



Direction du Concours
d'Admission

Concours PC - Physique

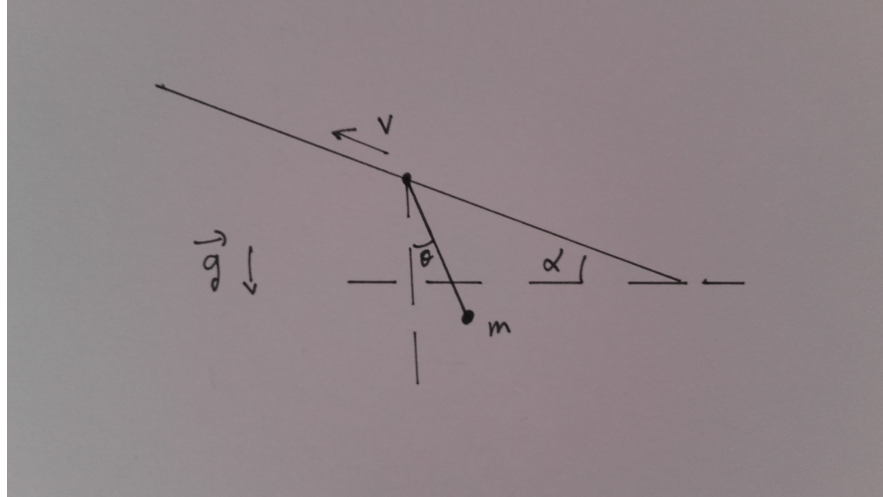
Nous réunissons dans ce document 60 sujets d'oral de physique posés lors des sessions 2018 et 2019 du concours. Ils sont accompagnés d'éléments de résolution, permettant aux futurs candidats de se préparer à cette épreuve.

Exercice 1 : télésiège

On considère un télésiège initialement au repos et qui se met en mouvement à $t = 0$. On veut étudier la dynamique de l'un de ses sièges. On modélise le câble sur lequel est fixé ce siège par une très longue tige solide mais de masse négligeable, et inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle α . Cette tige ne peut se déplacer que dans sa direction et on note V la norme de sa vitesse. Le siège est modélisé par un pendule (fil de longueur ℓ et masse m) fixé à cette tige.

- 1) Déterminer les équations du mouvement en fonction de l'accélération du câble \dot{V} .
- 2) On suppose que à $t = 0^-$ le siège est au repos et le câble ne bouge pas. Un moteur actionne rapidement le câble afin de lui faire acquérir une vitesse montante V_0 à $t = 0^+$ et qui restera constante par la suite. Quelle est la vitesse du siège à $t = 0^+$? Quel est le travail fourni par ce moteur entre 0^- et 0^+ ?
- 3) Quelle est l'évolution ultérieure de la position du siège ?
- 4) Quelle est la puissance fournie par le moteur aux temps $t > 0^+$? Quelle est sa moyenne ?

5) Si le siège est modélisé par une tige solide pouvant tourner librement autour de son point de fixation, comment la modélisation est-elle modifiée ?



Eléments de solution

On peut traiter le problème dans le référentiel attaché au point de fixation O qui n'est pas Galiléen entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$ à cause de son accélération brusque et on utilisera alors les forces d'inertie pour une translation rectiligne non-uniforme.

1) Dans le référentiel attaché au point de fixation O (et défini avec ses axes en translation par rapport au référentiel de la piste noire), l'accélération d'inertie est juste l'accélération de ce point O notée \vec{a}_O (et sa norme \dot{V}). On note $\vec{v}_{M/O}$ la vitesse du point matériel M (le bout du pendule) par rapport à O et on utilise une notation similaire pour l'accélération. On a les lois de composition

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{M/O} + \vec{v}_O \quad (1)$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{M/O} + \vec{a}_O, \quad (2)$$

où à gauche ce sont les vitesses et accélérations dans le référentiel de la station. Le PFD donne (on peut parler de forces d'inertie si on préfère)

$$\vec{a}_{M/O} = \frac{\vec{T}}{m} + \vec{g} - \vec{a}_O. \quad (3)$$

En prenant des coordonnées polaires pour $O\vec{M} = r\vec{e}_r$, on a simplement

$$\ell\ddot{\theta} = -g \sin \theta + \dot{V} \cos(\alpha + \theta) \quad (4)$$

$$-\ell\dot{\theta}^2 = g \cos \theta + \dot{V} \sin(\alpha + \theta) - \frac{T}{m} \quad (5)$$

où T est la tension dans le fil.

2) On va intégrer (4) entre 0^- et 0^+ . L'accélération \vec{a}_O est nulle sauf entre 0^- et 0^+ et on a alors

$$V_0 = \int_{0^-}^{0^+} \dot{V} dt. \quad (6)$$

Pendant tout ce temps infinitésimal, rien n'a le temps de bouger et seules les vitesses changent. On a donc $\theta = 0$ si bien que l'intégration donne

$$\ell \dot{\theta} \Big|_{t=0^+} = V_0 \cos \alpha. \quad (7)$$

On se pose la question de la vitesse de la masse au bout du pendule car on va en avoir besoin ensuite pour résoudre. En effet ça va nous servir de condition initiale. La composition (1) donne

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta. \quad (8)$$

Or la vitesse du cable est

$$\vec{v}_O|_{t=0^+} = V_0[-\cos(\alpha + \theta)\vec{e}_\theta - \sin(\alpha + \theta)\vec{e}_r] \quad (9)$$

donc à l'instant initial on a (en définissant \vec{e}_z associé à l'axe vertical)

$$\vec{v}_M|_{t=0^+} = V_0 \sin \alpha \vec{e}_z. \quad (10)$$

On a encore utilisé que de 0^- à 0^+ , $\theta = 0$. On va donc pouvoir connaître l'énergie cinétique à 0^+ et le travail fourni est donc

$$W = \frac{1}{2} m V_0^2 \sin^2 \alpha. \quad (11)$$

On remarque que si $\alpha = 0$, on n'a pas mis en mouvement le pendule donc aucune énergie cinétique et aucun travail. La rotation impulsée est juste due à la vitesse initiale du point

d'attache sans que la masse du pendule ne bouge. En revanche pour $\alpha \neq 0$ on a impulsé une vitesse verticale à la masse du pendule. On pourrait retrouver le travail fourni en utilisant que

$$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v}_M = T|\vec{v}_O| \sin(\alpha + \theta) \quad (12)$$

et en intégrant de 0^- à 0^+ une fois exprimée la tension T avec (5). On voit alors que le terme venant de la gravité est un infinitésimal, tout comme celui venant de $\ell\dot{\theta}^2$ et on trouve alors (toujours en prenant $\theta = 0$)

$$W = \int_{0^-}^{0^+} \mathcal{P} dt = \int_{0^-}^{0^+} m\vec{a}_O \cdot \vec{v}_O \sin^2 \alpha dt = \frac{1}{2} m V_0^2 \sin^2 \alpha \quad (13)$$

Mais c'est quand même moins facile.

3) Maintenant que l'on connaît $\dot{\theta}$ à $t = 0^+$ on a juste le mouvement libre d'un pendule dans un référentiel Galiléen car le cable a une vitesse constante. Pour des petits angles on a juste

$$\theta = \frac{V_0 \cos(\alpha)}{\sqrt{g\ell}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right) \quad (14)$$

qui satisfait bien la condition initiale (7) et $\theta(t = 0^+) = 0$.

4) Pour la puissance fournie il faut utiliser (12). Ca s'obtient en regardant le travail fourni par la tension sur la masse (cf. (12)), ou alors de manière équivalente au travail fourni par les forces de contact sur le point d'attache, car seule la composante selon le cable de ces forces de contact joue. Il faut donc déterminer T . On peut intégrer (4) (en ayant multiplié par $\dot{\theta}$) ou regarder la conservation de l'énergie cinétique du pendule (c'est pareil) pour trouver

$$\ell\dot{\theta}^2 = 2g(\cos \theta - 1) + \ell \dot{\theta}^2 \Big|_{t=0^+} \quad (15)$$

et donc remplacer dans (5)

$$T = gm(3 \cos \theta - 2) + \frac{mV_0^2 \cos^2 \alpha}{\ell}. \quad (16)$$

En particulier initialement on a $T > mg$. On est écrasé au fond du siège au redémarrage. Sur un vrai télésiège le cable n'est pas un solide, et donc ça fait un petit mouvement d'oscillation

vers le bas du point d'attache car on augmente la composante normale au fil $T \cos(\alpha + \theta) = T \cos \alpha$ et donc la forme du fil (sa discontinuité de tangente et ensuite ça oscille de bas en haut et c'est assez désagréable) doit s'ajuster à cette nouvelle contrainte normale. La puissance fournie par le moteur est alors donnée par (12) donc

$$\mathcal{P} = TV_0 \sin(\alpha + \theta). \quad (17)$$

Pour calculer sa moyenne c'est un peu traitre. En effet il faut développer mais à l'ordre 2 dans les petits angles. On trouve pour l'expression ci-dessus

$$\sin(\alpha + \theta) \simeq \sin \alpha (1 - \theta^2/2) + \theta \cos \alpha \quad (18)$$

et pour la tension

$$T \simeq mg \left(1 - \frac{3}{2}\theta^2 + \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g\ell} \right). \quad (19)$$

Ensuite on utilise que $\langle \theta \rangle = 0$ et $\langle \theta^2 \rangle = \theta_{\max}^2/2$ pour trouver

$$\langle \mathcal{P} \rangle = mgV_0 \sin \alpha. \quad (20)$$

La puissance moyenne fournie est évidemment celle nécessaire pour augmenter l'énergie potentielle moyenne.

5) On peut refaire avec une tige avec un moment d'inertie $I = m\ell^2/3$ le même exercice. Le théorème du moment cinétique donne

$$I\ddot{\theta} = m \left[-\frac{\ell}{2}g \sin \theta + \dot{V} \frac{\ell}{2} \cos(\alpha + \theta) \right]. \quad (21)$$

On fait pareil que pour le pendule, on intègre de 0^- à 0^+ en prenant $\theta = 0$ pour avoir la vitesse de rotation à $t = 0^+$. On trouve

$$\ell \dot{\theta} \Big|_{t=0^+} = \frac{3}{2}V_0 \cos \alpha. \quad (22)$$

On peut calculer la vitesse du point bas du pendule en utilisant (8) et on trouve alors

$$\vec{v}_M = \frac{1}{2}V_0 \cos \alpha \vec{e}_\theta. \quad (23)$$

Dans le cas simple $\alpha = 0$, on voit que cette impulsion donnée vers la gauche fait déplacer le point bas vers la droite. Quand le télésiège redémarre, on se sent donc reculer un peu, en plus du tassement au fond du siège. On peut faire la même chose pour le barycentre et on voit qu'il avance.

On peut aussi recalculer le travail fourni par le moteur de 0^- à 0^+ . On peut simplement faire une intégrale le long de la tige en sommant les énergies cinétiques. En effet la composante horizontale de la vitesse pour un point de distance r au point d'attache, est

$$V_0 \cos \alpha \left(\frac{3r}{2\ell} - 1 \right) \quad (24)$$

et la composante verticale est la même que dans le cas du pendule (10). On intègre les énergies cinétiques des éléments $dm = m/\ell dr$ de 0 à ℓ et on trouve

$$W = \frac{1}{8}mV_0^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}mV_0^2 \sin^2 \alpha. \quad (25)$$

En plus de ce qu'il faut apporter pour imprimer un mouvement vertical, il faut apporter ce qu'il faut pour la mise en rotation, ce que l'on n'avait pas dans le cas du pendule avec masse ponctuelle. On aurait aussi pu faire un calcul direct en obtenant l'expression de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle), et on calculant sa dérivée temporelle.

Exercice 2 : axions en présence de champ magnétique intense

On considère une onde EM, plane progressive et harmonique, polarisée linéairement ($\vec{E} = E(x, t)\vec{e}_z$) qui se propage dans le vide suivant l'axe (x) dans le sens des x croissants. Elle arrive dans un domaine (entre $x = -L$ et $x = 0$) où règne un champ magnétique constant très intense $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ (plus grand que 10^{10} T, que l'on peut rencontrer proche de certaines étoiles à neutrons). On admet que dans ces conditions, il peut y avoir un couplage entre l'onde EM et \vec{B}_0 , ce qui va engendrer une densité volumique de courant: $\vec{j} = -\frac{\eta}{\mu_0 c} \vec{B}_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$, où $\phi = \phi(x, t) = \phi_0 e^{i(\omega t - kx)}$ est le champ qui est non nul du fait du couplage et η un paramètre qui traduit l'intensité du couplage. Il vérifie l'équation de propagation modifiée:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\eta}{\mu_0 c} \vec{E} \cdot \vec{B}_0. \quad (1)$$

Avec \vec{E} le champ électrique de l'onde EM. En particulier, en dehors du domaine où B_0 est non nul, $\phi(x, t)$ vérifie une équation de propagation libre à la vitesse c . De plus $\phi(x, t)$ et $\partial\phi(x, t)/\partial x$ sont continus en $x = -L$ et $x = 0$.

1) Entre $x = -L$ et $x = 0$, montrer que: $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$ n'est pas nul. En utilisant également l'équation (1), en déduire la relation de dispersion dans la région de champ B_0 non nul.

2) On considère que le champ ϕ (dit champ d'Axions) une fois produit dans le domaine $-L \leq x \leq 0$ s'échappe de cette région, dans le sens des x croissants pour $x > 0$ et dans le sens des x décroissants pour $x < -L$. Montrer que $|\phi|$ est proportionnel à $|E|B_0$ pour $x > 0$ et $x < -L$.

(L'intérêt est que si $|\phi|$ est assez grand, alors il pourrait donner des effets observables).

Indication: on rappelle que la solution de l'équation (1) est une solution particulière plus une solution de l'équation homogène (sans second membre).

Eléments de correction

C'est un exercice qui propose une variation sur le cours des équations de Maxwell, très certainement pas faite en classe. La question 1) est proche du cours, une fois que l'on sait écrire les équations de Maxwell. Pour la question 2), il faut avoir bien compris l'énoncé et aussi ne pas se tromper dans l'utilisation de la notation complexe pour les ondes qui se propagent dans un sens ou un autre. Ici, on utilise la convention e^{-ikx} pour une propagation dans le sens des x croissants. Dans son ensemble, la question 2) est la variation par rapport au cours que propose l'exercice. Attention, je ne demande pas de résoudre le système à la fin de la question.

1) Dans le domaine où B_0 est non nul, en utilisant la densité volumique de courant donnée dans l'énoncé et en utilisant le fait que le champ électrique de l'onde EM et le champ magnétique \vec{B}_0 sont tous les deux suivant (z), on trouve facilement que:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\eta}{c} B_0 \ddot{\phi}.$$

On voit donc un premier point très important: si $\phi(x, t)$ est proportionnel à $e^{i(\omega t - kx)}$, donc $\ddot{\phi}$ aussi, alors E est également de cette forme. On en déduit donc que:

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})E = \frac{\eta}{c}B_0(-\omega^2)\phi.$$

De même, l'équation de l'énoncé pour $\phi(\cdot)$ donne:

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\phi = -\frac{\eta}{\mu_0 c}EB_0.$$

En combinant ces deux équations, on obtient la relation de dispersion, c'est-à-dire la relation en k et ω :

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^2 = \frac{\eta^2}{\mu_0 c^2}B_0^2\omega^2.$$

2) On considère ici que le champ $\phi(\cdot)$ a été produit dans la région de champ B_0 intense. Il vérifie dans cette région les relations de la question 1. Il s'échappe alors dans le sens des x décroissants pour $x < -L$, soit: $\phi(x < -L, t) = c_1 e^{i(\omega t + k_0 x)}$. La pulsation ω est la même que pour la question 1 car on doit avoir continuité de $\phi(\cdot)$ en $x = -L$ et ceci quelque soit t . Par contre, le vecteur d'onde k_0 est différent car pour $x < -L$, $\phi(\cdot)$ vérifie une équation de propagation (standard) à la vitesse c , et donc: $k_0 = \omega/c$. Egalement le champ $\phi(\cdot)$ s'échappe dans la région des x croissants pour $x > 0$, soit: $\phi(x > 0, t) = c_2 e^{i(\omega t - k_0 x)}$. Dans les expressions des champs $\phi(\cdot)$ ci-dessus, c_1 et c_2 sont des constantes (complexes) à déterminer avec les conditions aux limites en $x = -L$ et $x = 0$. Mais avant cela, il faut trouver $\phi(\cdot)$ dans la région de champ B_0 intense, en particulier en fonction de E et B_0 . Il faut résoudre l'équation (1). La question 1 fournit la solution particulière $\phi_p(\cdot)$:

$$\phi_p(x, t) = -\frac{\eta}{\mu_0 c} \frac{1}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} EB_0 e^{i(\omega t - kx)}.$$

Avec k solution de la relation de dispersion de la question 1. La solution sans second membre $\phi_h(\cdot)$ est simple mais il faut faire attention car on peut avoir une propagation dans le sens des x croissants ou décroissants, soit:

$$\phi_h(x, t) = c_3 e^{i(\omega t - k_0 x)} + c_4 e^{i(\omega t + k_0 x)}.$$

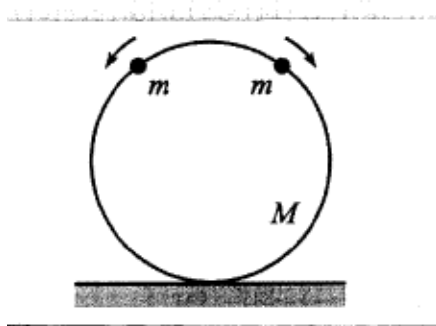
Avec c_3 et c_4 des constantes (complexes) et $k_0 = \omega/c$. La solution générale pour $\phi(\cdot)$ dans le domaine $-L < x < 0$ est donc:

$$\phi(x, t) = -\frac{\eta}{\mu_0 c} \frac{1}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} EB_0 e^{i(\omega t - kx)} + c_3 e^{i(\omega t - k_0 x)} + c_4 e^{i(\omega t + k_0 x)}$$

Maintenant, il faut utiliser les relations de continuité en $x = -L$ et $x = 0$ pour $\phi(x, t)$ et $\partial\phi(x, t)/\partial x$ pour déterminer les 4 constantes. C'est bien car il y a 4 équations. Le problème est complètement posé. L'énoncé ne demande pas de résoudre ce système mais seulement de montrer que $|c_1|$ et $|c_2|$ sont proportionnels à $|E|B_0$. C'est évident une fois le système posé car les égalités doivent être vraies pour tout $|E|$ et B_0 , cela veut dire que l'on doit pouvoir simplifier par $|E|$ et B_0 chaque égalité, ce qui implique que $|c_1|$ et $|c_2|$ sont bien proportionnels à $|E|B_0$, ce qui conclut.

Note: on remarque qu'il y a une petite différence par rapport aux exercices de MQ où l'on applique des relations de continuité avec une variable de plus que le nombre d'équations, cette variable étant liée au flux incident (libre). Ici, ce n'est pas le cas car $\phi(\cdot)$ est produit dans la région de champ intense et donc on n'envoie pas un flux (libre) de $\phi(\cdot)$ vers quelque chose.

Exercice 3 : anneau et boules



Deux petites boules percées, en acier, de masses m et rayon a , peuvent coulisser sans frottement sur un anneau (sans le quitter). L'anneau, de masse M et rayon $R \gg a$, est posé

verticalement sur le sol. Initialement les deux boules sont au sommet de l'anneau. Elles sont lâchées à $t = 0$ et commencent à glisser le long de l'anneau, l'une à gauche, l'autre à droite.

1) Quelle est la valeur minimale m_* de m à partir de laquelle l'anneau s'élèvera du sol ?

2) Si $m < m_*$, au bout de quel temps T les deux boules arrivent en bas de l'anneau? On fera l'AN pour $R = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ cm}$.

Eléments de solution

Les forces sur chaque boule sont son poids $-mg\vec{u}_z$ et la réaction normale $\vec{N} = N\vec{u}_r$ de l'anneau. Le PFD donne alors (avec $r = R$ constant)

$$mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad , \quad -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N. \quad (1)$$

La première équation est intégrée pour donner la conservation de l'énergie, soit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta) . \quad (2)$$

En reportant dans la deuxième équation (1) on trouve

$$N = mg(3 \cos \theta - 2) \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = mg(3 \cos \theta - 2)\vec{u}_r . \quad (3)$$

Ceci est valable pour chacune des deux boules avec leur \vec{u}_r respectifs. Chaque boule exerce donc une force $-\vec{N}$ sur l'anneau. Les composantes horizontales s'annulent et les composantes verticales s'ajoutent, soit une force $-2mg(3 \cos \theta - 2) \cos \theta \vec{u}_z$. On voit que cette force peut être dirigée selon $+\vec{u}_z$ uniquement si $\cos \theta \geq 0$. En ajoutant le poids de l'anneau on trouve la force totale qu'exerce l'anneau sur le sol:

$$\vec{F}_{a \rightarrow s} = -g \left[M + m 2(3 \cos \theta - 2) \cos \theta \right] \vec{u}_z . \quad (4)$$

1) L'anneau commencera à se soulever du sol lorsque cette force s'annule pour la première fois, soit pour $\theta = \theta_*$ avec

$$\cos \theta_* = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}} , \quad (5)$$

ce qui est réel à condition que $\frac{3M}{2m} < 1$ ou $m \geq m_*$ avec

$$m_* = \frac{3}{2}M . \quad (6)$$

Si cette condition est satisfaite, l'anneau se soulève dès que $\theta = \theta_*$. Mais ensuite, pour $\theta > \theta_*$, l'analyse ci-dessus cesse d'être valable car l'anneau ne constitue plus un référentiel inertiel.

