{i_0} \times \mathrm{sgn}(x_{i_0}) = |x_{i_0}| = \|x\|_\infty .$$

On a donc bien

$$\boxed{\|x\|_\infty = \max\left\{x \cdot y : y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_1 \leqslant 1\right\}.}$$

22. Montrons que C est non vide.
Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure (puisque r est associé à un ensemble non vide et minoré, car $\mathrm{rang}(M) = k$), il existe d'abord $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Mx_n = b \quad \text{et} \quad \|x_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} r.$$

Comme $(\|x_n\|_1)$ est convergente, cette suite est également majorée et donc (x_n) est bornée. Il existe une extractrice ϕ telle que $\left(x_{\phi(n)}\right)$ converge vers un certain $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant de plus

$$\left\|x_{\phi(n)}\right\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|_1 \quad \text{et} \quad Mx_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} Mx$$

par continuité de la norme et de l'application linéaire M. Par unicité de la limite, il existe donc un élément $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\|_1 = r$ et $Mx = b$; l'ensemble C est donc non vide.
L'ensemble C est par ailleurs immédiatement borné (pour la norme $\|\cdot\|_1$) et fermé (en tant qu'intersection des images réciproques de $\{b\}$ par l'application linéaire continue M et de $\{r\}$ par l'application continue $\|\cdot\|_1$).
Soient par ailleurs $x_1, x_2 \in C$ ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. Alors, par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$\|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\|_1 \leqslant (1-\lambda)\|x_1\|_1 + \lambda \|x_2\|_1 = r.$$

Or, puisque $M((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1-\lambda)Mx_1 + \lambda Mx_2 = b$, la définition de r implique que

$$\|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\|_1 \geqslant r$$

de sorte que l'on a bien montré que $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in C$. L'ensemble C est donc convexe.

23. Notons d'abord que $r > 0$ (puisque $\overline{x} \neq 0$ comme $M\overline{x} = b \neq 0$). Posons maintenant, pour $\rho \in [0, r[$ fixé, $A_\rho = \mathrm{Ker}(M) - B_f(0, \rho)$, la boule étant (ici et dans la suite) relative à la norme $\|\cdot\|_1$.
La question 5 nous apprend d'abord que A_ρ est convexe. Par ailleurs, $\overline{x} \in \mathbb{R}^d \backslash A_\rho$. En effet, si $\overline{x}$ appartenait à A_ρ il existerait $h \in \mathrm{Ker}(M)$ tel que $x := \overline{x} - h \in B_f(0, \rho)$ (par homogénéité de la norme) et nous aurions alors

$$Mx = M\overline{x} = b \quad \text{et} \quad \|x\|_1 < r,$$

absurde par définition de r. La question 8 fournit donc (quitte à renormaliser) $p_\rho \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|p_\rho\|_\infty = 1$ et

$$\forall y \in A_\rho \quad p_\rho \cdot \overline{x} \leqslant p_\rho \cdot y$$

donc, en particulier, pour tout $h \in \mathrm{Ker}(M)$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad p_\rho \cdot \overline{x} \leqslant \lambda(p_\rho \cdot h).$$

Faisant tendre λ vers $\pm\infty$, on obtient alors $0 \leqslant \pm(p_\rho \cdot h)$ puis, ceci étant valable pour tout $h \in \mathrm{Ker}(M)$, $p_\rho \in \mathrm{Ker}(M)^\perp$.
Posons maintenant $\rho_n = r - \frac{1}{n}$ ainsi que $p_n = p_{\rho_n}$ pour $n \geqslant 1$. La compacité de la spère unité associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ montre qu'il existe une suite extraite $\left(p_{\phi(n)}\right)$ et un élément $p \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|p\|_\infty = 1$ et $p_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ ainsi que, par fermeture de $\mathrm{Ker}(M)^\perp$ (intersection des noyaux des $y \mapsto h \cdot y$ lorsque h parcourt $\mathrm{Ker}(M)$), $p \in \mathrm{Ker}(M)^\perp$.
Comme par ailleurs

$$\forall n \quad \forall y \in B_f(0, \rho_{\phi(n)}) \quad p_{\phi(n)} \cdot \overline{x} \leqslant p_{\phi(n)} \cdot y,$$

un passage à la limite lorsque n tend vers l'infini (puisque tout élément y de $B_o(0, r)$ appartient à $B_f(0, \rho_{\phi(n)})$ pour n assez grand et en fixant un tel y) montre que

$$\forall y \in B_o(0, r) \quad p \cdot \overline{x} \leqslant p \cdot y,$$

puis, par densité de $B_o(0,r)$ dans $B_f(0,r)$,

$$\forall y \in B_f(0,r) \quad p \cdot \overline{x} \leqslant p \cdot y.$$

Posons finalement $\underline{q = -p \in \operatorname{Ker}(M)^\perp \backslash \{0\}}$. Quitte à factoriser par $r > 0$, la question 21 montre alors que

$$r \|q\|_\infty = r \max_{z \in B_f(0,1)} (q \cdot z) \leqslant q \cdot \overline{x}.$$