2) Dans le cas $m < m_*$ l'anneau ne se soulève jamais et l'analyse des forces et accélérations ci dessus reste valables tout le temps. D'après (2) on a $\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{R} \sin^2 \frac{\theta}{2}$, soit $\dot{\theta} = 2\omega \sin \frac{\theta}{2}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ ou $\frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2\omega dt$ et donc (si besoin, on donnera la formule $\int \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2 \ln \tan \frac{\theta}{4}$)

$$(t - t_0) = \frac{1}{2\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{4}} = \frac{1}{4\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\tan \frac{\theta}{4} \cos^2 \frac{\theta}{4}} = \frac{1}{\omega} \left(\ln \tan \frac{\theta}{4} - \ln \tan \frac{\theta_0}{4} \right) . \quad (7)$$

Evidemment, si on pose $\theta_0 = 0$ on trouve $T = t_f - t_0 = \infty$: une boule posée exactement en $\theta_0 = 0$ y restera indéfiniment. Mais ici les boules ont un rayon a et donc $\theta_0 \simeq \tan \theta_0 = \frac{a}{R}$. De même, $\theta_f = \pi - \frac{a}{R}$. On a $\ln \tan \frac{a}{4R} \simeq \ln \frac{a}{4R}$ et $\ln \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{4R}) \simeq \ln 1 = 0$ à des termes $\mathcal{O}(\frac{a^2}{R^2})$ près. On trouve alors

$$T \simeq -\frac{1}{\omega} \ln \frac{a}{4R} = \sqrt{\frac{R}{g}} \ln \frac{4R}{a} . \quad (8)$$

Pour l'AN on trouve $\sqrt{\frac{R}{g}} \simeq 0.3$ s et $\ln \frac{4R}{a} = \ln 400 \simeq 6$, soit $T \simeq 1.8$ s. A comparer avec une chute libre sur une hauteur $2R$: $2R = \frac{g}{2}T^2$ qui donne $T = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \simeq 0.6$ s.

Exercice 4 : tore de fluide

On considère un liquide parfait incompressible en forme de tore, c'est à dire de bouée. Dans un premier temps on étudie son évolution en considérant l'effet de la tension superficielle. On ne prend pas en compte l'effet du poids et on suppose qu'au cours de son évolution il conserve toujours une forme de tore. On rappelle que l'énergie associée à la tension superficielle est $E = \nu A$ où A est l'aire de la surface libre et ν le coefficient de tension superficielle. On suppose que le rayon r du grand cercle qui passe par les centres des sections est bien plus grand que le rayon des sections R du tore.

1) Déterminer l'évolution du système. Interpréter physiquement.

2) Quel est le comportement aux temps courts ? Et aux temps longs ?

3) Comment peut on le stabiliser avec une rotation initiale ?

Aide 1: Le volume et l'aire du tore sont respectivement $2\pi^2 r R^2$ et $4\pi^2 R r$.

Aide 2 : La fonction $f(x) = -8/3\sqrt{1-\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}/2)$ est telle que $f'(x) = 1/\sqrt{1-\sqrt{x}}$.

Eléments de solution

On va se rendre compte que c'est semblable à un problème de force centrale en $1/\sqrt{r}$.

1) On passe forcément par la conservation de l'énergie car c'est le seul aspect connu de la tension superficielle et de plus le problème n'a qu'un degré de liberté. On a affaire à un fluide incompressible et donc la conservation du fluide va nous donner une relation. Comme le volume est $\propto R^2 r$ on obtient

$$R = R_i \sqrt{\frac{r_i}{r}}. \quad (1)$$

Etant donné le rapport d'aspect du problème ($r \gg R$), les vitesses sont essentiellement radiales, c'est à dire selon \vec{e}_r en coordonnées cylindriques naturelles. On a donc (en posant $\rho = 1$)

$$E_c = \frac{1}{2} V \dot{r}^2 = \pi^2 R^2 r \dot{r}^2. \quad (2)$$

Et pour l'énergie de tension superficielle

$$E_p = \nu A = \nu 4\pi^2 R r. \quad (3)$$

Donc sans dissipation visqueuse (fluide parfait) la conservation donne

$$\dot{r}^2 = \frac{4\nu}{R_i} - \frac{4\nu}{R}. \quad (4)$$

On a commencé le mouvement sans vitesse initiale pour fixer la constante. On remarque qu'en dérivant et avec (1) on a

$$\ddot{r} = -\frac{\nu}{R_i \sqrt{r r_i}} \quad (5)$$

C'est une force en $1/\sqrt{r}$. On reformule \dot{r}

$$\dot{r} = -\frac{2\sqrt{\nu}}{\sqrt{R_i}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{r}{r_i}}} \quad (6)$$

En utilisant l'aide on peut intégrer pour trouver (en posant $x = r/r_i$)

$$1 - \frac{3}{4}x - \frac{x^{3/2}}{4} = \frac{9\nu}{16R_i r_i^2} t^2. \quad (7)$$

La solution est implicite mais c'est déjà bien.

2) Aux temps courts on peut poser

$$x = 1 - \epsilon \quad (8)$$

et on trouve

$$\epsilon \simeq \frac{\nu t^2}{2R_i r_i^2}, \quad \Rightarrow \quad r = r_i - \frac{\nu t^2}{2R_i r_i}. \quad (9)$$

C'est une parabole, donc le mouvement d'une chute sous une force constante. En comparant avec (5) on voit que ça revient à approximer la force par la force initiale évaluée en $r = r_i$. Aux temps longs on va s'effondrer en boule et on peut estimer le temps pour avoir $x = 0$ qui est

$$t_{\text{collapse}} = 4/3 \sqrt{R_i/\nu r_i} \quad (10)$$

3) Si on met une rotation initiale $\Omega_i = v_i/r_i$ où v_i est la vitesse orthoradiale initiale sur le grand cercle. L'énergie cinétique par volume est augmentée de (encore une fois c'est approché mais justifié par le rapport d'aspect)

$$\delta E_c/V = \frac{1}{2}v^2. \quad (11)$$

Le moment cinétique par unité de masse est environ $L/V \simeq rv$. La force est centrale donc conservation de L et il vient

$$rv = r_i v_i. \quad (12)$$

En répétant l'analyse on a une barrière de potentiel comme dans le problème à deux corps habituel. i.e.

$$\dot{r}^2 + \frac{4\nu\sqrt{r}}{R_i\sqrt{r_i}} + \frac{(v_i r_i)^2}{r^2} = \text{Cte}. \quad (13)$$

La force totale effective par unité de masse est

$$-\frac{\nu}{R_i \sqrt{r_i r}} + \frac{(v_i r_i)^2}{r^3} \quad (14)$$

et elle s'annule si

$$r_{\text{stable}} = r_i \left(\frac{v_i^2 R_i}{\nu} \right)^{2/5}. \quad (15)$$

Le potentiel effectif peut être lu sur (13). On peut le tracer pour bien voir la stabilité de l'équilibre. On peut enfin si on a encore du temps discuter ce qui se passe si le système n'est pas initialement lancé à r_{stable} . On va avoir une série de contractions et dilatations entre un r_{min} et un r_{max} . Comment raffiner ? En incluant la viscosité. Les oscillations vont s'amortir sans modifier le moment cinétique et donc on va tendre vers le rayon de stabilité étant donnée une rotation initiale. Pour le voir il faut discuter symétrie du problème pour voir que les forces de viscosité ne peuvent pas être orthoradiales et donc modifier le moment cinétique.

Exercice 5 : ondes EM en champs intenses

On considère 3 ondes EM (issues de 3 sources différentes) toutes polarisées linéairement suivant (x). Les champs électriques de ces 3 ondes sont de la forme:

$$\vec{E}_i(z, t) = A_i(z) e^{i(\omega_i t - k_i z)} \vec{e}_x + c.c.$$

avec $A_i(z)$ pratiquement constant sur des échelles de quelques longueurs d'onde. Elles ne sont pas de même fréquence. En principe, il ne devrait pas y avoir d'interaction entre ces 3 ondes. On va admettre ici que si les champs électriques sont suffisamment intenses, alors, il faut modifier les équations de Maxwell en rajoutant un vecteur densité de courant de la forme:

$$\vec{j} = \frac{\gamma^3}{c^2} \frac{\partial |\vec{E}|^3}{\partial t} \vec{e}_x,$$

où γ est une constante (dimensionnée). On va chercher à montrer que ces 3 ondes peuvent alors effectivement interagir, et ceci en observant qu'une 4^è onde peut apparaître dans la zone où se rencontrent les 3 ondes.

En écrivant le champ électrique de la 4^e onde (que l'on suppose également polarisée suivant (x)) sous la forme:

$$\vec{E}_4(z, t) = A_4(z)e^{i(\omega_4 t - k_4 z)}\vec{e}_x + c.c.$$

avec $k_4 = \omega_4/c$ et où $A_4(z)$ est pratiquement constant sur des échelles de quelques λ_4 , montrer que dA_4/dz n'est pas nul.

On supposera que $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ et $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4$.

Eléments de solutions

C'est un exercice qui décrit un phénomène physique qui peut surprendre.

On introduit le vecteur densité de courant de l'énoncé dans Maxwell-Ampère, puis avec Maxwell-Faraday, on obtient immédiatement:

$$\partial_z^2 E = \mu_0 \frac{\gamma^3}{c^2} \partial_t^2 E^3 + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E. \quad (1)$$

Avec ici, $E = E(z, t)$ qui est la somme de tous les champs électriques en jeu, soit:

$$E(z, t) = \sum_{i=1}^{i=4} E_i(z, t) = \sum_{i=1}^{i=4} A_i(z) e^{i(\omega_i t - k_i z)} + c.c. \quad (2)$$

Dans l'équation (1), il y a beaucoup de termes mais on ne va garder que les termes en $e^{i\omega_4 t}$. On obtient alors:

$$\partial_z^2 [A_4(z) e^{i(-k_4 z)}] + \frac{1}{c^2} \omega_4^2 A_4(z) e^{i(-k_4 z)} = \mu_0 \frac{\gamma^3}{c^2} (-\omega_4^2) 6(A_1(z) A_2(z) \bar{A}_3(z)) e^{i(-k_4 z)}. \quad (3)$$

En utilisant l'équation de conservation donnée dans l'énoncé et où \bar{A}_3 est le complexe conjugué de A_3 ... On n'a pas précisé dans l'énoncé que les A_i étaient nécessairement réels, mais on peut le supposer: cela n'a pas d'importance ici. Ensuite, l'énoncé indique que $d^2 A_4/dz^2$ donne un terme négligeable dans l'équation (3) et c'est fini:

$$dA_4(z)/dz = -i\gamma^3 k_4 6 A_1(z) A_2(z) \bar{A}_3(z).$$

Exercice 6 : bille sur escalier

On considère un grand escalier descendant, dont les marches numérotées de $n = 1$ à $n = N$ (depuis le haut) ont toutes la même hauteur b et des largeurs différentes $\xi_n a$ avec $\xi_1 = 1$. Une bille en acier glisse sans frottement sur le plancher avec une vitesse v_0 vers l'escalier et tombe sur la première marche de telle façon qu'elle rebondit exactement au milieu de la marche. Puis elle rebondit sur la deuxième, puis la troisième marche, toujours en leurs milieux, et ainsi de suite. Déterminer les valeurs des ξ_n puis exprimer le temps qu'il faut à la bille pour atteindre la dernière marche si $N = 100$. On évaluera ce temps avec une précision d'au moins 1% si $a = b = 10$ cm.

Eléments de solution

Un exercice de chute libre, donc a priori facile ...

La bille va décrire un bout d'une parabole. Prenons des coordonnées x pour l'horizontale et z pour la verticale, dirigé vers le bas, et $x = z = 0$ au bord du plancher, soit au point où la bille commence sa chute libre. En ce point la tangente à la parabole est horizontale et comme la parabole doit arriver à $x = a/2$ et $z = b$, on a forcément pour cette première parabole

$$n = 1 \quad : \quad \frac{z}{b} = \left(\frac{2x}{a} \right)^2 . \quad (1)$$

Ensuite, le rebond se fait comme une réflexion sur un miroir. La bille décrit donc l'image miroir par rapport à $x = a/2$ de sa précédente trajectoire, et remonte jusqu'à $z = 0$ avant de recommencer une nouvelle descente. L'équation de cette parabole est

$$n = 2 \quad : \quad \frac{z}{b} = \left(\frac{2(x - a)}{a} \right)^2 . \quad (2)$$

Elle atteint alors la deuxième marche en $z = 2b$ pour $\sqrt{2} = \frac{2(x_2 - a)}{a}$, soit $x_2 = a(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$. Mais a est la largeur de la première marche et $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ doit être la moitié de la largeur de la deuxième marche. Celle-ci a donc une largeur $\sqrt{2}a$, soit $\xi_2 = \sqrt{2}$. Puis la bille rebondit et décrit sa troisième parabole qui culmine au dessus du bout de la deuxième marche en $x = a(1 + \sqrt{2})$.

Donc

$$n = 3 \quad : \quad \frac{z}{b} = \left(\frac{2(x - a - \sqrt{2}a)}{a} \right)^2 . \quad (3)$$

Elle touche la troisième marche en $z = 3$ en $x_3 = a(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ et la troisième marche doit avoir une largeur $\sqrt{3}a$, soit $\xi_3 = \sqrt{3}$. Et ainsi de suite. Donc

$$\xi_n = \sqrt{n} , \quad (4)$$

et la largeur totale de l'escalier est

$$L_{\text{tot}} = a \sum_{n=1}^N \sqrt{n} \simeq a \int_0^N dn \sqrt{n} = \frac{2a}{3} N^{3/2} , \quad (5)$$

où l'erreur est au plus de l'ordre de \sqrt{N} , soit une erreur relative de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ce qui est 1% pour $N = 100$.

Dans tout le mouvement la vitesse selon x reste inchangée et égale à v_0 . Le temps pour parcourir l'escalier est donc simplement

$$T = \frac{L_{\text{tot}}}{v_0} \simeq N^{3/2} \frac{2a}{3v_0} . \quad (6)$$

Il reste à déterminer v_0 . Pour la première parabole on a $x = v_0 t$ et $z = \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2v_0^2} x^2$. On identifie $\frac{g}{2v_0^2} = \frac{4b}{a^2}$, soit $v_0^2 = \frac{ga^2}{8b}$ ou $\frac{a}{v_0} = \sqrt{\frac{8b}{g}}$. Donc

$$T \simeq \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2b}{g}} N^{3/2} \simeq 190 \text{ s} . \quad (7)$$

Exercice 7 : cylindre et dipôle magnétique

Un cylindre de métal d'axe vertical, de longueur L , rayon R et d'épaisseur e , avec $L \gg R \gg e$ peut se déplacer librement selon son axe. Il a une masse m et subit également l'action de son poids. La conductivité du métal du cylindre est σ . On place un dipôle magnétique au coeur de ce cylindre. Le dipôle est fixe et son moment est orienté verticalement ($\vec{M} = M\vec{e}_z$). On

cherche à déterminer les équations du mouvement du cylindre et à les résoudre. Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique est (voir schéma) en coordonnées sphériques

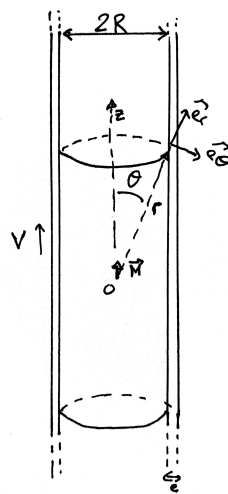
$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta \\ B_r &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3}\end{aligned}$$

1) Calculer le courant induit dans un élément infinitésimal du cylindre défini par la variation infinitésimale $d\theta$ (voir schéma).

2) En déduire la force exercée sur cet élément, puis celle sur tout le cylindre

3) Etablir et résoudre les équations du mouvement (On note V la vitesse verticale du cylindre).

Aide : $\int_0^\pi \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta = 5\pi/128$.



Eléments de solution

1) On doit d'abord calculer le flux à travers un disque situé à une hauteur z et correspondant

donc à une distance radiale r et un angle θ tels que

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{R}{r} \quad (2)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \quad (3)$$

$$\tan \theta = \frac{R}{z} \quad (4)$$

$$(5)$$

On peut bien évidemment calculer le flux à travers le disque de hauteur z par rapport au dipôle, mais cela fait intervenir à la fois du B_r et du B_θ car tous deux ont une composante selon \vec{e}_z . En utilisant $\text{div} \vec{B} = 0$, on peut calculer le flux à travers une calotte de sphère s'appuyant sur ce disque. Dans ce cas, seul B_r peut contribuer au flux. L'élément de surface en coordonnées sphériques adaptées à cette calotte est $d^2S = r^2 d\theta \sin \theta d\phi$. Il vient donc (en intégrant trivialement sur ϕ)

$$\Phi = 2\pi \int B_r(r) r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 M}{r} \int \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (6)$$

$$= \frac{\mu_0 M}{2r} \sin^2 \theta = \frac{\mu_0 M}{2R} \sin^3 \theta. \quad (7)$$

La loi de Lenz va donner le champ électromoteur dans un élément de hauteur dz . Cet élément à une conductance

$$dG = \frac{\sigma e dz}{2\pi R} \quad (8)$$

et on pourra écrire

$$dI = -dG \dot{\Phi}. \quad (9)$$

Ce courant va faire subir une force de Laplace et donc il faut le calculer et donc calculer $\dot{\Phi}$.

$$\dot{\Phi} = \frac{3\mu_0 M}{2R} \sin^2 \theta \cos \theta \dot{\theta}. \quad (10)$$

Il faut relier la vitesse du cylindre V à $\dot{\theta}$. En utilisant $\tan \theta = R/z$ il vient

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\sin^2 \theta}{R} \quad (11)$$

et donc

$$\dot{\theta} = -\frac{\sin^2 \theta}{R} V. \quad (12)$$

Ainsi la variation du flux à cause du mouvement du cylindre (ou mouvement du dipole à cylindre fixe)

$$\dot{\Phi} = -V \frac{3\mu_0 M}{2R^2} \sin^4 \theta \cos \theta. \quad (13)$$

On aurait pu arriver à ce résultat en intégrant les forces de Lorentz ($\vec{v} \wedge \vec{B}$). Cela offre deux voies de calcul. Il faut juste utiliser $\vec{v} = V\vec{e}_z$ puis $\vec{j} = \sigma\vec{v} \wedge \vec{B}$. Si on choisit cette voie il suffit de voir que,

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\phi \quad \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\phi \quad (14)$$

et utiliser $r^3 = R^3 \sin^3 \theta$ pour n'exprimer les résultats qu'en fonction de (R, θ) . Au final, peu importe la méthode, on a (en utilisant également (11))

$$dI = \frac{1}{2\pi R} \sigma e \frac{3\mu_0 M}{2R} \sin^2 \theta \cos \theta V d\theta. \quad (15)$$

2) On calcule les forces de Laplace sur cette tranche de cylindre. On met les signes en sachant qu'on va pas inventer le mouvement perpétuel et que l'on doit avoir un freinage, et on trouve

$$dF_z = 2\pi R I (\vec{e}_\phi \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = -2\pi R dI (B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta) \quad (16)$$

$$= -\frac{9}{8\pi} \left(\frac{\mu_0 M}{R^2} \right)^2 \sigma e V \cos^2 \theta \sin^6 \theta d\theta. \quad (17)$$

Pour un cylindre très long on intègre θ de 0 à π et la force totale est (en utilisant l'aide)

$$F_z = -\frac{45}{1024} \left(\frac{\mu_0 M}{R^2} \right)^2 \sigma e V_z. \quad (18)$$

3) C'est une force de frottement qu'on peut remettre sous la forme

$$F_z = -\frac{m}{\tau} V_z \quad (19)$$

où m est la masse totale du cylindre. On obtient alors

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} - g = 0. \quad (20)$$

Passé le régime transitoire on trouve la vitesse constante de chute qui est $g\tau$. En pratique c'est en gardant le cylindre fixe mais en faisant tomber le dipole magnétique que l'on peut réaliser cette expérience de freinage par induction, car il sera beaucoup plus léger, et subira la même force.

Pour aller plus loin, on peut faire un bilan énergétique car l'énergie cinétique restant constante, la baisse de l'énergie potentielle doit se retrouver en dissipation dans les courants. En effet la puissance dissipée est

$$|dP| = |edI| = |\dot{\Phi}dI| = |dG(\dot{\Phi})^2| \quad (21)$$

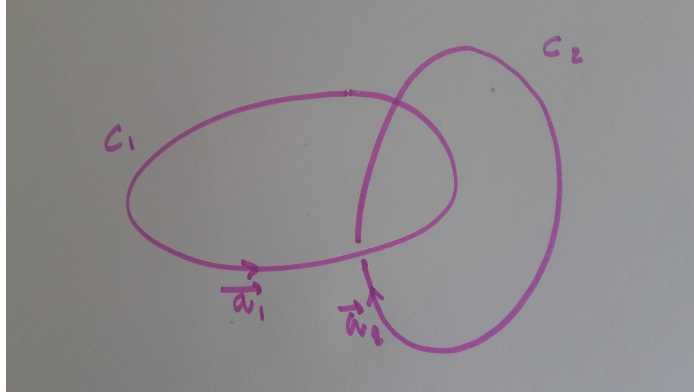
et en utilisant les expressions précédentes, on voit que c'est égal en norme à $|VdF_z|$ et une fois intégré sur tout le cylindre c'est aussi égal à $|mgV|$ en régime permanent qui est la puissance de la gravité.

Exercice 8 : tubes (lignes) de vortex

On considère un fluide idéal incompressible de champ des vitesses $\vec{v}(x, y, z, t)$. On note $\vec{\omega}(x, y, z, t) = \text{rot}(\vec{v})$ sa vorticité. Ce fluide a une distribution spatiale particulière: sa vorticité est localis e seulement dans deux tubes C_1 et C_2 qui se croisent comme sur la figure ci-dessous et la vorticité est nulle partout ailleurs. De plus, chaque tube C_1 et C_2 est un tube (dit vortex) tel que $\vec{\omega}$ dans le tube est parallèle à l'axe du tube en chaque point. Egalement, on considère que ces tubes sont assez fins, assez proches de lignes.

1) Pour chaque tube, on définit: $K_S = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ où l'intégrale est prise sur S qui est une section du tube donc perpendiculaire à $\vec{\omega}$ (et $d\vec{S}$ est parallèle à $\vec{\omega}$). Montrer que K_S est constante le long d'un tube. On note K_1 et K_2 les valeurs pour les tubes C_1 et C_2 respectivement.

2) Déterminer l'intégrale $\int dV \vec{\omega} \cdot \vec{v}$ prise sur l'ensemble du fluide en fonction de K_1 et K_2 . A priori, K_1 et K_2 peuvent dépendre du temps. On admet que ce n'est pas le cas. Quelle est alors la généralisation du résultat de la question 2). Au vu de l'exercice, y-a-t'il des hypothèses à cette généralisation?