Comme $\|\overline{x}\|_1 = r$, la condition précédente s'écrit encore sous la forme

$$\sum_{i=1}^d \|q\|_\infty |\overline{x}_i| \leqslant \sum_{i=1}^d \underbrace{q_i \overline{x}_i}_{\leqslant \|q\|_\infty |\overline{x}_i|}$$

et ceci impose bien $q_i \overline{x}_i = \|q\|_\infty |\overline{x}_i|$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$.

24. Tout d'abord, $\underline{K \text{ est non vide}}$ puisque l'élément $\overline{x}$ de la question précédente appartient directement à K :

$$M\overline{x} = b, \quad \forall i \in I_0(\overline{x}) \quad \overline{x}_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \cdots, d\} \quad q_i \overline{x}_i = \|q\|_\infty |\overline{x}_i| \geqslant 0.$$

Soit ensuite $y \in K$. Pour montrer que $y \in C$ (et puisque $My = b$), il suffit de montrer que $\|y\|_1 = r$.
Par définition de $y \in K$, on a d'abord

$$\|y\|_1 = \sum_{i \in I_+(\overline{x}) \cup I_-(\overline{x})} |y_i| = \sum_{i \in I_+(\overline{x}) \cup I_-(\overline{x})} \frac{q_i y_i}{\|q\|_\infty} = \frac{1}{\|q\|_\infty} q \cdot y$$

puisque (d'après la question 23) $q_i = \pm \|q\|_\infty$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\} \backslash I_0(\overline{x})$. Comme $My = b = M\overline{x}$, on a par ailleurs $y - \overline{x} \in \operatorname{Ker}(M)$ et donc, par définition de q, $q \cdot (y - \overline{x}) = 0$ et donc

$$\|y\|_1 = \frac{1}{\|q\|_\infty} q \cdot \overline{x} = \|\overline{x}\|_1 = r.$$

La preuve de l'inclusion $K \subset C$ est complète.

25. Raisonnons par contraposée en supposant qu'il existe $h \in \operatorname{Ker}(M) \backslash \{0\}$ tel que $I_0(y) \subset I_0(h)$, et en montrant que y n'est pas un point extrémal de K.
Pour $\varepsilon > 0$ à fixer ultérieurement, nous avons d'abord

$$M(y \pm \varepsilon h) = My = b$$

ainsi que, puisque $I_0(\overline{x}) \subset I_0(y) \subset I_0(h)$,

$$\forall i \in I_0(\overline{x}) \quad y_i + \varepsilon h_i = 0.$$

Soit enfin $i \in \{1, \cdots, d\}$. Si $q_i y_i > 0$ et puisque $q_i(y_i + \varepsilon h_i) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} q_i y_i$ alors il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_i] \quad q_i(y_i \pm \varepsilon h_i) \geqslant 0.$$

De plus, si $q_i y_i = 0$ alors, puisque $q_i = \pm \|q\|_\infty \neq 0$ si $i \notin I_0(\overline{x})$ (définition de q) alors $y_i = 0$ que $i \in I_0(\overline{x})$ ou non, donc $h_i = 0$ puis

$$q_i(y_i \pm \varepsilon h_i) = 0.$$

Finalement, en posant $\varepsilon = \min_{i:\ q_i y_i > 0} \varepsilon_i > 0$, nous obtenons $y \pm \varepsilon h \in K$ et donc

$$y = \frac{1}{2}(y + \varepsilon h) + \frac{1}{2}(y - \varepsilon h) \notin \operatorname{Ext}(K).$$

26. Posons $V := \{h = (h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{R}^d : h_i = 0 \quad \forall i \in I_0(y)\}$. D'après la question précédente, nous avons

$$\operatorname{Ker}(M) \cap V \subset \{0\}.$$

Le théorème du rang amène ainsi (puisque V est clairement isomorphe à $\mathbb{R}^{\{1, \cdots, d\} \backslash I_0(y)}$)

$$(d - k) + \#(I_+(y) \cup I_-(y)) = \dim(\operatorname{Ker}(M) \oplus V) \leqslant d$$

et donc $\underline{\#(I_+(y) \cup I_-(y)) \leqslant k}$.
Comme K est non vide, fermé (intersection d'images réciproques de fermés par les applications coordonnées ou M) et inclus dans le compact C, K est également un compact non vide. D'après la question 14, il existe un élément $y \in \operatorname{Ext}(K)$ et

le système linéaire $Mx = b$ admet bien une solution ayant au plus k coordonnées non nulles.