C_2 passe à l'intérieur de la boucle formée par C_1

Éléments de solution

1) Résultat immédiat avec la propriété: $\text{div}(\vec{\omega}) = 0$.

2) On décompose l'intégrale: $\int dV \vec{\omega} \cdot \vec{v}$ sur chaque tube 1 et 2:

$$\int dV \vec{\omega} \cdot \vec{v} = \int dV_1 \vec{\omega} \cdot \vec{v} + \int dV_2 \vec{\omega} \cdot \vec{v}.$$

Mais $dV_1 = dS_1 \vec{n}_1 d\vec{l}_1$ et:

$$\int dV_1 \vec{\omega} \cdot \vec{v} = \int dS_1 \vec{n}_1 d\vec{l}_1 \vec{\omega} \cdot \vec{v} = \int [dS_1 \vec{n}_1 \vec{\omega}] [d\vec{l}_1 \vec{v}] = K_1 \oint d\vec{l}_1 \vec{v}.$$

Car l'intégrale sur le volume complet veut dire que l'on fait tout le tour du tube. Mais:

$$\oint d\vec{l}_1 \vec{v} = \int_{S_1} \text{rot} \vec{v} d\vec{S}$$

où l'intégrale est prise sur la surface enlacée par la ligne C_1 (on rappelle que l'on a pris les tubes assez fins, ce qui est utile ici). On poursuit:

$$\int_{S_1} \text{rot} \vec{v} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{\omega} d\vec{S} = K_2.$$

Car le seul domaine de S_1 pour lequel la vorticité est non nulle est celui du tube C_2 . Finalement:

$$\int dV_1 \vec{\omega} \cdot \vec{v} = K_1 K_2.$$

C'est exactement la même chose pour le tube 2 et donc:

$$\int dV \vec{\omega} \cdot \vec{v} = 2K_1 K_2.$$

Ce qui répond à la question.

Comme on admet que K_1 et K_2 ne dépendent pas du temps, cela veut dire que: $\int dV \vec{\omega} \cdot \vec{v}$ est aussi indépendant du temps. Ce sera vrai dès lors que la vorticité forme des boucles dans le volume du fluide. C'est assez restrictif, mais c'est ce que donne l'exercice.

Exercice 9 : condensateur avec diélectrique tenu par un ressort

Dans un milieu homogène, appel e "diélectrique linéaire", la loi de Gauss est modifiée en remplaçant $\frac{Q}{\epsilon_0}$ par $\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ où ϵ_r est appel e la permittivité relative du milieu.

1) Déterminer la capacité d'un condensateur plan plong e dans un milieu diélectrique linéaire homogène de permittivité relative $\epsilon_r > 1$. Déterminer l'énergie contenue dans un tel condensateur lorsqu'on applique une différence de potentiel V_0 aux deux plaques.

On considère un condensateur form e de deux plaques rectangulaires de dimensions a et b , parallèles et séparées d'une distance e . Un diélectrique rigide de permittivité relative ϵ_r , d'épaisseur e et de même dimensions a et b que les plaques peut coulisser entre les plaques sans frottement. Il est reli e d'un côté à un ressort de raideur k et de longueur à vide telle que la force de rappel soit nulle quand le diélectrique est juste à l'entrée du condensateur. On charge le condensateur avec une charge Q et on l'isole.

2) Quelle(s) est/sont la/les position(s) d'équilibre du diélectrique? Peut-il y avoir des oscillations et si oui, avec quelle fréquence? On pourra éventuellement supposer que $\epsilon_r - 1$ est petit, puis regarder l'AN avec $\epsilon_r - 1 = 10^{-1}$, $Q = 10^{-5}$ C, $a = b = 20$ cm, $e = 5$ mm et $k = 10$ N m⁻¹.

Eléments de solution

1) On fait l'argument habituel des deux plaques 1 et 2, parallèles, de normale \vec{e}_z , chargées de Q et $-Q$. Soient leurs dimensions $a \times b$ et leur séparation e . La première produit un champ

$\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_z$ au dessus et $\vec{E}_1 = -E_1 \vec{e}_z$ en dessous. Par Gauss modifié on a $2E_1 ab = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ et idem pour le champ produit par la deuxième plaque. En dehors des plaques les champs s'annulent et entre les plaques, ils s'ajoutent, donc

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2 \times \frac{Q}{2ab\epsilon_0\epsilon_r} . \quad (1)$$

La différence de potentiel est $V = E \times e$ et donc la capacité

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{ab}{e} . \quad (2)$$

Pour déterminer l'énergie stockée, on peut calculer le travail qu'il faut fournir pour changer $Q \rightarrow Q + dQ$, en prenant une charge dQ de la plaque avec charge $-Q$ et en la transportant jusqu'à la plaque de charge Q . Le travail est $E dQ e$ et l'énergie change donc de $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + d\mathcal{E}$ avec $d\mathcal{E} = E dQ e = \frac{1}{C} Q dQ$. En intégrant de 0 à Q on trouve

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C}{2} V^2 , \quad (3)$$

comme dans le vide, la seule modification est le ϵ_r contenu dans l'expression de la capacité. Pour l'énergie volumique entre les plaques on trouve

$$u = \frac{\mathcal{E}}{abe} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left(\frac{V}{e} \right)^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \vec{E}^2 . \quad (4)$$

En dehors du condensateur, le champ électrique s'annule. La présence du diélectrique en dehors du condensateur n'a donc pas d'influence, et les résultats précédents restent valables même si le diélectrique ne remplit que l'espace entre les plaques.

2) Pour résoudre cet exercice il faut raisonner sur l'énergie totale. Si le candidat essaie d'explicitier les forces, il conviendra de lui suggérer, après un temps convenable, une approche énergétique.

Appelons x la coordonnée qui donne la position du bord du diélectrique qui est entré dans le condensateur, telle que $x = 0$ correspond au cas du diélectrique juste à l'entrée du condensateur. La force de rappel du ressort est donc $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. Soit a la longueur selon x . Le condensateur correspond donc à deux condensateurs en parallèle, l'un avec dimensions x et b

et permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ et l'autre avec dimensions $a - x$ et b et permittivité ϵ_0 (ou $\epsilon_{\text{air}} \simeq \epsilon_0$). La capacité de chacun est donné par $C_i = \frac{\epsilon_i S_i}{e}$ où S_i est l'aire de la partie des plaques sans ou avec le diélectrique: $C_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 x b}{e}$ et $C_2 = \frac{\epsilon_0 (a-x) b}{e}$. Pour l'ensemble $C = C_1 + C_2 = \frac{b \epsilon_0}{e} [\epsilon_r x + (a-x)]$. Ensuite on peut raisonner sur l'énergie: $\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{Q^2}{2C}$ et $\mathcal{E}_{\text{mec}} = \frac{1}{2} k x^2$. L'énergie potentielle du système est la somme des deux:

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(x) = \frac{e Q^2}{2 b \epsilon_0} \frac{1}{(\epsilon_r - 1)x + a} + \frac{1}{2} k x^2 . \quad (5)$$

La position d'équilibre correspond au minimum de \mathcal{E}_{pot} :

$$\mathcal{E}'_{\text{pot}}(x_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta a^3 = x_e [(\epsilon_r - 1)x_e + a]^2 \quad , \quad \eta \equiv \frac{e Q^2}{2 b \epsilon_0 k a^3} (\epsilon_r - 1) . \quad (6)$$

On vérifiera que le paramètre η est bien sans dimension car $\frac{Q^2}{\epsilon_0 a^2}$ et ak sont bien homogènes à une force. L'équation (2) est cubique. Elle a donc 3 solutions mais seules les solutions avec $0 \leq x_e \leq a$ ont un sens. Pour un équilibre stable la deuxième dérivée doit être positive. On a, en se servant de (2)

$$\mathcal{E}''_{\text{pot}}(x_e) = k \left[\frac{2x_e}{(\epsilon_r - 1)x_e + a} + 1 \right] . \quad (7)$$

Toute position d'équilibre avec $x_e \geq 0$ est donc stable.

Si $\epsilon_r - 1 \ll 1$ on peut approximer $[(\epsilon_r - 1)x_e + a]^2 \simeq a^2$ et la solution de (2) est $x_e \simeq \eta a$, à condition, bien sur, que $\eta \leq 1$. (Evidemment, $\epsilon_r - 1 \ll 1$ n'implique pas forcément $\eta \ll 1$.) Les deux autres "solutions" sont à $x_e = \mathcal{O}(\frac{a}{\epsilon_r - 1})$ ce qui est en dehors de l'intervalle $[0, a]$ autorisé. On a alors $\mathcal{E}''_{\text{pot}}(x_e) \simeq k[1 + \frac{2x_e}{a}] \simeq k[1 + 2\eta] > 0$. Si m est la masse du diélectrique, on aura des oscillations avec

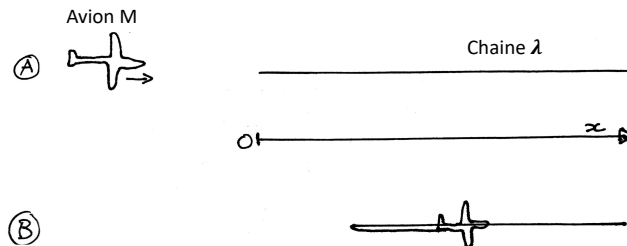
$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{E}''_{\text{pot}}(x_e)}{m}} \simeq \sqrt{\frac{k(1 + \eta)}{m}} . \quad (8)$$

Pour l'AN, on a $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = 8,8 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$ et on trouve $\eta \simeq 0,2$. On estime la masse $m = \rho a b e$ à $0,4 \text{ kg}$ (avec un $\rho = 2 \text{ g cm}^{-3}$) et donc $\sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \text{ s}^{-1}$ et $\omega = 5,5 \text{ s}^{-1}$.

Exercice 10 : un appontage rudimentaire

On considère un système de freinage de secours pour l'atterrissage d'un avion. Il s'agit d'une chaîne parfaitement flexible de masse linéique $\lambda = 10\text{kg/m}$ et disposé en longueur dans le sens de l'atterrissage (voir schéma). L'avion peut accrocher l'extrémité de cette chaîne et l'entraîner dans son mouvement, si bien qu'une partie de la chaîne est en mouvement et le reste est immobile. On décrira l'avion par une masse ponctuelle de masse $M = 10^4\text{kg}$ et on note $V_0 = 100\text{m/s}$ la vitesse de l'avion au moment où il accroche la chaîne. On suppose que la chaîne glisse sans frottement sur le tarmac.

- 1) Quelles sont les équations régissant le mouvement de l'avion atterrissant en supposant qu'il n'y a aucune force de frottement sur l'avion ? Les résoudre. L'avion peut-il s'arrêter uniquement avec ce dispositif ?
- 2) On suppose de plus que l'avion atterrit sur le ventre et est soumis à un frottement solide de coefficient $f = 0.5$. En combien de temps s'arrête-t-il ? Et sur quelle distance ?
- 3) Comment évolue l'énergie cinétique du système ?
- 4) Réaliser un modèle microscopique de la chaîne pour rendre compte de ce qui se passe.



Eléments de correction

L'énergie cinétique n'est pas conservée, si bien que la dernière question initie une discussion

à ce sujet (une fois cette propriété établie) permettant de faire le lien avec d'autres parties du programmes. On peut considérer qu'il s'agit d'un exercice sur les systèmes ouverts.

1) Lorsque l'avion a avancé de x , il a entraîné une masse $\lambda x/2$ (voir schéma) et force cette partie de la chaîne à aller à sa vitesse \dot{x} . Donc le PFD sans forces extérieures donne

$$(M + \lambda x/2)\ddot{x} + \lambda \dot{x}^2/2 = 0. \quad (1)$$

En effet, la masse en mouvement est $(M + \lambda x/2)$ et se déplace à une vitesse \dot{x} . On peut le voir soit comme un système ouvert, soit comme une système fermé avec une partie à vitesse nulle et une partie à vitesse \dot{x} . Eq. (1) est plus clair si écrit clairement comme la conservation de la quantité de mouvement, et

$$\frac{d}{dt} [(M + \lambda x/2)\dot{x}] = 0. \quad (2)$$

Pour résoudre il suffit de trouver la constante

$$(M + \lambda x/2)\dot{x} = MV_0. \quad (3)$$

Il vient alors

$$(M + \lambda x/2)dx = MV_0 dt \quad (4)$$

et donc (on met l'origine des temps à l'accrochage de la chaîne)

$$Mx + \lambda x^2/4 = MV_0 t, \quad x = \frac{2M}{\lambda} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{V_0 t \lambda}{M}} \right]. \quad (5)$$

On trouve que la distance ne fait que croître avec le temps même si la vitesse décroît puisque

$$\dot{x} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{V_0 t \lambda}{M}}} = \frac{V_0}{1 + \lambda x/(2M)}. \quad (6)$$

2) On peut refaire la même chose avec un frottement fMg .

$$\frac{d}{dt} [(M + \lambda x/2)\dot{x}] = -fMg, \quad (7)$$

$$(M + \lambda x/2)\dot{x} = MV_0 - fMgt. \quad (8)$$

On voit déjà qu'on s'arrête quand

$$t_{\text{stop}} = \frac{V_0}{fg} \quad (9)$$

donc en 20s avec les données du problème (un atterrissage sur le ventre violent...). On ne trouve aucune dépendance en M ni en λ et cela appelle un commentaire. C'est le même résultat que sans le cable, car il est immobile au début et à la fin. En revanche, la distance d'arrêt va dépendre de λ donc on a quand même un mouvement différent. On intègre en

$$Mx + \lambda x^2/4 = MV_0t - fMgt^2/2, \quad (10)$$

et on trouve alors

$$x = \frac{2M}{\lambda} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{M} (V_0t - fgt^2/2)} \right]. \quad (11)$$

Et on peut utiliser t_{stop} pour avoir la distance d'arrêt.

$$x_{\text{stop}} = \frac{2M}{\lambda} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda V_0^2}{2fMg}} \right]. \quad (12)$$

3) Le travail des forces de frottement est simplement $W = -fMgx$ et donc le travail total est $W_{\text{tot}} = -fMgx_{\text{stop}}$. L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}(M + \lambda x/2)\dot{x}^2. \quad (13)$$

Son évolution est avec (7)

$$\dot{E}_c = \dot{x}(M\ddot{x} + \lambda x\ddot{x}/2 + \lambda \dot{x}^2/4) = \dot{x}(-fMg - \lambda \dot{x}^2/4) \quad (14)$$

Le premier terme de cette dernière expression est la puissance des forces de frottements, et s'il n'y avait que lui on aurait $\Delta E_c = -fMgx_{\text{stop}} = W_{\text{tot}}$. Mais on a le second terme qui indique qu'on a perdu de l'énergie cinétique ailleurs. C'est d'ailleurs pour ça qu'on a une distance d'arrêt plus courte. On a moins besoin du travail des forces de frottement car il y a quelque part d'autres forces non conservatives qui ont agi. On remarque que dans le cas initial sans frottement $f = 0$ on a $\dot{E}_c = -\lambda \dot{x}^3/4$. Ca ne suffit pas à arrêter l'avion tout seul mais l'énergie cinétique est réduite.

4) On peut voir le cable ou la chaîne comme une série d'oscillateurs harmoniques couplés. Quand on rajoute un nouvel élément du cable, c'est comme si on rajoutait un nouvel oscillateur à la chaîne, mais sans lui donner la même condition initiale de vitesse que les autres qui ont déjà été entraînés. Si on modélise le problème de cette manière on peut passer au continu en notant $\varphi(x)$ le champ de déplacement des oscillateurs. Si on ne met aucune dissipation alors le passage au continu donnera

$$\partial_{tt}\varphi - c^2\partial_{xx}\varphi = 0, \quad (15)$$

et notre rajout d'élément revient à mettre une condition initiale $\dot{\varphi} < 0$ juste au début de la chaîne (dans le référentiel en mouvement avec la partie mobile de la chaîne). On va avoir une onde sonore longitudinale qui va se propager. Mais une fois arrivée sur l'avion elle va rebondir en arrière. C'est là qu'on voit qu'il faut rajouter quelque-chose car si la perturbation initiale a fait un aller-retour, on n'a pas réussi à forcer l'élément rajouté à suivre la vitesse \dot{x} .

Pour rendre compte du phénomène, une modification simple est de rajouter un frottement. On peut imaginer que le cable ou la chaîne est comme une chaîne d'oscillateurs, mais qui frottent sur qqch de manière visqueuse et lui transfèrent de la quantité de mouvement. On aurait donc plutôt

$$\partial_{tt}\varphi + \gamma\partial_t\varphi - c^2\partial_{xx}\varphi = 0. \quad (16)$$

et une onde amortie. L'amortissement conservant la quantité de mouvement totale, l'onde s'arrête quand tous les éléments ont la même vitesse correspondant à cette conservation. Au passage on a perdu de l'énergie cinétique dans ces frottements visqueux et cela a chauffé le cable. Cela fonctionne si $c \ll \dot{x}$ et donc si l'onde sonore a la temps de distribuer et uniformiser la quantité de mouvement. La vitesse du son dans les solides étant plus grande que dans l'air, on est tranquilles dans le cas de l'avion qui ne va pas se poser à Mach 3...

Une autre direction pour décrire le phénomène est d'invoquer directement une analogie entre l'onde longitudinale dans le solide et les ondes acoustiques qui se dissipent par viscosité. La discontinuité de vitesse sur l'élément qu'on rajoute induit un saut de pression (et donc de tension), qui se propage mais se dissipe par viscosité. Avec cette approche, l'équation pour la vitesse dans la chaîne vu comme une cable solide satisfait (la même dérivation que d'habitude

mais en gardant la viscosité)

$$\partial_{tt}v - c^2\partial_{xx}v = \frac{\eta}{\rho}\partial_{xx}\partial_tv. \quad (17)$$

On peut étudier la relation de dispersion pour voir comment une condition initiale de vitesse non-uniforme se dissipe.

Exercice 11 : corde qui tombe

On considère une corde de longueur l et de masse linéique μ suspendue par une de ses extrémités à un plafond, l'autre bout étant libre. A l'instant initial, on amène le bout libre de la corde au niveau du plafond, à coté de l'attache. La corde est alors pliée en 2 et l'ensemble est au repos. On lâche alors le bout libre et la corde va se déplier. On suppose que ce mouvement s'effectue sans dissipation de chaleur.

Combien de temps va mettre la corde à se déplier complètement? Commenter.

On donne:

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x(2-x)}} \simeq 1.2$$

Eléments de solution

On prend l'axe (z) vertical avec $z = 0$ au niveau du plafond et sens des $z > 0$ vers le bas. Lorsque le bout libre de la corde est à la cote z , le pli de la corde est en $l/2 + z/2$. La partie de la corde qui tombe à la vitesse \dot{z} (le mouvement de chaque point de la partie qui tombe est le même) a donc pour longueur: $l/2 + z/2 - z = l/2 - z/2$. L'énergie cinétique de la corde est donc:

$$E_c = \frac{1}{4}\mu(l-z)\dot{z}^2.$$

C'est bien l' E_c de toute la corde puisque l'autre coté de la corde est au repos.

Pour l'énergie potentielle, il faut faire attention. On prend $E_p(t=0) = 0$. Alors, lorsque le bout libre est en z , $E_p < 0$ (puisque un opérateur devrait fournir de l'énergie pour remettre la

corde comme elle était au départ). La partie de la corde qui était entre $z = 0$ et z s'est répartie des 2 cotés entre les cotes: $z = l/2 + z/2$ et $z = l/2$ (qui a pour barycentre: $(l + z/2)/2$).

Donc:

$$E_p = -\mu g z/2[(l + z/2)/2 - z/4] - \mu g z/2[(l + z/2)/2 - 3z/4].$$

Soit:

$$E_p = -\frac{\mu g z}{4}(2l - z).$$

Donc:

$$E = \frac{1}{4}\mu(l - z)\dot{z}^2 - \frac{\mu g z}{4}(2l - z) = 0,$$

car 0 est la valeur de l'énergie à l'instant initial et E est conservée. On suppose qu'il n'y a pas de chaleur dissipée. Ce qui donne:

$$\ddot{z} = g + g \frac{z(2l - z)}{(l - z)^2} > g.$$

$$T = \int dt = \int dz/|\dot{z}| = \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{\frac{gz(2l-z)}{l-z}}} \simeq 1.2\sqrt{\frac{l}{g}} < \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Commentaire: le fait que \ddot{z} soit plus grand que g vient du fait qu'il y a une tension T au niveau du pli de la corde:

$$\mu \frac{l - z}{2} \ddot{z} = T + \mu \frac{l - z}{2} g.$$

Ce qui donne: $T = \dots$ Attention: $T = \infty$ en $z = l$ car il n'y a plus conservation de l'énergie à ce niveau. La tension de la corde au niveau de l'attache du plafond est:

$$T' = T + \mu g \frac{l + z}{2}.$$

Exercice 12 : corde suspendue

Une corde inextensible de masse linéique μ et longueur $L = 10$ m est suspendue par l'une de ses extrémités. On impose à ce point d'attache un mouvement horizontal $x(t) = x_0 \cos \omega t$ avec $x_0 = 5$ cm avec $\omega = 10$ s⁻¹.

Déterminer les positions $x(t, z)$ de la corde à la hauteur z .

Eléments de solution

On prend z dirigé vers le bas avec l'attache en $z = 0$. L'approximation des petits x consiste à supposer que $(\frac{dx}{dz})^2 \ll 1$, en particulier l'angle $\alpha(z)$ que fait la corde avec la verticale à la cote z est petit et $\sin \alpha(z) \simeq \tan \alpha(z) = \frac{dx(z)}{dz}$. On pourra aussi confondre z_{\max} avec la longueur L . La tension de la corde à z est donnée par le poids de la corde "en dessous", soit $T(z) = \mu(L - z)g$. On regarde un élément de la corde entre z et $z + dz$. En z la tension est $-T(z)(\sin \alpha(z), \cos \alpha(z))$ et à $z + dz$ elle est $T(z + dz)(\sin \alpha(z + dz), \cos \alpha(z + dz))$. On projette sur \vec{e}_x et on a le PFD

$$\begin{aligned} dz\mu \frac{d^2x}{dt^2} &= T(z + dz) \sin \alpha(z + dz) - T(z) \sin \alpha(z) = dz \frac{d}{dz} \left(T(z) \sin \alpha(z) \right) \\ &= -\mu g \frac{dx(z)}{dz} dz + \mu g(L - z) \frac{d^2x(z)}{dz^2} dz \end{aligned} \quad (1)$$

soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \frac{dx}{dz} + g(L - z) \frac{d^2x}{dz^2} . \quad (2)$$

Pour des petits z ($z \ll L$) on pourra remplacer $(L - z)$ par L et chercher une solution de la forme $x(t, z) = x_0 \text{Re} [e^{i\omega t - ikz}]$. Pour $z = 0$ on a bien le mouvement imposé $x_0 \cos \omega t$. L'éq (2) donne alors $\omega^2 = igk + gLk^2$, soit $k = \frac{i}{2L} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{gL} - \frac{1}{4L^2}}$, soit

$$x(t, z) \simeq x_0 e^{\frac{z}{2L}} \cos \left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2}{gL} - \frac{1}{4L^2}} z \right] \quad \text{tant que } L - z \simeq L . \quad (3)$$

Le choix du signe devant la racine indique que les ondes se propagent du point d'attache vers le bout libre, et pas l'inverse. (Cependant, en réalité, il y a une sorte de réflexion au bout libre et on aura bien une superposition des deux solutions avec les deux signes.) L'amplitude des oscillations augmente exponentiellement avec z , mais cette solution n'est approximativement valable que si $(L - z) \simeq L$, disons jusqu'à $z \simeq \frac{L}{4}$. Ici $\sqrt{\frac{\omega^2}{gL} - \frac{1}{4L^2}} \simeq 1 \text{ m}^{-1}$ et les variations de l'argument du cos avec z sont donc bien plus rapides que la variation de la tension $\sim (L - z)$. On obtient alors une solution approchée en remplaçant simplement L par $L - z$:

$$x(t, z) \simeq x_0 e^{\frac{z}{2(L-z)}} \cos \left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega^2}{g(L-z)} - \frac{1}{4(L-z)^2}} z \right] \quad \text{tant que } L - z \geq 1 \text{ m}^{-1} . \quad (4)$$

On observe toujours l'amplification exponentielle de l'amplitude lorsque z augmente. Au voisinage de $z \simeq L$ on pose $\xi = L - z$ et (2) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \frac{dx}{d\xi} + g\xi \frac{d^2x}{d\xi^2} . \quad (5)$$

En fait, (5) est strictement équivalent à (2). L'ansatz $x(t, \xi) = e^{i\omega t} f(\xi)$ conduit à

$$\xi f'' + f' + \frac{\omega^2}{g} f = 0 , \quad (6)$$

ce qui est une équation différentielle connue (éq de Bessel). La solution exacte est donc donnée en termes de la bonne combinaison linéaire des deux solutions de (6) (fonctions de Bessel) $f(\xi) = c_1 f_1(\xi) + c_2 f_2(\xi)$. Les constantes c_i sont déterminées telles que $f(L) = x_0$ et par une deuxième condition au bout libre, en $\xi = 0$, à savoir $\frac{dx}{d\xi} = 0$.

Exercice 13 : particule chargée dans une onde électromagnétique

On veut caractériser le mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique de basse fréquence.

1) Soit un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_x$ et un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_y$. On néglige le poids. Quel est le mouvement d'une particule de charge q et de masse m initialement au repos à $t = 0$?

2) Pourquoi ne peut-on utiliser le résultat précédent pour étudier le mouvement d'une particule chargée dans une onde plane progressive monochromatique de fréquence Ω si $qE/(mc) \gg \Omega$.

3) On suppose que la fréquence de l'onde vérifie $qE/(mc) < \Omega$. Déterminer le mouvement de particule chargée. On pourra effectuer un développement en $qE/(mc\Omega)$ et on choisira des conditions initiales pour cette particule qui impliquent un mouvement confiné.

Eléments de solution

1) Les équations du mouvement donnent

$$\ddot{x} = \frac{q}{m}E - \frac{q\dot{z}}{m}B \quad (1)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \frac{q\dot{x}}{m}B. \quad (3)$$

On pose $\omega = qB/m$ la fréquence synchrotron. La résolution se fait facilement en posant $Z = \dot{x} + iz$ et on trouve

$$\dot{Z} = i\omega Z + \frac{q}{m}E. \quad (4)$$

On choisit de partir sans vitesse initiale et à l'origine du système de coordonnées et on trouve (en y c'est évident c'est constant)

$$\dot{x} = \frac{E}{B} \sin(\omega t) \quad (5)$$

$$\dot{z} = \frac{E}{B} [1 - \cos(\omega t)], \quad (6)$$

$$x = \frac{E}{B\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (7)$$

$$z = \frac{E}{B} \left[t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]. \quad (8)$$

Là il est intéressant de tracer et d'interpréter. Malgré le champ selon \vec{e}_y on a une dérive selon z . La particule accélère selon x , et le champ magnétique la fait tourner jusqu'à rebiquer et rebrousser chemin en x si bien que le champ électrique la ralentit et elle finit par s'arrêter et ça recommence. On a une cycloïde. Ou plutôt un mouvement de rotation sur un cercle de rayon $R = E/(B\omega)$ avec la coordonnée z du centre du cercle va comme $(E/B)t$ On a donc comme pour un roulement sans glissement $v_z^{\text{centre}} = R\omega$.

2) Si ce champ croisé est en fait une onde plane de très basse fréquence alors $E = Bc$ et la vitesse de dérive est celle de la lumière. Pire que ça, comme dans une cycloïde la vitesse sur le bord du cercle est double quand le point est en haut, on a même une vitesse à $2c$ quand

$\omega t = \pi$. C'est donc impossible et de plus l'expression de la force de Lorentz utilisée était non relativiste. On pourrait choisir une condition initiale telle qu'on n'aurait pas cette dérive, mais on aurait toujours le mouvement sur un cercle à la vitesse constante c .

3) Si $qE/(mc) < \Omega$ donc $\omega < \Omega$ alors ce mouvement de cycloïde n'a jamais le temps de se mettre en place. On peut donc étudier le mouvement. En effet, si $\omega \ll \Omega$ alors la vitesse typique atteinte est $qE/(m\Omega) = c\omega/\Omega$ (l'accélération pendant une période de l'onde électromagnétique). Donc on peut faire le rapport de l'accélération de Lorentz sur l'accélération du champ électrique et c'est de l'ordre

$$(c\omega/\Omega)(B/E) = \omega/\Omega. \quad (9)$$

Donc considérer ω/Ω petit revient à considérer que l'effet principal vient du champ électrique et l'effet secondaire du champ magnétique.

On considère une onde plane

$$E_x = E \cos[\Omega(t - z/c)] \quad (10)$$

$$B_y = E/c \cos[\Omega(t - z/c)] \quad (11)$$

et on va d'abord la regarder en $z = 0$. Clairement on va faire une erreur car la particule va se déplacer selon z un peu mais ça va venir aux ordres supérieurs. On va faire une résolution itérative et on pose

$$\alpha = \omega/\Omega = \frac{qE}{mc\Omega}, \quad (12)$$

comme le petit paramètre.

On cherche une solution de la forme $v_x = v_x^{(0)} + v_x^{(1)} + \dots$ et pareil pour v_z et les positions.

A l'ordre le plus bas de (1) on trouve (on choisit judicieusement les conditions initiales pour éviter toute dérive) juste l'effet du champ électrique

$$v_x^{(0)} = c\alpha \sin(\Omega t) \quad (13)$$

$$v_z^{(0)} = 0 \quad (14)$$

(toujours en mettant des conditions initiales sans problème de dérive)

$$x^{(0)} = -\frac{c\alpha}{\Omega} \cos(\Omega t) \quad (15)$$

$$z^{(0)} = 0 \quad (16)$$

et donc pas de déplacement selon z . Ensuite quand on regarde l'ordre suivant il vient

$$\dot{v}_x^{(1)} = 0 \quad (17)$$

$$\dot{v}_z^{(1)} = \frac{qB_y}{m} v_x^{(0)}. \quad (18)$$

On a donc une correction uniquement sur v_z . On trouve (avec les conditions initiales qui vont bien)

$$\dot{v}_z^{(1)} = \frac{qE}{mc} \frac{qE}{m\Omega} \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) \quad (19)$$

et donc

$$v_z^{(1)} = -\frac{c}{4} \alpha^2 \cos(2\Omega t), \quad (20)$$

$$z^{(1)} = -\frac{c}{8\Omega} \alpha^2 \sin(2\Omega t). \quad (21)$$

Pour continuer il faudrait commencer à prendre en compte que l'onde ne peut plus être évaluée en $z = 0$ et c'est un effet d'ordre α^3 . En tout cas le mouvement est jusqu'à l'ordre α^2

$$x = -\frac{c\alpha}{\Omega} \cos(\Omega t) \quad (22)$$

$$z = -\frac{c}{8\Omega} \alpha^2 \sin(2\Omega t) \quad (23)$$

On est plus du tout sur le mouvement d'un cercle mais on a une forme de 8. On quitte le régime linéaire et on n'a plus pour le plasma une relation de type $\dot{\vec{j}} = nq/m\vec{E}$. Si on met des nombres on voit qu'en pratique il faut des champs très intenses pour commencer à avoir α non négligeable ou alors des basses fréquences. Mais on trouve quand même

$$q/(m_e c) \simeq 500 \text{Cs/kg/m}, \quad (24)$$

donc à basse fréquence (par exemple $\Omega = 1 \text{ kHz}$) il faudrait $E = 1V/m$ pour avoir un α non négligeable.

Exercice 14 : corde secouée

Une corde inextensible de masse linéique ρ et de longueur L est suspendue par l'une de ses extrémités et libre à l'autre bout. Elle pend verticalement (axe (z)). On s'intéresse aux petits mouvements suivant la perpendiculaire à cet axe lorsque l'on secoue (faiblement) la corde suivant un axe horizontal (x) .

Dans ces conditions, quelle est la plus petite fréquence pour une onde stationnaire qui peut exister sur cette corde?

Indications:

On pourra étudier un développement en série entière des solutions stationnaires de l'équation obtenue pour des petites oscillations suivant (x) de la corde, écrite avec des variables adimensionnées.

Si besoin, on admettra que l'équation:

$$1 - x + x^2/2!^2 - x^3/3!^2 + x^4/4!^2 - x^5/5!^2 + \dots = 0$$

a comme plus petite racine: $x_{min} \simeq 3/2$.

Eléments de solution

Le début de l'exercice repose sur le cours sur les cordes vibrantes, avec une variation qui est que l'on considère la corde vibrante comme suspendue. La fin de l'exercice est plus subtile.

La tension le long de la corde (en z) est: $T(z) = \rho g(L - z)$, c'est le poids de la corde située sous z . Alors, l'équation des petites oscillations suivant (x) s'écrit:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial z} \left[(L - z) \frac{\partial x}{\partial z} \right].$$

Soit:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g \frac{\partial x}{\partial z}.$$

On ne s'intéresse qu'aux ondes stationnaires, donc ici, de la forme: $x(z, t) = \cos(\omega t)f(z)$, ce qui donne:

$$-\omega^2 f = gL\left(1 - \frac{z}{L}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - g \frac{\partial f}{\partial z}.$$

L'énoncé indique de se placer en variable adimensionnée. On multiplie alors cette équation par L , puis on introduit: $\xi = z/L$. L'équation devient:

$$-(\omega^2 L/g)f = (1 - \xi) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Soit, avec $\Lambda = \omega^2 L/g$:

$$(1 - \xi) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Lambda f = 0.$$

C'est l'équation pour les petites oscillations horizontales (stationnaires) de la corde. Les conditions aux limites sont que la corde est fixée en $z = 0$, soit $f(\xi = 0) = 0$ et que les mouvements sont d'amplitudes finies en $z = L$, soit $f(\xi = 1) < \infty$. C'est tout ce que l'on sait.

Idéalement, on cherche à résoudre cette équation, puis appliquer les conditions aux limites, ce qui doit donner les solutions en ondes stationnaires avec des conditions sur les fréquences possibles, et donc que Λ ne peut prendre que quelques valeurs dénombrables. Pour répondre à la question de l'énoncé, on doit alors trouver la fréquence la plus petite. Pour aller dans cette direction, il faut suivre l'indication de l'énoncé et chercher un développement en série entière pour $f(\xi)$. Naturellement, on a tendance à écrire: $f(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n \xi^n$ (avec $a_0 = 0$), puis l'équation pour $f(\cdot)$ donne une relation entre a_{n+2} , a_{n+1} et a_n . Alors on est bloqué car on ne pourra jamais aller dans la direction voulue avec cela.

Arrivé à ce point, il faudra fournir une indication. Il ne faut pas poser: $f(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n \xi^n$ mais $f(\xi) = \sum_{n \geq 0} a_n (1 - \xi)^n$, avec $f(\xi = 1)$ fini et

$$f(0) = \sum_{n \geq 0} a_n = 0.$$

Dans ce cas, la relation de récurrence issue de l'équation pour $f(\cdot)$ devient:

$$(n + 1)na_{n+1} + (n + 1)a_{n+1} + \Lambda a_n = 0.$$

Que l'on peut facilement résoudre: $a_n = -(\Lambda/n^2)a_{n-1}$, soit: $a_n = (-\Lambda)^n/(n!^2)a_0$. Ensuite, l'équation $f(0) = 0$ devient:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-\Lambda)^n}{n!^2} = 0.$$

En suivant l'indication donnée dans l'énoncé, on trouve alors la plus petite valeur de Λ possible solution de cette relation, soit: $\Lambda_{min} = 1.5 = \omega_{min}^2 L/g$. On obtient alors la plus petite fréquence possible pour une onde stationnaire dans les conditions du montage: $\nu_{min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1.5g/L}$, ce qui conclut.

Exercice 15 : courant dans un cylindre

Un cylindre en cuivre de rayon $R = 1$ cm et longueur $L = 1$ m est parcouru par un courant $I = 100$ A.

1) *En régime stationnaire, déterminer autant que possible les champs électrique et magnétique. Si le cylindre est thermoisolé, déterminer l'élévation de sa température après une heure.*

2) *Faire un bilan local d'énergie.*

La masse molaire du cuivre est de 63 g mol^{-1} , sa masse volumique de $\rho = 9 \text{ g cm}^{-3}$, sa conductivité électrique de $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ A V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ et sa capacité thermique massique de $c_m = 380 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Eléments de solution

1) En première approximation le courant est uniforme, $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$. Pour avoir ce courant, on a forcément un champ électrique externe

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{\sigma} \vec{j} = \frac{I}{\pi R^2 \sigma} \vec{e}_z, \quad (1)$$

ce qui correspond à une tension entre les deux bords du cylindre de $V_0 = E_0 L = \frac{IL}{\pi R^2 \sigma} \simeq 5 \times 10^{-3} \text{ V}$.

Le courant \vec{j} crée un champ magnétique $\vec{B} = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta$. Ce champ exerce une force volumique sur les porteurs de charge du courant $\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} = \mu_0 I^2 \frac{r}{2\pi^2 R^4} \vec{e}_r$. Cette force conduit à une séparation des charges positives et négatives et donc une création d'un champ électrique (de Hall) selon \vec{e}_r qui équilibrera cette force: $\rho \vec{E}_H + \vec{j} \wedge \vec{B} = 0$. Avec $\rho = ne$ on a

$$\vec{E}_H = -\frac{\mu_0 I^2}{ne} \frac{r}{2\pi^2 R^4} \vec{e}_r \quad (2)$$

et donc une différence de potentiel (de Hall) entre le centre $r = 0$ et le bord $r = R$ de $V_H = \int_0^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 n e R^2}$.

On peut leur demander d'estimer V_H en prenant un électron libre par atome de cuivre. Avec $\frac{9}{63} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}$ cela donne environ $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$ et donc $ne \simeq 10^{10} \text{ C m}^{-3}$. On a $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ kg m C}^{-2}$ et donc $V_H \simeq \frac{10^{-9} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{\pi \text{ C}} \simeq 3 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{C}} = 3 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Ws}}{\text{C}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ V}$, soit $\frac{V_H}{V_0} \simeq 10^{-7}$.

Pour calculer l'effet Joule, on peut complètement négliger \vec{E}_H . La puissance volumique dissipée est donc

$$\dot{u} = \vec{E}_0 \cdot \vec{j} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\pi^2 \sigma R^4} \quad (3)$$

La capacité thermique volumique est $c_{\text{vol}} = \rho c_m$ et $\dot{u} = \rho c_m \frac{dT}{dt}$, soit

$$\Delta T = \frac{\dot{u}}{\rho c_m} \Delta t = \frac{I^2}{\pi^2 \sigma R^4 \rho c_m} \Delta t \simeq 5 \times 10^{-4} \text{ K s}^{-1} \Delta t \quad (4)$$

Cela fait une augmentation de la température de 2 K environ en une heure.

2) L'énergie dissipée est amenée par le champ électromagnétique. Le flux est donné par le vecteur de Poynting

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \wedge \vec{B} = -\frac{I^2 r}{2\pi^2 R^4 \sigma} \vec{e}_r = -\frac{I^2}{2\pi^2 R^4 \sigma} \vec{r} \quad (5)$$

Le flux d'énergie est radial et pas selon \vec{e}_z comme on pourrait croire naïvement ! On a (dans le plan) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 2$ et donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\frac{I^2}{\pi^2 R^4 \sigma} \Rightarrow \dot{u} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}}, \quad (6)$$

ce qui est le bilan souhaité car $-\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}}$ correspond bien au flux entrant dans un volume élémentaire.

Exercice 16 : vitesse de l'effet dominos

On considère une ligne de dominos alignés verticalement sur une table. Ils sont séparés les uns des autres par des espaces de longueur s , ont une largeur D et une hauteur h . On suppose que la largeur est négligeable devant la hauteur ($D \ll h$), que les dominos ne peuvent que basculer mais pas glisser sur la table. On cherche à étudier la dynamique de l'avancement du front de renversement des dominos.

1) Lorsque les dominos sont renversés les uns sur les autres, relier l'angle de basculement (par rapport à la verticale) d'un domino en fonction de celui de ses voisins. 2) En supposant $s \ll h$, adopter une description continue de l'angle de basculement et calculer sa forme $\theta(x)$, où x est la coordonnée selon la direction de l'alignement des dominos, en fonction de la longueur totale ℓ de dominos ayant basculé.

3) Calculer l'énergie mécanique des dominos en fonction de la vitesse v d'avancement du front de renversement des dominos.

4) En supposant l'énergie mécanique constante en déduire la vitesse asymptotique. Discuter les hypothèses et trouver une amélioration de la description de l'effet domino.

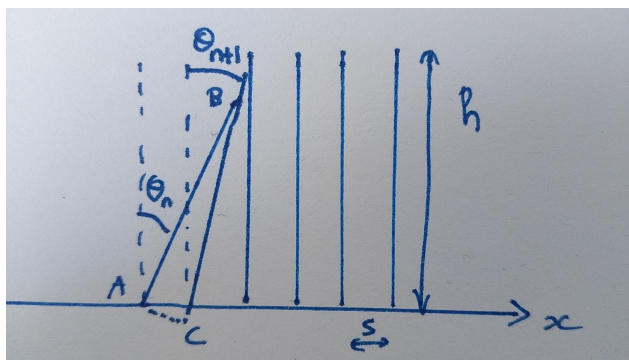
Aide : le moment d'inertie d'un solide rectangulaire (de côtés a et b et de masse m) associé à une rotation autour d'un de ses coins est $I = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$.

Eléments de solution

1) Il existe au moins trois méthodes et toutes font appel à de la trigonométrie de base. La plus immédiate consiste à utiliser le fait que dans un triangle les rapports du sinus d'un angle avec la longueur du côté opposé sont constants. Une autre méthode plus analytique consiste à exprimer la position du point de contact de deux dominos, une fois pour un domino et une fois pour l'autre. Une troisième méthode consiste à exprimer de deux manières différentes AC (voir figure) où l'angle \widehat{ACB} est droit. On a $AC = s \cos \theta_{n+1}$ mais aussi $AC = h \sin(\theta_n - \theta_{n+1})$

donc

$$h \sin(\theta_n - \theta_{n+1}) = s \cos \theta_{n+1}. \quad (1)$$



2) Le passage au continu peut se faire à partir de la relation précédente ou en réitérant la méthode mais pour des infinitésimaux. θ_n devient $\theta(x)$. On obtient

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\cos \theta}{h}. \quad (2)$$

On voit que l'angle varie essentiellement sur une longueur de l'ordre de h . Bien à l'arrière du front, les dominos restent figés dans une position horizontale, complètement tombés les uns sur les autres. On va vérifier par la résolution. La résolution procède facilement par le changement de variable $u = \sin \theta$ (suggéré aux candidats) et en se souvenant que $\operatorname{arctanh}'(x) = 1/(1-x^2)$. On obtient en effet

$$\operatorname{arctanh}(u) = -\frac{x}{h} + \text{Cte} \quad (3)$$

et la constante est déterminée par le fait qu'au front d'onde localisé à une distance ℓ , les dominos sont verticaux et $\theta(\ell) = 0$. Il vient

$$\theta = \arcsin[\tanh((\ell - x)/h)], \quad \cos \theta = \frac{1}{[\cosh((\ell - x)/h)]^2} \quad (4)$$

On peut tracer $\cos \theta$ et on voit bien que pour une distance $\gg h$ à l'arrière du front, c'est très petit et donc $\theta \simeq \pi/2$, c'est-à-dire les dominos sont complètement allongés.

3) La somme sur les dominos est remplacée par une intégrale ($\sum_i \rightarrow \int_0^\ell s^{-1} dx$). L'énergie potentielle est simplement

$$E_p = \int \frac{mgh}{2} (\cos \theta - 1) \frac{dx}{s} \quad (5)$$

$$= \frac{mgh}{2} \left[\frac{h}{s} \int_0^\ell \frac{dx}{h \cosh((\ell - x)/h)} - \frac{\ell}{s} \right] \quad (6)$$

Et quand $\ell \gg x$ le premier terme est négligeable. Essentiellement l'énergie potentielle est réduite par le fait que tous les dominos jusqu'à ℓ sont tombés sur le table.

Pour l'énergie cinétique il faut $\dot{\theta}(x)$. Il faut bien comprendre que θ est en fait une fonction de (x, ℓ) qui d'ailleurs est en fait une fonction de $x - \ell$, donc

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial \ell} v = - \frac{\partial \theta}{\partial x} v = \frac{v}{h} \cos \theta, \quad (7)$$

car $v = \dot{\ell}$ est la vitesse d'avancement du front. Le moment d'inertie de chaque domino est $I = mh^2/3$ et donc

$$E_c = \frac{I}{2} \int \dot{\theta}^2 \frac{dx}{s} \quad (8)$$

$$= \frac{mhv^2}{6s} \int \frac{1}{\cosh^2((\ell - x)/h)} \frac{dx}{h} \quad (9)$$

$$= \frac{mhv^2}{6s} \tanh(\ell/h) \quad (10)$$

4) Cette hypothèse est discutable car les chocs ne sont pas élastiques en vrai, et puis le glissement des dominos les uns sur les autres apporte aussi sont lot de forces de Coulomb. L'autre hypothèse extrême qui consiste à dire que les dominos restent collés sans rebondir est aussi incorrecte quand on voit les films de dominos au ralenti. Bref, la conservation de l'énergie mécanique est un cas extrême peu réaliste. En utilisant que $\tanh(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow \infty$ et en gardant le terme dominant dans E_p on trouve

$$v \rightarrow \sqrt{3g\ell}. \quad (11)$$

Comme seulement les dominos sur une longueur typique h basculent et donc ont de l'énergie cinétique, mais que l'énergie potentielle apportée est linéaire en ℓ car provenant de la bascule de tous les dominos déjà tombés, la vitesse augmente.

NB) En réalité, l'énergie n'est en fait pas conservée, ni d'ailleurs l'impulsion, ni d'ailleurs le moment cinétique, voir [arXiv:physics/0401018](https://arxiv.org/abs/physics/0401018).

Exercice 17 : corde sur table

Une corde de longueur L (de masse linéique σ) est enroulée sur elle-même pour former un tas sur une table, excepté pour une toute petite partie de la corde qui pend en passant par un trou fait dans la table. La corde est alors laissée libre et commence à glisser à travers le trou. Le mouvement de la corde se fait sans frottement. Dans ce montage, on admet que seule la partie de la corde qui arrive au niveau du trou et en dessous est en mouvement. La partie de la corde qui est posée en tas sur la table ne bouge pas (sauf quand elle arrive au niveau du trou).

Déterminer l'énergie cinétique de la corde lorsqu'elle quitte complètement la table (toute la corde a passé le trou). En déduire qu'il y a une quantité de chaleur $Q > 0$ dissipée lorsque la corde quitte complètement la table dans ce montage.

Eléments de solution

Le première partie de la question consiste à faire un bilan de quantité de mouvement pour un système mécanique de masse variable. C'est donc proche du cours qui traite le cas de la fusée ou d'une avalanche. Il y a une petite variation par rapport au cours car, ici, la résolution de l'équation du mouvement demande de réfléchir un peu. La deuxième partie utilise ce résultat pour une observation un peu subtile (comme souvent en mécanique).

On note $x = x(t)$ la partie de la corde qui pend en-dessous du trou. Sa masse est donc σx et l'équation du mouvement pour ce morceau de corde s'écrit:

$$\frac{d(\sigma x \dot{x})}{dt} = \sigma x g.$$

Soit:

$$x \ddot{x} + \dot{x}^2 = x g.$$

Pour trouver l'énergie cinétique de la corde lorsqu'elle a complètement passé le trou, il faut obtenir le temps T tel que: $x(T) = L$ puis la vitesse \dot{x} pour $t = T$. Il faut donc résoudre l'équation ci-dessus. C'est une variation par rapport au cours car, ici, il faut garder un sens physique pour trouver simplement la solution. On sait que le cas physique de ce problème est un mouvement de chute libre dans le champ de gravité g . Donc la solution ne peut être que de la forme: $x(t) = \alpha gt^2$ avec α un nombre sans dimension. On obtient alors: $2\alpha^2 + 4\alpha^2 = \alpha$, soit $\alpha = 1/6$. Donc: $x(t) = gt^2/6$ et $L = gT^2/6$. La vitesse de la corde lorsqu'elle a complètement quitté la table est alors:

$$v = \sqrt{\frac{2gL}{3}}.$$

Et son énergie cinétique:

$$E_c = \frac{\sigma L^2 g}{3}.$$

On peut maintenant faire un bilan d'énergie. Lorsque la corde est complètement en tas sur la table (sa vitesse est nulle), son énergie mécanique peut s'écrire comme:

$$E_1 = (\sigma L)gh,$$

où h est la hauteur du centre de gravité du tas de corde par rapport à la table que l'on prend comme origine. Lorsque la corde lorsqu'elle a complètement passé le trou, son énergie potentielle est: $(\sigma L)g(-L/2)$ et son énergie mécanique:

$$E_2 = \frac{\sigma L^2 g}{3} - \sigma g L^2 / 2.$$

En suivant l'énoncé, on écrit que l'énergie se conserve et on cherche la quantité de chaleur Q telle que:

$$(\sigma L)gh = \frac{\sigma L^2 g}{3} - \sigma g L^2 / 2 + Q = -\frac{\sigma L^2 g}{6} + Q.$$

Soit: $Q = \sigma Lg(L/6 + h) > 0$. Ce qui conclut.

L'énoncé ne demande pas d'explication. Ce n'est pas simple. Si on avait résolu le cas de la corde initialement tendue sur la table, il n'y aurait pas de dissipation de chaleur. Et dans ce cas, tous les points de la corde ont la même vitesse à un instant donné. Le fait que $Q > 0$ dans le montage de l'énoncé est donc clairement une conséquence du fait que la partie de la corde sur la table est immobile alors que la partie qui pend ne l'est pas. Ce qui se passe, c'est

qu'il y a un mouvement très soudain des éléments de la corde qui passent d'une vitesse nulle à non nulle au niveau du trou et c'est cet effet qui provoque une dissipation d'énergie sous forme de chaleur.

Exercice 18 : mise en rotation d'un cylindre rempli d'eau

Un tube cylindrique vertical de rayon $a = 2$ cm et de longueur $L = 1$ m, fermé à l'une de ses extrémités, est rempli presque entièrement d'eau. Le cylindre tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire variable $\omega(t)$.

Discuter les équations qui déterminent la vitesse $\vec{v}(t, \vec{r})$ d'un élément d'eau et la pression dans l'eau, ainsi que le profil de la surface de l'eau en fonction du temps. Discuter les différents régimes en fonction de la valeur de $\dot{\omega}/\omega$. (On pourra considérer par exemple $\omega = \omega_0 e^{\alpha t}$.)

Eléments de solution

On ne peut négliger la viscosité ici, sinon l'eau resterait immobile. On rappelle que pour l'eau la viscosité dynamique est $\eta \simeq 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, la masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, la dimension spatiale caractéristique ici est $a = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$. Donc

$$\frac{\eta}{\rho a^2} \simeq 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} . \quad (1)$$

On verra que l'inverse fournit une échelle de temps caractéristique de 400 s qui est le temps qu'il faut pour que la viscosité soit suffisante pour entraîner toutes les couches d'eau. Pour $\dot{\omega}/\omega < 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ on aura sensiblement la même distribution de vitesses que pour une situation stationnaire avec un ω constant. Par contre pour $\dot{\omega}/\omega > 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, seules les couches près du bord suivent la rotation imprégnée par le bord, alors que les couches plus près du centre ont un mouvement de rotation correspondant aux $\omega(t')$ aux temps antérieurs.

Par les symétries on s'attend à ce que $\vec{v}(t, \vec{x})$ soit dirigé selon \vec{e}_θ et indépendant de θ et z , au moins si on néglige les effets de bord ($a \ll L$). Certes, la surface libre de l'eau n'est pas plane et avec un ω variable cette surface se modifie au cours du temps et on a donc forcément une petite composante de \vec{v} selon \vec{e}_z . Nous allons faire l'hypothèse qu'elle est négligeable. De

même, la pression ne dépend que de r et z :

$$\vec{v}(t, \vec{x}) = v(t, r)\vec{e}_\theta \quad , \quad p = p(t, r, z) . \quad (2)$$

Dans la suite on n'écrira pas la dépendance en t explicitement. On traitera l'eau comme incompressible, ρ est constant, et donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui est satisfait par notre ansatz (2).

Pour écrire l'équation de Navier Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} - \rho g \vec{e}_z \quad (3)$$

on a besoin de $\Delta \vec{v}$ en coordonnées cylindriques (à fournir au candidat qui le demande).

Alternativement, on peut écrire $\vec{v} = \frac{v(r)}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ et calculer le Laplacien en cartésien. On trouve

$$\Delta (v(r)\vec{e}_\theta) = \left(v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} \right) \vec{e}_\theta . \quad (4)$$

Ensuite, $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v(r)\nabla_\theta = \frac{v(r)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$, donc

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{v(r)^2}{r} \vec{e}_r \quad (5)$$

Posons d'abord $p(r, z) = \tilde{p}(r, z) - \rho g z$ afin de tenir compte de l'effet du poids. On obtient alors la même équation que (3) mais avec \tilde{p} et sans le dernier terme. On substitue (4) et (5) et projette sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ pour obtenir

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \left(v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} \right) \vec{e}_\theta \quad , \quad \rho \frac{v(r)^2}{r} = \frac{\partial \tilde{p}(r)}{\partial r} . \quad (6)$$

La deuxième éq donne \tilde{p} une fois $v(r)$ connu:

$$p(r) = \tilde{p}(0) + \rho \int_0^r dr' \frac{v(r')^2}{r'} , \quad (7)$$

ce qui montre, bien sur, que la pression augmente avec r . On a alors $p(r, z) = \tilde{p}(0) - \rho g z + \rho \int_0^r dr' \frac{v(r')^2}{r'}$. La surface libre est déterminée par $p(r, z) = p_{\text{atm}}$, son profil est donné par

$$h(r) = \frac{1}{g} \int_0^r dr' \frac{v(r')^2}{r'} . \quad (8)$$

Finalement il reste à résoudre la première équation (6) avec les conditions aux bords

$$v(t, r = 0) = 0 \quad , \quad v(t, r = a) = a\omega(t) . \quad (9)$$

Ces conditions de bords permettent d'estimer le membre de droite de la première éq. (6) à $\eta \frac{a\omega}{a^2} = \frac{\eta\omega}{a}$ et le membre de gauche à $\rho a\dot{\omega}$. Le membre de gauche sera alors négligeable si $\frac{\dot{\omega}}{\omega} \ll \frac{\eta}{\rho a^2} \simeq 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Dans ce cas, une bonne approximation est la solution quasi-statique de $v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} = 0$ qui correspond à l'eau tournant avec le cylindre, soit $v(r) = r\omega(t)$. Dans ce cas (8) redonne le résultat bien connu $\Delta h(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$.

Si $\frac{\dot{\omega}}{\omega}$ est plus grand il faut résoudre l'équation aux dérivées partielles. On essaie la séparation des variables en posant $v(t, r) = g(t)f(r)$ ce qui conduit à

$$\dot{g} = \frac{\eta}{\rho} C g \quad \Rightarrow \quad g(t) = g(0)e^{\frac{\eta C}{\rho} t} , \quad (10)$$

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} = C f \quad (11)$$

La condition de bord $a\omega(t) = v(t, a) = g(t)f(a)$ donne $\omega(t) = \frac{g(0)f(a)}{a} e^{\frac{\eta C}{\rho} t}$. C'est donc convenable pour $\omega(t) = \omega_0 e^{\alpha t}$ avec

$$C = \frac{\rho\alpha}{\eta} \quad , \quad g(0)f(a) = a\omega_0 \quad (12)$$

Ensuite, l'équation (11) pour f admet forcément une solution (réelle) avec $f(0) = 0$ et $f(a) > 0$. Les conditions de bords sont alors satisfaites et on a une solution. En fait, la solution pour f est connue puisque (11) est l'équation de Bessel d'ordre 1: $f(r) = \text{Im } J_1(i\sqrt{C}r)$. Finalement, la solution s'écrit

$$v(t, r) = a\omega(t) \frac{f(r)}{f(a)} . \quad (13)$$

$f(a)$ fait intervenir l'argument $\sqrt{C}a = \sqrt{\frac{\rho\alpha^2 a}{\eta}}$. Si ce nombre est très petit, on a $f(r) = \text{Im } J_1(i\sqrt{C}r) \simeq r$ et on retrouve la solution quasi-stationnaire. Par contre si ce nombre est par exemple égal à 2, on a $\frac{f(r)}{f(a)} \simeq 0.62 \frac{r}{a} + 0.31 \frac{r^3}{a^3}$ pour $0 \leq r \leq a$ et on voit bien que la vitesse angulaire près de $r = 0$ est maintenant nettement inférieure à $\omega(t)$.

Exercice 19 : gravité anneau

On considère un anneau de masse M , que l'on modélise par un cercle de rayon R de centre O dans le plan Oxy , et de masse linéique $\lambda = M/(2\pi R)$. On cherche à caractériser le mouvement d'une particule ponctuelle dans le champ de gravité généré par cet anneau.

- 1) *Quelles sont les équations du mouvement d'une particule placée initialement proche du centre de l'anneau ?*
- 2) *Le moment cinétique de cette particule est-il conservé ?*
- 3) *Quel est le mouvement d'une particule placée initialement sur l'axe de symétrie Oz à l'infini ?*
- 4) *On rajoute une masse M_O en O . Jusqu'à quelle distance peut-on place une particule pour qu'elle reste proche de O ?*
- 5) *On considère une configuration de trois anneaux de rayon R de même masse, de même centre et respectivement dans les plans Oxy , Oyz et Oxz . Quel est le mouvement d'une particule proche du centre ?*

Eléments de solution

1) On utilise que le potentiel gravitationnel est en $1/r$ ce qui se trouve une fois le problème reformulé comme un problème d'électrostatique, et on somme les potentiels créés par chaque élément.

$$V(\vec{r}) = -G \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\phi}{|\vec{r} - \vec{\xi}(\phi)|} \quad (1)$$

où \vec{r} est la position du point où on calcule le champ et $\vec{\xi}$ est la position d'un élément de masse du cercle. Ici il faut choisir entre des coordonnées cylindriques ou des coordonnées sphériques. On peut faire l'un ou l'autre. Les cylindriques sont plus simples mais il faut bien distinguer l'angle ϕ pour la position dans le cercle de l'angle θ associé au point où on regarde le potentiel.

On a simplement

$$\vec{\xi}(\phi) = R\vec{e}_r(\phi) = R(\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) \quad (2)$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z = r(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) + z\vec{e}_z. \quad (3)$$

Etant données les symétries, on regarde un point dans le plan Oxz et donc $\theta = 0$. Il vient

$$|\vec{r} - \vec{\xi}| = \sqrt{(r - R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + R^2 + z^2 - 2rR \cos \phi}. \quad (4)$$

On fait un développement en $r \ll R$ et $z \ll R$. En utilisant

$$\sqrt{r^2 + R^2 + z^2 - 2rR \cos \phi} - R \sqrt{1 + \frac{r^2 + z^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \phi} \quad (5)$$

on développe

$$\frac{R}{\sqrt{r^2 + R^2 + z^2 - 2rR \cos \phi}} \simeq 1 + \frac{r}{R} \cos \phi - \frac{r^2 + z^2}{2R^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2r \cos \phi}{R} \right)^2. \quad (6)$$

On peut donc calculer (1) en utilisant que la moyenne de \cos est nulle et celle de \cos^2 donne $1/2$. Et on trouve

$$V \simeq -\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} - \frac{z^2}{2R^2} \right). \quad (7)$$

Si on le veut en Cartésien on utilise juste $r^2 = x^2 + y^2$. En voyant que ce potentiel diminue quand r augmente à z fixe, on réalise bien l'instabilité qui pousse à s'écartier vers le cercle.

On trouve l'accélération gravitationnelle

$$\vec{a} = \frac{GM}{R^3} \left(\frac{r}{2} \vec{e}_r - z \vec{e}_z \right). \quad (8)$$

On peut discuter qualitativement que c'est comme un ressort sur l'axe z mais en revanche répulsif dans la direction radiale. Si on veut les équations du mouvement il faut juste utiliser la formule générale de l'accélération en cylindrique. Mais on ne va pas résoudre (sauf pour la coordonnée z ou c'est facile).

2) Le vecteur $O\vec{M}$ en coordonnées cylindriques est $r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ donc la force n'est pas centrale.

3) Sur l'axe, $r = 0$, et on peut calculer le potentiel et la force exactement. Le potentiel est

$$V = -\frac{GM}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad (9)$$

et la conservation de l'énergie mécanique donne

$$\frac{\dot{z}^2}{2} = \frac{GM}{\sqrt{z^2 + R^2}}. \quad (10)$$

On peut pas résoudre simplement, mais pour $z \ll R$ on retrouve l'équation harmonique comme vu précédemment.

4) Avec cette masse au centre, on rajoute une accélération en

$$\vec{a}_2 = -\frac{GM}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z). \quad (11)$$

On peut regarder en utilisant le développement proche du centre de l'accélération due à l'anneau jusqu'à quel rayon la force radiale va vers le centre plutôt que repousse vers l'extérieur. C'est quand

$$r^2 < \left(\frac{2M_2}{M}\right)^{2/3} R^2 - z^2 \quad (12)$$

5) Le potentiel proche du centre est (7) et donc en Cartésien

$$\propto x^2 + y^2 - 2z^2. \quad (13)$$

Si on rajoute les deux autres cercles dans les plans Oxz et Oyz , on va sommer

$$(x^2 + y^2 - 2z^2) + (y^2 + z^2 - 2x^2) + (z^2 + x^2 - 2y^2) = 0. \quad (14)$$

Le potentiel est-il constant ? Non, mais il faudrait développer à des ordres plus élevés le potentiel car les termes les plus bas seront tous en $x^4, y^4, z^4, x^2y^2, x^2z^2, \dots$. Et si on continue à rajouter des cercles on peut éliminer également ces termes et ne conserver que des x^6, y^6, \dots . En poussant jusqu'au bout, et en rajoutant plein de cercles, on aura formé une sphère creuse, et là le potentiel sera constant avec aucune force à l'intérieur grâce au théorème de Gauss.

Exercice 20 : fluide entre 2 plaques, gradient de pression oscillant

On considère un fluide Newtonien (ρ, η) emplissant l'espace entre 2 plaques immobiles situées en $y = \pm a$. Le fluide est illimité dans les directions (x) et (z) . On considère les écoulements

dans le plan (xOy) invariants par translation suivant (z) et dont les lignes de courant sont suivant (x) . On suppose qu'un opérateur applique un gradient de pression suivant (x) de la forme: $-G_0 \cos(\omega t)$.

Déterminer le champ des vitesses dans le fluide dans la limite des basses fréquences (on montrera que cela correspond à: $a \ll \delta$ avec $\delta = \sqrt{2\eta/(\rho\omega)}$), puis dans la limite des hautes fréquences. Commenter.

Eléments de solution

Exercice qui rentre dans la grande catégorie: fluide entre 2 plaques, ce qui en fait un exercice proche du cours. Il faut faire les calculs correctement. La compréhension physique de δ doit sortir du calcul dans le cas $a \gg \delta$. Si jamais un candidat comprend ce que signifie δ par un raisonnement de type nombre de Reynolds puis couche limite (avant les calculs), et utilise cela pour court-circuiter tous les calculs, c'est bien aussi. Mais l'approche suggérée par l'énoncé est plus simple et plus linéaire: on fait les calculs de type cours et on essaie à comprendre.

On a immédiatement que: $\vec{v} = u(y, t)\vec{e}_x$. $u(\cdot)$ n'a pas de dépendance en z (invariance) et pas de dépendance en x (équation de conservation de la masse). L'équation du mouvement suivant (y) pour un petit volume de fluide donne: $P = P(x, t)$, puis l'équation suivant (x) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Et donc:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -G(t),$$

où la fonction $G(t)$ est celle donnée dans l'énoncé: $Re(-G_0 e^{-i\omega t})$ (en notations complexes).

On cherche alors le champ des vitesses sous la forme: $Re(u_0(y)e^{-i\omega t})$ avec $u_0(\cdot)$ qui vérifie:

$$\eta \frac{d^2 u_0(y)}{dy^2} + i\omega \rho u_0(y) = -G_0.$$

$u_0(\cdot)$ est donc de la forme: $-G_0/(i\omega\rho)$ plus la solution ($u'_0(\cdot)$) de l'équation sans second membre:

$$\eta \frac{d^2 u'_0(y)}{dy^2} + i\omega \rho u'_0(y) = 0.$$

La suite est simple. On cherche $u'_0(\cdot)$ sous la forme e^{ry} puis on impose les conditions aux limites en $y = \pm a$ à la solution complète $u_0(\cdot)$. On obtient facilement:

$$r = \pm(1 - i)/\delta \equiv \pm k,$$

avec: $\delta = \sqrt{2\eta/(\rho\omega)}$. Donc, la solution complète est:

$$u_0(y) = -G_0/(i\omega\rho) + Ae^{ky} + Be^{-ky}.$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites: $u_0(y = \pm a) = 0$.

Dans la limite $|ka| \ll 1$ ($a \ll \delta$), on trouve:

$$u(y, t) = \frac{-G_0 a^2}{\omega\rho \delta^2} (1 - y^2/a^2) \cos(\omega t).$$

C'est un écoulement de type Poiseuille, en phase avec les variations temporelles du gradient de pression.

Dans la limite $|ka| \gg 1$, lorsque a est grand devant δ , on trouve que $u_0(y)$ est pratiquement constant entre les 2 plaques sauf lorsque y est proche de $\pm a$ à δ près, auquel cas la vitesse tend rapidement vers 0 sur l'épaisseur δ . Cette épaisseur δ est donc la couche limite en dehors de laquelle les effets de viscosités sont négligeables. Le fluide se comporte alors comme un fluide parfait soumis à une densité volumique de force $-G(t)$. Les effets de la viscosité se font alors sentir dans la couche limite, et c'est donc dans cette couche que la vitesse du fluide va tendre rapidement vers 0 au niveau des plaques immobiles. Evidemment, ceci n'a de sens que lorsque $a \gg \delta$.

Lorsque l'on est dans le premier cas étudié, soit $a \ll \delta$, on est par conséquent dans une configuration où les effets de viscosité se manifestent dans tout le fluide. C'est pourquoi, on a retrouvé un écoulement de type Poiseuille.

Exercice 21 : disque de gaz dans l'espace

On supposera qu'une agglomération de gaz intergalactique puisse être décrite en bonne approximation, pendant un intervalle de temps suffisamment long, comme un disque de rayon

$R \simeq 10^{11}$ m et de hauteur $2h \simeq 10^7$ m, de masse volumique ρ constante et homogène. A $t = 0$ une fusée se trouve sur l'axe du disque à $z_0 = 10^8$ m “au dessus” du centre avec une vitesse nulle lorsque ses réacteurs tombent en panne.

- 1) Décrire le mouvement qu'effectuera la fusée. En particulier, calculer la période.
- 2) Montrer comment l'observation de la période permet à un astronome terrestre (qui ne connaît que la masse totale M et le rayon R du disque, ainsi que z_0) de déterminer h .
- 3) Discuter les hypothèses faites sur la forme du nuage intergalactique.

Eléments de solution

Il s'agit d'abord de voir l'analogie avec le champ électrique créé par une plaque uniformément chargée. Donc, au-dessus et en dessous du disque le champ gravitationnel est uniforme et “vertical”. Ceci est valable tant la hauteur z satisfait $|z| \ll R$. Si on écrit pour la force gravitationnelle sur une masse m en \vec{r} : $\vec{F}(\vec{r}) = -m\vec{\nabla}V_{\text{grav}}(\vec{r})$ le potentiel gravitationnel V_{grav} satisfait à $\Delta V_{\text{grav}} = 4\pi G\rho$, alors que $\Delta V_{\text{el}} = -\rho_{\text{el}}/\epsilon_0$. Le théorème de Gauss est donc

$$\int_S \vec{\nabla}V_{\text{grav}} \cdot dS = 4\pi G \int_{\text{vol}} d^3x \rho = 4\pi GM(\text{vol}) . \quad (1)$$

Par la symétrie du problème, on sait que $\vec{\nabla}V_{\text{grav}}$ est vertical $\sim \vec{e}_z$ et qu'il doit s'annuler en $z = 0$. En choisissant la surface de Gauss comme un cylindre d'axe parallèle à l'axe du disque, avec une base à $z = 0$ et l'autre en z on trouve facilement

$$V_{\text{grav}}(z) = 4\pi G\rho \frac{z^2}{2} \quad |z| \leq h \quad , \quad V_{\text{grav}}(z) = 4\pi G\rho h \left(|z| - \frac{h}{2} \right) \quad |z| > h \quad (2)$$

L'énergie potentielle d'une masse m en z est donc $E_{\text{pot}} = mV(z)$. La conservation de l'énergie de la fusée donne

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 + V_{\text{grav}}(z) = V_{\text{grav}}(z_0) . \quad (3)$$

Tant que $z > h$ cela donne une chute libre avec accélération constante, soit $\dot{z}^2 = 8\pi G\rho h(z_0 - z)$ ou $\ddot{z} = -4\pi G\rho h$, soit $z(t) = z_0 - 2\pi G\rho h t^2$ et la fusée atteint $z = h$ à $t_1 = \sqrt{\frac{z_0 - h}{2\pi G\rho h}}$ avec une vitesse $\dot{z} = -\sqrt{8\pi G\rho h(z_0 - h)}$. Ensuite la fusée se trouve dans un potentiel harmonique avec

$\omega^2 = 4\pi G\rho$, soit $z(t) = A \sin \omega(t - t_1) + B \cos \omega(t - t_1)$. Les conditions initiales donnent $B = h$ et $\omega A = \dot{z}(t_1)$, soit $A = -\sqrt{2h(z_0 - h)}$:

$$z(t) = h \cos \omega(t - t_1) - \sqrt{2h(z_0 - h)} \sin \omega(t - t_1) . \quad (4)$$

La fusée arrive en $z = 0$ à t_2 avec

$$\tan \omega(t_2 - t_1) = \sqrt{\frac{h}{2(z_0 - h)}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{1}{4\pi G\rho}} \left(\sqrt{\frac{2(z_0 - h)}{h}} + \arctan \sqrt{\frac{h}{2(z_0 - h)}} \right) . \quad (5)$$

Ensuite, le mouvement est symétrique pour $z < 0$ pour atteindre $z = -z_0$, puis la fusée remonte jusqu'à z_0 . Au total, le mouvement est périodique avec une période $T = 4t_2$. Avec les données numériques, $h \ll z_0$ et on peut faire un DL ($\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$ et $\arctan x = x + O(x^3)$)

$$T \simeq 4\sqrt{\frac{z_0}{2\pi G\rho h}} \left(1 + \frac{h^2}{8z_0^2} \right) = \sqrt{\frac{8z_0 R^2}{GM}} \left(1 + \frac{h^2}{8z_0^2} \right) \quad (6)$$

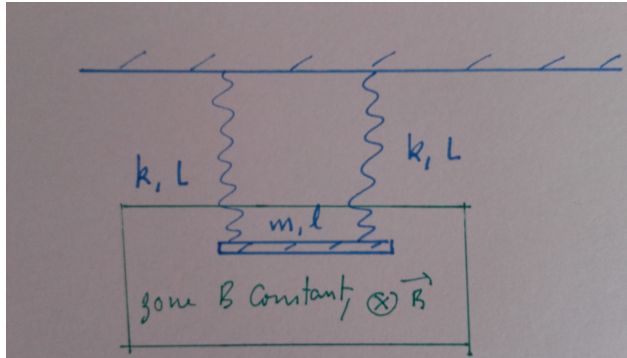
où on a utilisé $M = \pi R^2 h \rho$. Si on connaît M , R et z_0 , l'observation précise de la période permet donc de déterminer h (effet en $\frac{h^2}{8z_0^2} \simeq 3 \times 10^{-4}$).

Les hypothèses faite sur la forme en disque avec un ρ constant sont hautement non-réalistes. Selon le temps qui reste, on peut alors discuter comment ce disque, soumis à son propre champ gravitationnel pourrait être stabilisé par la pression thermodynamique du gaz à température non-nulle et par la rotation du disque autour de son axe.

Exercice 22 : induction et ressorts

On considère une barre métallique conductrice de masse m , longueur ℓ , suspendue horizontalement par deux ressorts (raideur k) attachés à ses extrémités. Les ressorts sont des bobines d'inductance L . La barre reste toujours dans la zone où est appliqué un champ magnétique constant uniforme, horizontal et orthogonal à la direction de la barre.

1) Quelle est l'équation du mouvement ?



2) Quelle est l'évolution de la position de la barre suite à un petit déplacement vers le bas ?
Et celle du courant ?

3) Faire un bilan énergétique et interpréter ce qu'il se passe.

Eléments de solution

On considère un axe z orienté vers le bas. On note $\dot{z} = v$.

1) Soit on utilise que le champ électromoteur est $\vec{v} \wedge \vec{B}$, soit on utilise la loi de Lenz pour trouver que

$$e = vBl. \quad (1)$$

L'équation du circuit électrique est

$$e = 2Ldi/dt = -vBl. \quad (2)$$

Ici il peut être utile de se demander le sens du courant en fonction de la vitesse. Le PFD donne ensuite (on utilise la force de Laplace et le poids)

$$m\dot{v} = mg - ilB - 2k(z - z_0) \quad (3)$$

où z_0 est l'altitude où les ressorts n'exercent pas de force de rappel. En dérivant on trouve

$$m\ddot{v} + \left(\frac{\ell^2 B^2}{2L} + 2k \right) v = 0. \quad (4)$$

On posera donc naturellement

$$\omega^2 = \left(\frac{\ell^2 B^2}{2Lm} + \frac{2k}{m} \right) \quad (5)$$

2) La position d'équilibre est en

$$z_{eq} = z_0 + \frac{mg}{2k}. \quad (6)$$

On pose $z = z_{eq} + Z$ et on a $\dot{Z} = v$. C'est un peu plus pénible que d'habitude pour résoudre avec les conditions initiales. Initialement on a $Z(t=0) = Z_i$, $V(t=0) = 0$, mais on a aussi une condition sur \dot{V} initialement qui est en utilisant (3) $\dot{V}(t=0) = -2kZ_i/m$. Donc on a (en posant $\omega_0^2 = 2k/m$)

$$V = -\frac{\omega_0^2 Z_i}{\omega} \sin(\omega_0 t). \quad (7)$$

$$Z = Z_i \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} [\cos(\omega t) - 1] \right]. \quad (8)$$

Pour le courant on intègre (2) avec la condition initiale $i(t=0) = 0$ et donc

$$i = I_0 [1 - \cos(\omega t)] \quad I_0 = \frac{B\ell Z_i k}{2kL + \ell^2 B^2 / 2} \quad (9)$$

Les oscillations sont plus petites que dans le cas sans champ magnétique. On va comprendre énergétiquement. Mais on peut déjà voir que les forces de Laplace freinent quand on monte et accélèrent quand on descend car elles sont dirigées vers le bas.

3) Il faut multiplier (3) par v et intégrer pour faire apparaître

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 - mgz + Li^2 + k(z - z_0)^2 \right] = 0 \quad (10)$$

Par simplicité on discute sans regarder le poids et on pose $g = 0$ et donc $z_0 = z_{eq}$. On a donc

$$\frac{d}{dt} [E_c + Li^2 + kZ^2] = 0. \quad (11)$$

On n'a pas de facteur 1/2 dans les deux derniers termes, car on a deux ressorts. Ce qu'il faut voir c'est que Li^2 est maximal quand la barre est au plus haut. C'est pour ça que l'amplitude des oscillations est plus faible. Une partie de l'énergie cinétique est prise par cette énergie d'induction quand on monte, mais elle est restituée quand on descend.

Exercice 23 : fluide parfait

On considère un fluide parfait de masse volumique $\rho(t, x, y, z)$. On note le champ des vitesses dans le fluide: $\vec{v}(t, x, y, z)$. On néglige l'effet de la gravité.

1) Montrer que si l'énergie interne de ce fluide est constante, donc son énergie volumique totale (énergie cinétique plus énergie interne) est de la forme $\frac{1}{2}\rho v^2$ à une constante près, alors: $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

2) On ne suppose plus l'énergie interne du fluide constante, montrer alors que nécessairement l'entropie (par unité de masse) s vérifie: $ds/dt = 0$, où la dérivée par rapport au temps est faite en suivant le mouvement (tout mouvement dans le fluide est isentropique).

On rappelle que l'énergie interne d'un fluide vérifie la relation: $dU = TdS - pdV$.

Éléments de solution

L'exercice demande de manipuler l'équation d'Euler. Il faut donc être au point sur le cours des fluides parfaits (équation d'Euler et équation de conservation de la masse) et avoir utilisé ces relations dans des exercices pour s'y habituer. La question 1) est simple, proche du cours. La question 2) est plus technique.

1) L'énoncé suggère une approche énergétique. On considère un volume fixe V de fluide et on écrit le bilan énergétique pour ce volume. Soit l'énergie du fluide dans V : $\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 dV$ plus une constante mais qui n'a pas d'importance car on va regarder sa variation dans le temps. La quantité $\frac{d}{dt}(\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 dV)$, peut s'écrire de différentes manières. Déjà, comme le volume est fixe:

$$\frac{d}{dt}(\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 dV) = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) dV. \quad (1)$$

Et cela s'écrit aussi en fonction du flux entrant ou sortant (d'énergie volumique) plus la

puissance des forces de pression à la surface S du volume V :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV \right) = - \int_S \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \vec{v} d\vec{S} - \int_S p \vec{v} d\vec{S}. \quad (2)$$

C'est l'égalité entre (1) et (2) en utilisant l'équation d'Euler qui va donner le résultat. Comme l'égalité entre (1) et (2) est vraie pour tout volume V , on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \vec{v} \right) + \operatorname{div}(p \vec{v}) = 0.$$

Soit:

$$\frac{1}{2} (-\operatorname{div}(\rho \vec{v})) v^2 + \rho \vec{v} \frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\operatorname{div}(\rho \vec{v})) v^2 + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{\operatorname{grad}}(v^2) + \operatorname{div}(p \vec{v}) = 0.$$

Ce qui donne, en utilisant l'équation d'Euler (projetée sur \vec{v}), $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$. Ce qui conclut.

2) On commence comme pour la question 1) sauf que dans (1) et (2), il faut remplacer $\frac{1}{2} \rho v^2$ par $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon$, où $\rho \epsilon$ est l'énergie interne volumique et donc ϵ l'énergie interne par unité de masse. En reprenant le raisonnement de 1), on obtient:

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \epsilon \vec{v}) + p \operatorname{div}(\vec{v}) = 0.$$

Il faut montrer que cette relation est équivalente à la conservation de l'entropie (massique) en suivant le mouvement. On l'écrit sous la forme:

$$\frac{d(\rho \epsilon)}{dt} + \rho \epsilon \operatorname{div}(\vec{v}) + p \operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (3)$$

De plus: $d\epsilon = T ds + p d\rho / \rho^2$. On rappelle que ϵ est l'énergie interne massique (ou par unité de masse) du fluide. Donc, $d(\rho \epsilon) / dt = \epsilon d\rho / dt + \rho T ds / dt + p / \rho d\rho / dt$. Alors (3) devient:

$$\epsilon d\rho / dt + \rho T ds / dt + p / \rho d\rho / dt + \rho \epsilon \operatorname{div}(\vec{v}) + p \operatorname{div}(\vec{v}) = 0.$$

On écrit alors les termes en $d\rho / dt$ comme $\partial \rho / \partial t + \vec{v} \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho)$ et, après simplifications, on obtient: $ds / dt = 0$, ce qui conclut.

Exercice 24 : dissolution du sel dans l'eau

Un grand récipient sphérique de rayon $R = 10$ m est rempli d'eau. A $t = 0$ on introduit au centre du récipient un cristal d'un certain sel, faiblement soluble dans l'eau. Pour simplifier, on supposera ce cristal de forme sphérique, de rayon $a_0 = 1$ cm.

Déterminer comment la concentration en sel dans l'eau varie en fonction du temps et de la position. On établira d'abord les équations, puis on tentera de les résoudre en procédant à des approximations raisonnables.

Eléments de solution

L'énoncé est volontairement un peu vague. On ne sait pas de quel sel il s'agit à part qu'il est faiblement soluble dans l'eau. En se basant sur une masse volumique de l'ordre de 2 g cm^{-3} on a environ 8 g de sel pour environ 4×10^6 litres d'eau, soit $2 \times 10^{-6} \text{ g l}^{-1}$. La concentration saturante de NaCl est environ 360 g par litre d'eau! Pour un sel très faiblement soluble tel AgCl, la solubilité est de $2 \times 10^{-3} \text{ g l}^{-1}$. Donc même pour un sel faiblement soluble, on pourra supposer qu'à la fin tout le sel est dissous.

On a une symétrie sphérique. (C'est bien pour cela qu'on a pris un cristal de forme sphérique!) On aura donc des concentrations $n(t, r)$ et des flux $\vec{j}(t, \vec{r}) = j(t, r)\vec{u}_r$. On aura d'une part un processus de diffusion et d'autre part une source au centre qui injecte du sel dans l'eau au fur et à mesure que le cristal se dissout. Le flux à la surface du cristal (nombre de grammes dissous par unité de temps et de surface) dépendra de la différence entre la concentration en sel dissous dans l'eau à la surface du cristal $n(t, a)$ et de la concentration saturante n_{sat} :

$$\vec{j}(t, \vec{r})|_{r=a} = \gamma(n_{\text{sat}} - n(t, a))\vec{u}_r \quad (1)$$

où γ est une certaine constante dont l'unité est m s^{-1} . Mais ici $a = a(t) \leq a_0$ est le rayon du cristal à l'instant t . En intégrant sur la surface du cristal on obtient la quantité (masse) de sel injecté dans l'eau par unité de temps au centre du récipient:

$$\dot{m}(t) = - \int_{r=a(t)} d\vec{S} \cdot \vec{j}(t, \vec{r})|_{r=a(t)} = -4\pi a(t)^2 \gamma(n_{\text{sat}} - n(t, a(t))) . \quad (2)$$

Pour $r > a(t)$ on a l'équation de conservation $\dot{n} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ et la loi de Fick $\vec{j} = -D\vec{\nabla}n$, soit

$$\dot{n} = D\Delta n \quad \Rightarrow \quad \dot{n} = D \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) . \quad (3)$$

(Le laplacien en coordonnées sphérique n'est pas exigible, mais peut être obtenu en utilisant le théorème de Gauss sur $\dot{n} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ avec une couche entre r et $r + dr$.) L'équation (1) donne \vec{j} en $r = a$ et par continuité cela donne $D\vec{\nabla}n$, donc la condition de bord

$$D\vec{\nabla}n(t, a) = \gamma(n(t, a) - n_{\text{sat}})\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial r}(t, a) = \frac{\gamma}{D}(n(t, a) - n_{\text{sat}}) , \quad a \equiv a(t) , \quad (4)$$

ainsi que

$$n(t, r) = 0 \quad , \quad t \leq 0 \quad , \quad r > a_0 . \quad (5)$$

Finalement il faut tenir compte comment $a(t)$ diminue. Soit ρ la masse volumique du cristal de sel. Alors $\frac{4\pi}{3}a^3(t)\rho = m(t)$, soit en prenant la dérivée et en utilisant (2) :

$$\dot{a}(t) = -\frac{\gamma}{\rho}(n_{\text{sat}} - n(t, a(t))) . \quad (6)$$

On a un système d'équations couplées compliqué, à savoir (3) avec conditions aux bords et initiales (4) et (5), avec $a(t)$ déterminé implicitement par (6). Afin de pouvoir avancer, on supposera par exemple qu'on ne s'intéresse qu'à des temps suffisamment courts pour que le cristal ne change pas considérablement de taille de façon à approximer

$$a(t) \simeq a_0 . \quad (7)$$

Ensuite, à la surface du cristal il y a une compétition entre l'augmentation de n par la dissolution du cristal (γ) et la diffusion (D) qui va diminuer n . Puisqu'on est dans le cas d'un sel faiblement soluble on pourra supposer que la diffusion évacue efficacement le sel vers les r croissant et qu'il n'y a pas d'accumulation de sel dissous au voisinage du cristal. Plus précisément on supposera que $\frac{D}{a\gamma} \gg 1$. Cela implique que, très vite pour $t \geq 0$, on a $n(t, a)$ constant et donc $\frac{\partial n}{\partial r}(t, a)$ constant. Mais ce régime stationnaire s'établit aussi pour des $r > a$ jusqu'à un certain $r_{\text{max}}(t)$ qui constitue une sorte de front de la propagation de la concentration du sel. Donc pour $r < r_{\text{max}}$ l'éq. (3) donne $(r^2 n'(r))' = 0$ soit

$$n(r) = \frac{B}{r} \quad , \quad a_0 < r < r_{\text{max}}(t) . \quad (8)$$

La condition de bord (4) donne alors $-\frac{B}{a_0^2} = \frac{\gamma}{D} \left(\frac{B}{a_0} - n_{\text{sat}} \right)$, soit

$$B = \frac{a_0 n_{\text{sat}}}{1 + \frac{D}{a_0 \gamma}} \quad \Rightarrow \quad n(r) = \frac{n_{\text{sat}} a_0}{1 + \frac{D}{a_0 \gamma} r} \quad , \quad a_0 < r < r_{\text{max}}(t) . \quad (9)$$

On peut estimer r_{max} en calculant la masse totale du sel dissous à l'intérieur de r_{max} :

$$m(r < r_{\text{max}}) = 4\pi \int_{a_0}^{r_{\text{max}}} dr r^2 n(r) = 4\pi \frac{n_{\text{sat}} a_0}{1 + \frac{D}{a_0 \gamma}} \left(\frac{r_{\text{max}}^2}{2} - \frac{a_0^2}{2} \right) , \quad (10)$$

ce qui doit être égal, d'après (2), à

$$4\pi a_0^2 \gamma (n_{\text{sat}} - n(a_0)) \times t = 4\pi \frac{a_0 D n_{\text{sat}}}{1 + \frac{D}{a_0 \gamma}} \times t , \quad (11)$$

soit

$$r_{\text{max}}^2(t) = a_0^2 + 2Dt . \quad (12)$$

Exercice 25 : induction cylindre tournant

On considère un cylindre infini conducteur (conductivité σ), de rayon R , en rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ autour de son axe de symétrie et plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$.

1) *Quelle est la distribution de courants dans le cylindre lorsque celle-ci est devenue stationnaire ?*

2) *Quelles sont les forces et moments subis par le cylindre ?*

Aide : La loi d'Ohm pour un conducteur en mouvement dans un champ électrique et un champ magnétique est $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Eléments de solution

On utilise les coordonnées cylindriques naturellement associées avec le cylindre.

1) En régime stationnaire, toutes les dérivées temporelles des champs sont nulles et donc par exemple

$$\text{rot} \vec{E} = 0 , \text{div} \vec{j} = 0 . \quad (1)$$

On calcule $\vec{v} \wedge \vec{B}$. D'abord il faut \vec{v} .

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge r\vec{e}_r = r\Omega\vec{e}_\phi. \quad (2)$$

En utilisant $\vec{e}_\phi = \cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_x = x\vec{e}_y - y\vec{e}_x$, il vient

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = -r \cos\theta\Omega B_0\vec{e}_z = -x\Omega B_0\vec{e}_z. \quad (3)$$

On regarde maintenant la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (4)$$

En stationnaire la conservation de la charge implique

$$\text{div}\vec{j} = 0. \quad (5)$$

Or on peut vérifier facilement (quand on passe aux coordonnées Cartésiennes) que

$$\text{div}\vec{v} \wedge \vec{B} = 0, \quad (6)$$

donc on pourrait se passer d'un champ électrique. Comme sans champ électrique cela fait un courant selon \vec{e}_z , les lignes de courant ne sortent pas du conducteur donc c'est pas la peine d'en rajouter et on conclut qu'on n'a pas de champ électrique. On a simplement

$$\vec{j} = -\sigma\Omega B_0 x\vec{e}_z. \quad (7)$$

2) Deux directions s'ouvrent. Calculer les forces volumique et le moment des forces par unité de longueur du cylindre. Ou alors voir si les courants induisent un autre champ magnétique et éventuellement un autre champ électrique etc... et raffiner la solution. Pour les forces c'est juste

$$\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} = -\sigma\Omega B_0^2 x\vec{e}_y, \quad (8)$$

et la moyenne sur une section est nulle. Pour le moment par unité de longueur c'est

$$\vec{T} = - \int \sigma\Omega B_0^2 x^2 r d\theta dz \vec{e}_z \quad (9)$$

$$= -\sigma\Omega B_0^2 \frac{\pi R^2}{4} \vec{e}_z \quad (10)$$

On a bien un freinage.

Maintenant on essaie de raffiner en calculant le champ à l'intérieur créé par les courants. On cherche donc

$$\text{rot}\vec{B}_1 = \mu_0\vec{j}. \quad (11)$$

On ne peut avoir de dépendance en z par symétrie. On peut prendre le rot de cette équation (en utilisant qu'un champ magnétique est sans divergence) pour avoir une idée. On trouve

$$-\Delta\vec{B}_1 = \mu_0\text{rot}\vec{j} = \mu_0\sigma\Omega B_0\vec{e}_y. \quad (12)$$

On a donc l'intuition que \vec{B}_1 est selon \vec{e}_y , et la fonction devant être de Laplacien constant (et ne pas dépendre de z d'après les symétries du problème), donc on essaie x^2 et y^2 avec possiblement un soupçon de xy . On trouve que pour satisfaire (11) c'est x^2 qu'il faut et

$$\vec{B}_1 = -\frac{x^2}{2}\sigma\mu_0\Omega B_0\vec{e}_y \quad (13)$$

On a

$$\vec{v} \wedge \vec{B}_1 = \frac{x^2 y}{2}\sigma\mu_0\Omega^2 B_0\vec{e}_z. \quad (14)$$

Et donc on trouve $\vec{j}_1 = \sigma\vec{v} \wedge \vec{B}_1$.

On peut aussi continuer et chercher le correctif au correctif

$$\text{rot}\vec{B}_2 = \mu_0\vec{j}_1. \quad (15)$$

On voit qu'on a $\text{rot}\vec{j}_1 = \propto x^2\vec{e}_x + \propto xy\vec{e}_y$ et donc $\Delta\vec{B}_2$ est du même genre. On a alors B_y qui est une combinaison de x^3y et xy^3 , mais pour B_2 seul $B_y \propto x^3y$ convient. Le même genre de raisonnement donne $B_x \propto x^4$. En le faisant correctement on trouve

$$\vec{B}_2 = \frac{\sigma^2\mu_0^2\Omega^2 B_0}{6} \left[-\frac{1}{4}x^4\vec{e}_x + x^3y\vec{e}_y \right] \quad (16)$$

On peut vérifier que les forces sont toujours de moyenne nulle dans les sections.

Exercice 26 : stabilité d'un fluide 2D

On considère un fluide idéal incompressible (de masse volumique ρ constante) à 2 dimensions qui occupe un grand espace Σ (dans le plan xy). On suppose que son champ des vitesses $\vec{v}(x, y, t)$ est régulier à l'instant initial $t = t_0$, c'est-à-dire que ni $\vec{v}(\cdot)$, ni aucune de ses dérivées spatiales ne divergent en aucun point de Σ . De plus, on suppose que la condition aux limites suivante est toujours vraie: le champ des vitesses et ses dérivées spatiales tendent vers 0 aux bornes de Σ .

La condition sur la régularité de $\vec{v}(\cdot)$ à $t = t_0$ signifie en particulier:

$$\int_{\Sigma} |\vec{v}(x, y, t = t_0)|^2 dS < \infty \quad (1)$$

$$\int_{\Sigma} \left[|\vec{\text{grad}}(v_x)|^2 + |\vec{\text{grad}}(v_y)|^2 \right] (x, y, t = t_0) dS < \infty \quad (2)$$

Montrer qu'alors (1) est vraie pour tout $t \geq t_0$.

Si besoin, on utilisera (avec $\vec{\omega} = \text{rot}\vec{v}$):

$$(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\text{grad}}(v^2) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}.$$

Note: on pourrait montrer également que (2) est vraie pour tout $t \geq t_0$ et conclure que la régularité du champ des vitesses du fluide est assurée à long terme si elle est vraie à l'instant initial: ni $\vec{v}(\cdot)$, ni aucune de ses dérivées spatiales ne divergent en aucun point de Σ quel que soit t .

Éléments de solution

Il y a une manière 'force brute' de faire l'exercice, on va commencer par cette approche. C'est la plus naturelle: il faut manipuler l'équation d'Euler et la relation de conservation de la masse (dans le cas incompressible, $\text{div } \vec{v} = 0$). La difficulté de l'exercice est qu'il ne faut pas se perdre dans les calculs et penser à intégrer par partie des intégrales autant de fois que nécessaire.

Montrer la validité de (1) quel que soit t est très simple. On montre que (Σ est fixe en fonction du temps par définition):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} |\vec{v}(x, y, t)|^2 dS = 2 \int_{\Sigma} \vec{v}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(x, y, t) dS = 0 \quad (3)$$

Mais $\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(x, y, t)$ s'obtient par l'équation d'Euler:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} - \vec{\text{grad}}(p/\rho)$$

Alors, l'intégrale dans (3) devient:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} |\vec{v}(x, y, t)|^2 dS = -2 \int_{\Sigma} \left[\vec{v}(x, y, t) [(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}] + \vec{v}(x, y, t) \cdot \vec{\text{grad}}(p/\rho) \right] dS$$

Le deuxième terme de l'intégrale ci-dessus donne 0 après une intégration par partie, en utilisant $\text{div } \vec{v} = 0$, et le fait que les vitesses sont nulles aux bornes du domaine Σ . Pour le premier terme de l'intégrale, on peut par exemple écrire $\vec{v}(x, y, t) [(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}]$ comme:

$$\vec{v}(x, y, t) [(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}] = \vec{v}(x, y, t) \left[\frac{1}{2} \vec{\text{grad}}(v^2) + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \right] = \frac{1}{2} \vec{v}(x, y, t) \vec{\text{grad}}(v^2) = \frac{1}{2} \text{div}(v^2 \vec{v})$$

Donc, ce terme s'intègre simplement et donne 0 du fait que les vitesses sont nulles aux bornes du domaine. Au final, on a bien trouvé que la relation (1) est vraie pour tout t .

Montrer que la relation (2) est vraie pour tout t , donc:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \left[|\vec{\text{grad}}(v_x)|^2 + |\vec{\text{grad}}(v_y)|^2 \right] (x, y, t) dS = 0$$

demande plus de calculs. Mais sur le principe, c'est exactement comme plus haut: une suite d'intégrations par partie avec l'utilisation de l'équation d'Euler et de la conservation de la masse.

Pour montrer que (2) est vraie pour tout t , on peut aussi utiliser une astuce. (2) traduit uniquement le fait que les dérivées spatiales du champ des vitesses sont finies à l'instant

initial en tout point de Σ . On peut traduire cette propriété différemment: (2) est équivalente au fait que la vorticité est finie l'instant initial en tout point, avec en plus la condition sur la conservation de la masse. Alors, les 4 termes: $\partial_x v_x, \partial_y v_x, \partial_x v_y, \partial_y v_y$ doivent être finis en tout point de Σ (à l'instant initial). Mais, $\text{div } \vec{v} = 0$ est vraie pour tout t et de plus (en 2 D):

$$\frac{d}{dt}\omega = 0.$$

Cela veut dire que si la vorticité est finie à l'instant initial, alors, elle le reste pour tout t . Ce qui conclut.

Exercice 27 : double oscillateur

On considère deux particules ponctuelles de même masse m se déplaçant uniquement selon l'axe x dans un potentiel harmonique "extérieur", à une seule dimension, c'est à dire tel que leur énergie potentielle est

$$V_{\text{ext}}(x_1, x_2) = \frac{m}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2), \quad (1)$$

où x_1 et x_2 sont les coordonnées des deux particules. A cette énergie potentielle "extérieure" s'ajoute une énergie potentielle d'interaction entre les deux particules

$$V_{\text{int}}(x_1, x_2) = \frac{m}{4}\alpha^2(x_1 - x_2)^2. \quad (2)$$

1) *Décrire le mouvement classique de ces deux particules. (On supposera quelles peuvent se traverser mutuellement sans aucune incidence sur leur mouvement.)*

Maintenant on essaie de décrire le même système en mécanique quantique par une fonction d'onde $\psi(t, x_1, x_2)$.

2) *Quelle interprétation proposez-vous pour cette fonction d'onde dépendant des coordonnées des deux particules ?*

3) *Quelle équation de Schrödinger pourrait-on écrire pour cette fonction d'onde ? Proposez une manière pour déterminer les niveaux d'énergie de ce système de deux particules quantiques.*

Eléments de solution

Il faudra, bien sûr, guider le candidat si besoin, après le temps de réflexion personnelle nécessaire.

1) On écrit $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$ et donc

$$\begin{aligned} V_{\text{tot}}(x_1, x_2) &= V_{\text{ext}}(x_1, x_2) + V_{\text{int}}(x_1, x_2) = m\omega^2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \frac{m}{4}(\omega^2 + \alpha^2)(x_1 - x_2)^2 \\ &\equiv V_{\text{cm}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + V_{\text{rel}}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

On voit donc apparaître deux oscillateurs découplés, l'un avec masse $2m$ pour la coordonnée du barycentre $X = \frac{x_1+x_2}{2}$, et un autre avec masse $\frac{m}{2}$ et fréquence $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$, pour la coordonnée relative $x = x_1 - x_2$. Il est donc clair que X et x décrivent séparément des oscillations avec leurs fréquences respectives. Montrons-le : Le PFD donne

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial V_{\text{tot}}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}V'_{\text{cm}} - V'_{\text{rel}} \quad , \quad m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial V_{\text{tot}}}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}V'_{\text{cm}} + V'_{\text{rel}} \quad (4)$$

et donc

$$2m\ddot{X} = -V'_{\text{cm}}(X) = -2m\omega^2 X \quad , \quad \frac{m}{2}\ddot{x} = -V'_{\text{rel}}(x) = -\frac{m}{2}(\omega^2 + \alpha^2)x \quad , \quad (5)$$

où on voit la masse totale $2m$ et la masse relative $\frac{m}{2}$.

2) L'analogie avec une particule à deux dimensions nous semble évidente. *Mais il conviendra d'interagir et de guider le candidat si cette interprétation ne lui vient pas tout seul* : $|\psi(t, x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$ est la probabilité de trouver la première particule en x_1 à dx_1 près et la deuxième particule en x_2 à dx_2 près. (Évidemment on considère les deux particules comme discernables.)

3) L'équation de Schrödinger à proposer doit se baser sur le principe de correspondance $E = \hbar\omega$ et l'expérience avec l'équation pour une seule particule. Il s'agira donc de simplement remplacer le potentiel à une particule par le potentiel écrit ci-dessus et de comprendre que le terme $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ qui donne pour une particule libre $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_{\text{cin}}$ doit ici être remplacé par

l'énergie cinétique des deux particules. Donc

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x_1, x_2) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + V_{\text{tot}}(x_1, x_2) \right] \psi(t, x_1, x_2) . \quad (6)$$

On se satisfera aussi par l'équation stationnaire obtenu par $\psi(t, x_1, x_2) = e^{-iEt} \varphi(x_1, x_2)$:

$$E \varphi(x_1, x_2) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + V_{\text{tot}}(x_1, x_2) \right] \varphi(x_1, x_2) . \quad (7)$$

Le traitement du problème classique suggère de passer en variables X et x . Pour le potentiel c'est déjà fait avant. Pour l'opérateur différentiel il suffit d'écrire proprement (*probablement ils ne savent pas faire et c'est hors programme - donc il faudra les aider ou donner cette formule*)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial X}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} , \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial X}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x} . \quad (8)$$

Puis on prend les carrés et on somme :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} . \quad (9)$$

Schrödinger devient alors avec $\varphi(x_1, x_2) \equiv \phi(X, x)$

$$E \phi(X, x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + V_{\text{cm}}(X) + V_{\text{rel}}(x) \right] \phi(X, x) , \quad (10)$$

et le tour est joué : on raconte le coup habituel de la séparation des variables : $\phi(X, x) = \phi_{\text{cm}}(X) \phi_{\text{rel}}(x)$ et

$$\left[-\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + V_{\text{cm}}(X) \right] \phi_{\text{cm}}(X) = \epsilon_{\text{cm}} \phi_{\text{cm}}(X) , \quad \left[-\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{\text{rel}}(x) \right] \phi_{\text{rel}}(x) = \epsilon_{\text{rel}} \phi_{\text{rel}}(x) , \quad (11)$$

avec $E = \epsilon_{\text{cm}} + \epsilon_{\text{rel}}$. Les énergies d'un seul oscillateur à une dimension sont au programme et donc $\epsilon_{\text{cm}} = \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2})$ et $\epsilon_{\text{rel}} = \hbar\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}(n_2 + \frac{1}{2})$, soit

$$E = \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}(n_2 + \frac{1}{2}) . \quad (12)$$

Dans la limite où l'interaction entre les deux particules disparaît ($\alpha = 0$) on retrouve évidemment $E = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$ comme il faut.

Exercice 28 : effondrement gravitationnel

On considère un nuage de gaz sans pression de forme sphérique et de masse volumique constante ρ_0 .

1) *En combien de temps s'effondre-t-il ?*

Aide : On donne l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1/x - 1}} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

On considère maintenant un nuage de gaz avec pression non nulle, et remplissant tout l'espace uniformément. On cherche les conditions pour que des perturbations de cette configuration soient instables.

2) *On considère une distribution de masse volumique $\rho(x, y, z)$. En utilisant une analogie avec l'électrostatique, justifier que la force gravitationnelle exercée par cette distribution volumique de masse sur une masse ponctuelle m que l'on rajoute peut être mise sous la forme $\vec{f} = m\vec{\mathcal{G}}$ où $\text{div}\vec{\mathcal{G}} = -4\pi G\rho$.*

3) *Etablir les équations de propagation du son lorsque l'effet gravitationnel du gaz est pris en compte.*

4) *En considérant une onde sonore plane dans un milieu homogène et infini, trouver à quelle condition celle-ci est instable.*

Eléments de solution

Il s'agit de l'instabilité de Rayleigh-Jeans.

1) On peut d'abord faire une analyse dimensionnelle avec ρ_0 et G et voir que $1/\sqrt{\rho_0 G}$ est un temps. Pour un nuage à symétrie sphérique on considère la dynamique d'un point situé à r

du centre (initialement r_0). La force ressentie est due à la masse $M(r_0) = (4/3)\pi\rho_0r_0^3$ et

$$\ddot{r} = -\frac{GM(r_0)}{r^2} \quad (2)$$

On multiplie par \dot{r} pour intégrer et (avec la constante mise en prenant aucune vitesse initiale)

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{GM(r_0)}{r} - \frac{GM(r_0)}{r_0} = \frac{GM(r_0)}{r_0} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \quad (3)$$

On récrit (il faut mettre un signe moins car quand le temps augmente le rayon diminue, et à la fin on sait qu'on doit avoir un temps d'effondrement positif)

$$\sqrt{\frac{2GM(r_0)}{r_0}} dt = -\frac{dr}{\sqrt{r_0/r - 1}} \quad (4)$$

En utilisant l'aide on a donc pour l'effondrement total (r va de $r = r_0$ à $r = 0$ et on a juste un petit changement de variable $x = r/r_0$ à faire et inverser les bornes)

$$\sqrt{\frac{2GM(r_0)}{r_0^3}} t_{\text{eff}} = \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

et donc

$$t_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{G\rho_0}} \quad (6)$$

L'analyse dimensionnelle donne le bon ordre de grandeur et là on a le résultat complet.

2) la force est en $1/r^2$ et le potentiel en $1/r$ dans les deux cas. Pour l'électrostatique la constante est $1/(4\pi\epsilon_0)$ et pour la gravité c'est G . Pour l'électrostatique c'est la distribution de charge électrique et pour la gravité la distribution de masses. Mais on a aussi un signe différent car deux charges électriques de même signe se repoussent, alors que pour deux masses c'est le contraire. Donc si en électrostatique on a

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi \frac{\rho_{\text{elec}}}{4\pi\epsilon_0} \quad (7)$$

alors avec cette analogie on a

$$\text{div}\vec{G} = -4\pi G\rho_{\text{mass}} \quad (8)$$

3) On refait la dérivation habituelle de l'équation de propagation du son pour $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ mais dans l'équation d'Euler on a une force volumique en plus de $-\vec{\text{grad}}P$ qui est $\rho\vec{\mathcal{G}}$. A l'ordre le plus bas on ne peut avoir $\vec{\mathcal{G}}$ car le gaz est homogène et il n'y a aucune direction préférée. Donc on a ce terme qui apparait uniquement lorsqu'on considère la linéarisation et $\text{div}\vec{\mathcal{G}} = 4\pi G\delta\rho$. La linéarisation d'Euler donne

$$\rho_0\partial_t\vec{v} = -c^2\text{grad}\delta\rho + \rho_0\vec{\mathcal{G}}. \quad (9)$$

Comme d'habitude on prend la divergence (on utilise (11)) et on remplace dans la dérivée de l'équation de continuité pour trouver

$$\partial_{tt}\delta\rho - c^2\Delta\delta\rho = -\text{div}\rho_0\vec{\mathcal{G}} = 4\pi G\rho_0\delta\rho. \quad (10)$$

4) On considère une onde plane selon x de mode k , donc en $\propto e^{i(\omega t - kx)}$ avec $\omega = kc$ et il vient la relation de dispersion

$$\omega^2 = c^2k^2 - 4\pi G\rho_0. \quad (11)$$

Si ρ_0 est assez grand, ou plutôt si k est suffisamment petit, on va avoir $\omega^2 < 0$ et donc un mode croissant. La longueur d'onde de Jeans, au dessus laquelle on a instabilité est telle que

$$c^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 4\pi G\rho_0. \quad (12)$$

On peut estimer pour l'atmosphère. On peut calculer la vitesse du son avec $c^2 = \gamma\frac{RT}{M}$ où M est la masse molaire et donc $c^2 \simeq (340\text{m/s})^2$. La masse volumique de l'air est 1.2kg/m^3 , et donc $\lambda \simeq 67000\text{ km}$. L'atmosphère est stable à Rayleigh-Jeans. Pour l'effondrement des étoiles c'est beaucoup plus grand car ρ_0 est beaucoup plus faible dans les nuages moléculaires.

Comment interpréter la compétition entre les deux termes de (10) ? On a compétition entre le temps d'effondrement en $1/\sqrt{G\rho_0}$ et le temps correspondant à la propagation des ondes sur une longueur d'onde $1/(kc)$. Si le son est beaucoup plus rapide, il va effacer les surdensités. S'il est plus lent que l'effondrement alors il n'arrive pas à contrebalancer à temps l'effondrement.

Exercice 29 : goutte de rosée

On considère la superposition de 2 fluides parfaits incompressibles et non miscibles (initialement au repos), celui de masse volumique ρ_1 occupe l'espace $z > 0$ et celui de masse volumique ρ_2 l'espace $z < 0$ (avec $\rho_1 > \rho_2$). On considère une petite perturbation de la surface de la forme: $z = \xi(x, t) = \xi_0 e^{\alpha t + ikx}$, où k est réel positif et α peut être complexe. De plus, on admettra que la différence de pression entre les 2 fluides s'écrit à l'interface ($z = \xi(x, t)$) en fonction d'un facteur γ constant: $p_1 - p_2 = \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$. C'est un effet de tension superficielle entre les 2 fluides. On supposera toujours les champs des vitesses comme irrotationnels ($\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$).

1) En utilisant les potentiels associés aux champs des vitesses (ϕ tel que $\vec{v} = \text{grad}\phi$), et en écrivant les équations d'Euler dans les 2 milieux, établir une équation de continuité à l'interface. Utiliser la non miscibilité des fluides pour obtenir une autre équation.

2) Avec les résultats de la question 1), montrer que $\text{Re}(\alpha) = 0$ (perturbation stable) seulement si $k > k_c$ que l'on déterminera. Que peut-on en déduire pour une goutte de rosée qui tient sur l'envers d'une feuille?

Eléments de solution

On a 2 fluides, le plus lourd au-dessus ($\rho_1 > \rho_2$) et une petite perturbation se produit à l'interface. Ce que l'on cherche à comprendre, c'est à quelle condition cela peut être possible. C'est-à-dire que la petite perturbation ne va pas se mettre à augmenter avec le temps de manière exponentielle.

1) On suppose qu'il y a une petite perturbation à l'interface, soit une petite modification de la surface entre les 2 fluides. Cela va provoquer un champ des vitesses non nul dans chaque fluide. On suit l'énoncé et on considère que la modification de la surface est de la forme: $z = \xi(x, t) = \xi_0 e^{\alpha t + ikx}$, où k est réel positif et α peut être complexe. On écrit l'équation d'Euler dans un des fluides en utilisant le potentiel $\phi(x, z, t)$ champ des vitesses, où x est le

sens de propagation de la perturbation. Soit, en négligeant les termes petits d'ordre 2:

$$\vec{\text{grad}} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \rho g z \right) = 0. \quad (1)$$

En utilisant la relation donnée dans l'énoncé entre la différence de pressions à l'interface et en utilisant (1), on peut écrire au niveau de l'interface:

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \rho_1 g \xi + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \rho_2 g \xi \quad (2)$$

De plus, la non miscibilité des fluides donne:

$$v_{1,\perp} \simeq \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = v_{2,\perp} \simeq \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \simeq \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (3)$$

Cela répond à la question.

2) La stratégie est claire. Il faut utiliser (3) pour obtenir une relation entre ϕ_1 et ξ et aussi ϕ_2 et ξ . Ce que l'on pourra reporter dans (1) pour obtenir une équation de dispersion. Pour cela, il faut d'abord calculer $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ dans les fluides 1 et 2 et donc trouver la dépendance en z des ϕ . Il faut utiliser l'incompressibilité des fluides qui donne: $\text{div} \vec{v} = 0$, soit le laplacien de ϕ est nul pour chaque fluide: $\Delta \phi = 0$. Cela donne que pour le fluide 1 (du dessus), la dépendance en z de ϕ_1 est en e^{-kz} ($k > 0$) et pour le fluide 2, la dépendance en z de ϕ_2 est en e^{kz} . Alors (3) donne: $-k\phi_1 = \alpha\xi$ et $k\phi_2 = \alpha\xi$. On obtient ensuite la relation de dispersion avec (1):

$$(\rho_1 + \rho_2)\alpha^2 - kg(\rho_1 - \rho_2) + k^3\gamma = 0.$$

On cherche à voir à quelles conditions $\text{Re}(\alpha) = 0$ (perturbation stable) est possible. On pose donc: $\text{Re}(\alpha) = 0$, soit $\alpha = i\omega$ (ω réel) et on va regarder si c'est possible. Cela donne:

$$\omega^2 = \frac{-kg(\rho_1 - \rho_2) + k^3\gamma}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Ce qui est positif si:

$$k > k_c = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)/\gamma}. \quad (4)$$

Ce qui répond à la question.

On va montrer qu'une goutte de rosée peut tenir (sans se disloquer) sur l'envers d'une feuille. Dit autrement, à l'interface eau-air, l'eau ne se met pas à couler dans l'air ($\gamma = 7 \cdot 10^{-2}$ N/m

pour l'interface eau-air). Pour voir en pratique comment cela se traduit pour la goutte de rosée au revers d'une feuille, on traduit la relation précédente en terme de longueur d'onde. La relation (4) donne que la perturbation à l'interface est stable si: $\lambda < \lambda_c \sim 17$ mm. La taille d'une goutte d'eau est de quelques millimètres, donc λ aussi. Ce qui veut dire que pour une goutte de rosée, la condition $\lambda < \lambda_c$ est largement vérifiée. Toute perturbation à l'interface eau-air est donc stable et la goutte ne vas pas se mettre à couler dans l'air. Ce qui conclut.

Exercice 30 : MQ-Coulomb

On considère l'atome d'hydrogène en mécanique quantique. Écrire l'énergie potentielle de l'électron dans le champ électrostatique du noyau que l'on considérera comme immobile.

Discuter les symétries du problème et proposer une équation de Schrödinger stationnaire que l'on pourra écrire pour la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$. Discuter l'interprétation de ψ .

On peut montrer que lorsque l'on cherche des solutions à symétrie sphérique, on peut poser $\psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ et alors $u(r)$ satisfait une équation de Schrödinger "à une dimension" dans la seule variable r , qui est l'analogue de l'équation unidimensionnelle habituelle (sauf que $r \geq 0$).

Ecrire cette équation. Discuter l'interprétation de $u(r)$ et en particulier la condition de normalisation correspondante.

On cherche à déterminer l'énergie d'un état lié, à symétrie sphérique. Pour cela on essayera une fonction u de la forme

$$u(r) = r^\alpha e^{-r/r_0} \quad (1)$$

dépendant d'un paramètre α .

Déterminer dans quel cas ceci est une solution de l'équation de Schrödinger et quelle est l'énergie correspondante ? Conclusion ?

Eléments de solution

Le potentiel électrostatique du noyau est $\phi(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$ et donc l'énergie potentielle de l'électron dans ce champ est $(-e)\phi(\vec{r})$, soit

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (2)$$

On a évidemment une symétrie sphérique. Mais cela n'implique pas que les solutions de Schrödinger ont forcément aussi cette symétrie sphérique, seulement que l'on peut trouver certaines solutions qui ont cette symétrie. L'équation de Schrödinger est (*attention à 3 dimensions l'équation n'est pas au programme, mais connu de presque tous les candidats ! Si besoin la faire deviner en généralisant à partir d'une dimension.*)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi = E\psi , \quad (3)$$

où Δ est le Laplacien. Discuter que $|\psi(\vec{r})|^2 dx dy dz = |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ est la proba.

Pour une solution $\psi(\vec{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{4\pi}}$ ne dépendant que de r on a $\Delta R(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rR(r))$ et Schrödinger pour $\psi = \frac{R(r)}{\sqrt{4\pi}} = \frac{u(r)}{r\sqrt{4\pi}}$ devient effectivement pour u

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] u(r) = Eu(r) , \quad (4)$$

exactement comme à une dimension, sauf qu'ici $r \geq 0$. La probabilité de trouver l'électron entre r et $r + dr$ est $|\psi(r)|^2 r^2 dr 4\pi = |u(r)|^2 dr$, ce qui explique le facteur $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ dans la normalisation de u .

Essayons donc

$$\begin{aligned} u(r) &= r^\alpha e^{-r/r_0} , \\ u'(r) &= \left(\alpha r^{\alpha-1} - \frac{r^\alpha}{r_0} \right) e^{-r/r_0} , \\ u''(r) &= \left(\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} - 2\alpha \frac{r^{\alpha-1}}{r_0} + \frac{r^\alpha}{r_0^2} \right) e^{-r/r_0} = \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2} - \frac{2\alpha}{r_0 r} + \frac{1}{r_0^2} \right) u(r) . \end{aligned} \quad (5)$$

On voit donc que u satisfait l'équation de Schrödinger (4) si et seulement si

$$\alpha(\alpha-1) = 0 \quad , \quad \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2\alpha}{r_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad , \quad -\frac{\hbar^2}{2m r_0^2} = E . \quad (6)$$

La première égalité donne $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. $\alpha = 0$ est exclu par la deuxième égalité. Donc :

$$\alpha = 1 \quad , \quad r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \quad , \quad E = -\frac{m}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 . \quad (7)$$

On voit que r_0 est le rayon de Bohr (53 pm) et E l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène (-13,6 eV).

Exercice 31 : ondes de surface

On considère un bassin infini rempli d'eau jusqu'à une hauteur h . On considère l'eau comme un fluide parfait incompressible et le fond du bassin est horizontal.

1) Lorsque l'eau du bassin est au repos, quelle est la pression dans l'eau ? Montrer qu'en général, on a $\Delta P = 0$.

2) Lorsqu'il y a de petites ondes de surface, c'est-à-dire des petites vagues, quelle est la pression dans l'eau ? Quelle est la vitesse de l'eau à la surface et sous la surface ?

Eléments de solution

C'est le champ de vitesse et les trajectoires des particules que cet exercice cherche à déterminer.

Dériver les équations des ondes de surface quand on passe par le potentiel est un classique. On rappelle la dérivation habituelle et on donne plus loin celle suggérée par le sujet. La coordonnée verticale z a pour origine le fond du bassin. On cherche des déformations ($z = h + s$) de surface de type

$$s = s_0 e^{i(\omega t - kx)} . \quad (1)$$

On linéarise donc on néglige l'accélération convective. Et donc le champ de vitesses est irrotationnel (on trouve que c est une constante et donc constante nulle pour des oscillations) et dérive d'un potentiel $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$. L'incompressibilité donne $\Delta\phi = 0$ et on cherche des solutions de la forme

$$\Phi(x, z, t) = \varphi(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (2)$$

ce qui est juste une séparation de variable où on devine ce qu'on va trouver. On a alors

$$\varphi''(z) - k^2\varphi = 0. \quad (3)$$

La solution est

$$\varphi = a_1 e^{kz} + a_2 e^{-kz}. \quad (4)$$

On doit avoir une condition de vitesse verticale nulle au fond (or $v_z = \partial_z \phi$) donc

$$a_1 = a_2. \quad (5)$$

La condition de surface est $\partial_t s = v_z$ (en fait la condition générale est (24) mais on linéarise) donc en ne gardant que l'ordre le plus bas il vient

$$k[a_1 e^{kh} - a_2 e^{-kh}] = i\omega s_0 \quad (6)$$

donc

$$a_1 = a_2 = \frac{i\omega s_0}{2k \sinh(kh)} \quad (7)$$

et on trouve

$$\Phi = \frac{i\omega s_0 \cosh(kz)}{k \sinh(kh)} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (8)$$

Il faut encore la relation $\omega(k)$. A partir d'Euler on trouve que

$$\partial_t \Phi + \frac{P}{\rho} + gs \quad (9)$$

est une constante globale (on trouve que son gradient est nul donc plus précisément c'est une fonction globale du temps). En prenant la dérivée convective selon les particules à la surface, et en négligeant les ordres deux ça donne

$$\partial_{tt} \Phi + g\partial_t s = \partial_{tt} \Phi + g\partial_z \Phi = 0 \quad (10)$$

qu'on évalue à $z = h$ car c'est déjà d'ordre un, et alors il vient la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh). \quad (11)$$

On remplace dans Φ et en prenant le gradient on a le champ de vitesses.

$$v_x = \omega s_0 \frac{\cosh(kz)}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx), \quad (12)$$

$$v_z = -\omega s_0 \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx). \quad (13)$$

1) La méthode guidée implicitement passe directement par la pression. En effet à la première question on demande de rappeler l'équilibre hydrostatique

$$P_{\text{stat}} = P_{\text{atm}} - \rho g(z - h). \quad (14)$$

De l'incompressibilité $\text{div} \vec{v} = 0$ et en négligeant le terme convectif dans l'équation d'Euler il vient juste $\Delta P = 0$. On vérifie au passage que c'est le cas pour la pression statique ci-dessus.

2) Dans le cas avec des vagues, on va utiliser $\Delta P = 0$. La pression va être légèrement modifiée autour de la pression statique donc on pose

$$P = P_{\text{stat}} + \delta P \quad \Rightarrow \quad \Delta \delta P = 0. \quad (15)$$

La réponse à une onde de surface (1) va être de la même forme et donc

$$\delta P = \underline{\delta P}(z) e^{i(\omega t - kx)}, \quad (16)$$

et la condition de Laplacien donne

$$\underline{\delta P}''(z) = k^2 \underline{\delta P}(z). \quad (17)$$

La solution est

$$\underline{\delta P}(z) = b_1 e^{kz} + b_2 e^{-kz}. \quad (18)$$

Avec l'équation d'Euler on obtient alors la vitesse

$$v_x = \frac{k}{\omega \rho} \delta P \quad (19)$$

$$v_z = \frac{ik}{\omega \rho} (b_1 e^{kz} - b_2 e^{-kz}) e^{i(\omega t - kx)} \quad (20)$$

La condition de vitesse verticale nulle au fond du bassin donne directement

$$b_1 = b_2. \quad (21)$$

La condition de pression atmosphérique sur la surface donne

$$b_1 (e^{k(h+s)} + e^{-k(h+s)}) + P_{\text{atm}} - \rho g s_0 = P_{\text{atm}}. \quad (22)$$

Dans les exponentielles on peut prendre h au lieu de $h + s$ car c'est déjà un terme d'ordre un et on a alors

$$b_1 = \frac{\rho g s_0}{2 \cosh(kh)}. \quad (23)$$

On a déjà utilisé l'équation de conservation qui donne l'absence de divergence de la vitesse, et l'équation d'Euler. On a dit que la vitesse au fond est bien compatible avec la forme du fond. Il reste à dire que la vitesse en surface est compatible avec la forme de la surface. En général on trouverait

$$\partial_t s + v_x \partial_x s = v_z, \quad (24)$$

mais en linéarisant c'est seulement

$$\partial_t s = i\omega s = v_z. \quad (25)$$

En injectant dans (20) est en ne gardant que les termes d'ordre un on a alors

$$-\rho \omega^2 s_0 = -2kb_1 \sinh(kh) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = kg \tanh(kh). \quad (26)$$

On a donc $\omega(k)$ et en remplaçant dans (19) (20) la forme complète de la vitesse qui est bien évidemment la même que dans la méthode basée sur le potentiel de vitesse (12).

Les trajectoire des particules sont normalement calculées avec

$$\dot{x} = v_x(x, z, t) \quad \dot{z} = v_z(x, z, t). \quad (27)$$

c'est à dire qu'on a un passage du champ Eulerien de vitesse à de la formulation Lagrangienne où on suit une particule. Mais la différence est d'ordre deux car les déplacement, tout comme

la vitesse, sont d'ordre un. On peut donc prendre une intégrale sur le temps très brutalement à partir du champ de vitesses pour avoir les trajectoires

$$x = s_0 \frac{\cosh(kz)}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \quad (28)$$

$$z = s_0 \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \quad (29)$$

A la surface, et si le bassin est très profond devant la longueur d'onde, les rapports des fonctions hyperboliques sont 1 et on a des cercles de rayon s_0 . C'est intéressant de voir dans quel sens ça tourne en fonction du sens de propagation de l'onde, ici vers les x croissants. On peut tracer le mouvement d'un canard à la surface. Quand il est au plus haut il va dans le sens de l'onde et inversement quand il est dans le creux de la vague. Si on ne surfe pas la vague on fait des ronds dans l'eau !

En revanche, tout au fond du bassin, si $kz \ll 1$ on a des mouvements elliptiques et l'amplitude du mouvement vertical est kz celle du mouvement horizontal.

Si maintenant le bassin est peu profond par rapport à la longueur d'onde on a

$$x = \frac{s_0}{kh} \sin(\omega t - kx) \quad (30)$$

$$z = \frac{s_0 z}{h} \cos(\omega t - kx) \quad (31)$$

et c'est partout que le mouvement vertical est en kz de celui du mouvement horizontal. On a toujours des ellipses.

En question subsidiaire on peut s'intéresser à la pression qui est

$$\delta P = \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh)} \rho g s. \quad (32)$$

A la surface c'est donc comme si on avait une pression hydrostatique modulée par la sur-épaisseur ou sous-épaisseur d'eau. Mais en profondeur on a une redistribution horizontale de ces fluctuations de pression hydrostatique (c'est une interprétation qui a ses limites puisque

cela n'a pas de sens de parler d'hydrostatique ici) et cela tend donc à les effacer une fois que $kz \ll kh$, donc lorsqu'on descend à des profondeurs plus grandes que la longueur d'onde.

Exercice 32 : monopôles magnétiques

On suppose qu'il existe des charges magnétiques (dites monopôles magnétiques) qui sont définies localement par la relation:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 \rho_m,$$

où ρ_m est la densité de charges magnétiques. Attention, l'unité pour une charge magnétique n'est pas le Coulomb. On suppose de plus que la charge magnétique est conservée localement.

1) *Comment modifier les équations de Maxwell pour assurer cette conservation de la charge magnétique.*

On cherche à observer ces monopôles magnétiques dans la matière en faisant passer un morceau de matière à travers une bobine et ceci, un grand nombre fois $K = 100$. Les deux extrémités de la bobine sont reliées par un fil conducteur de résistance nulle. La bobine, de longueur 1 m, est constituée de 100 spires et la surface d'une spire est de 1 cm^2 . On supposera la résistance de cette bobine négligeable. Pour simplifier on considérera que ce morceau de matière contient un seul monopôle magnétique de charge q_m . On prendra: $q_m = 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ C.m/s}$.

2) *Quel courant électrique pourrait-on mesurer dans la bobine si ce monopôle existait dans le morceau de matière?*

Eléments de solution

Cet exercice nécessite de bien manipuler une partie des équations de Maxwell. En cours, la conservation locale de la charge électrique est constatée dans ces équations. Ici, on prend le problème à l'envers avec la notion de charges magnétiques.

1) Il faut modifier l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

En effet, si on prend la divergence de cette relation, on voit que l'on n'obtient pas une relation de conservation locale de la charge magnétique. On devrait obtenir quelque chose comme:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_m = 0.$$

Ce qui manque, c'est le courant \vec{j}_m que l'on doit donc inclure dans l'équation de Maxwell-Faraday, soit:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

2) Alors, si on fait passer une charge magnétique q_m dans la bobine, il va y avoir un courant magnétique: $i_m = \int d\vec{S} \cdot \vec{j}_m$, lorsque l'on intègre sur la surface d'une spire. Ce courant est donc aussi la variation de charge magnétique qui traverse cette spire par unité de temps.

Maintenant, on intègre l'équation (1) sur la surface d'une spire (pour commencer). On obtient:

$$\int d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\mu_0 i_m - \frac{d\phi}{dt},$$

où ϕ est le flux du champ magnétique dans la bobine pour une spire et $i_m = \int d\vec{S} \cdot \vec{j}_m$ est le flux de \vec{j}_m pour une spire également.

On peut évidemment faire cela N fois, pour toutes les spires, alors: $\int d\vec{l} \cdot \vec{E}$ est la tension aux bornes de la bobine que l'on suppose de résistance négligeable. Donc, on considère que V est nul. Ensuite: $i_m \rightarrow I_m$ est le courant magnétique total dans la bobine et $\phi \rightarrow \Phi$ le flux magnétique total dans la bobine.

La relation devient (en intégrant sur le temps):

$$\mu_0 Q_m + \Phi = 0.$$

$Q_m = Nq_m$ est la charge magnétique totale qui traverse la bobine et $\Phi = N\mu_0 nSI$, où I est le courant électrique que l'on cherche. Si en plus, on fait K tours (énoncé), la charge magnétique n'est pas Q_m mais $K \cdot Q_m$. Au final, on obtient: $|I| = Kq_m / (nS) = 3.3 \cdot 10^{-5}$ A.

Exercice 33 : MQ - Oscillateur anharmonique

On rappelle qu'en mécanique quantique, pour un oscillateur harmonique à une dimension, c'est à dire dans un potentiel $V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$, l'énergie de l'état fondamental et la fonction d'onde de l'état stationnaire correspondant sont

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad , \quad \varphi_0(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) . \quad (1)$$

1) Discuter la signification de φ_0 et déterminer la constante A .

2) On change maintenant le potentiel V en y ajoutant une "petite" modification

$$dV(x) = \gamma \frac{m^2\omega^3}{2\hbar} x^4 . \quad (2)$$

Justifier cette façon d'écrire dV et préciser ce que veut dire "petit". Comment change l'énergie de l'état fondamental en première approximation?

Eléments de solution

1) La fonction d'onde φ_0 est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_0''(x) + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \varphi_0(x) = \frac{\hbar\omega}{2}\varphi_0(x) . \quad (3)$$

Son module au carré $|\varphi_0(x)|^2$ représente une densité de probabilité de présence (soit $dx |\varphi_0(x)|^2$ la probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$), d'où la condition de normalisation

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi_0(x)|^2 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) = |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} = |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} , \quad (4)$$

et donc, à un choix de phase irrelevant près.

$$A = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} . \quad (5)$$

On notera le changement de variables

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad (6)$$

effectué pour calculer l'intégrale. La variable ξ est sans unité. Le potentiel peut alors s'écrire $V(x) = \frac{\hbar\omega}{2}\xi^2$.

2) Le terme supplémentaire dV est de même $dV(x) = \gamma\frac{\hbar\omega}{2}\xi^4$. On voit donc que γ est un paramètre numérique (sans unité) et la condition dV petit devant V sera alors exprimé par $\gamma \ll 1$.

Dans la suite il ne s'agit pas de résoudre Schrödinger avec $V + dV$ mais d'amener le candidat à raisonner sur l'interprétation de la probabilité de présence.

En x , l'énergie potentielle de la particule est augmenté de dV et en pondérant cette augmentation par la probabilité de présence on obtient

$$dE \simeq \int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi_0(x)|^2 dV(x) . \quad (7)$$

La suite est le calcul de l'intégrale:

$$dE = |A|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} \gamma \frac{\hbar\omega}{2} \xi^4 = \gamma \frac{\hbar\omega}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} \xi^4 . \quad (8)$$

Pour l'intégrale on a $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\alpha\xi^2} \xi^4 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\alpha\xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$, puis en posant $\alpha = 1$ on a $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} \xi^4 = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$. Finalement $dE = \gamma \frac{\hbar\omega}{2} \times \frac{3}{4}$ et

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\gamma\right) . \quad (9)$$

Exercice 34 : Remplissage d'un réseau optique

Trois lasers de même intensité et de direction respective (Ox) , (Oy) et (Oz) sont chacun rétro-réfléchis par 3 miroirs. Ils ont des fréquences légèrement différentse.

1) Préciser la distribution spatiale d'intensité dans la région où ils se recouvrent, et justifier le nom de réseau optique employé pour cette distribution.

On prend en compte la taille finie des lasers, on considère qu'ils ont tous le même profil transverse Gaussien de largeur à $1/e^2$ égale à W , et que leur recouvrement spatial est optimal.

2) Que devient la distribution d'intensité au voisinage de leur intersection?

Des atomes peuvent être piégés dans cette distribution de lumière car ils acquièrent une énergie potentielle négative et proportionnelle à l'intensité lumineuse.

3) Décrire le potentiel de piégeage au voisinage du centre du piège. Les atomes étudiés se repoussent entre eux, le coût en énergie lorsque deux atomes occupent le même site du réseau vaut U . Décrire autant que possible le remplissage du réseau en fonction du nombre d'atomes N .

Eléments de solution

Chacun des laser forme une onde stationnaire dans le montage proposé. Les 3 ondes sont indépendantes les unes des autres du fait des différentes fréquences. Alors, avec des notations évidentes, on peut écrire:

$$I(\cdot) = 4I_0 (\sin^2(k_L x + \phi_x) + \sin^2(k_L y + \phi_y) + \sin^2(k_L z + \phi_z)).$$

La distribution d'intensité lumineuse présentent des maxima régulièrement espacés de $\lambda/2$. Cela forme un réseau optique cubique.

2) On a:

$$I(y, z) = I_0 \exp(-2 \frac{y^2 + z^2}{W^2}).$$

pour le faisceau suivant (x) et des expressions comparables $I(x, z)$ et $I(x, y)$ pour les 2 autres directions. On obtient donc au voisinage du centre O , sans prendre en compte les ondes stationnaires:

$$I(x, y, z) \simeq I_0 (3 - 4 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{W^2}). \quad (1)$$

Cela veut dire qu'on a une dépendance transverse (en r^2) qui vient se rajouter à la structure en ondes stationnaires du 1). Lorsque l'on s'éloigne du centre, l'intensité diminue, de manière proportionnelle à r^2 . Donc le réseau cubique n'est plus uniforme mais l'intensité des maxima diminue lentement à l'échelle de $\lambda/2 \ll W$.

3) C'est la partie difficile de l'exercice. Les atomes sont piégés aux maxima d'intensité du réseau mais ces maxima sont de moins en moins marqués quand on s'éloigne du centre. Ce qui va conduire à un remplissage du réseau en fonction du nombre N d'atomes. Par exemple, lorsque N est petit, la situation la plus favorable est de mettre un atome par site, en remplissant progressivement à partir du centre. La plus grande distance au centre R est donc:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = N(\lambda/2)^3.$$

Puis, lorsque $\frac{1}{2}kR^2 = U$ avec $k \sim 1/W^2$ (voir (1)), il devient plus avantageux de mettre 2 atomes par site proche du centre qu'un atome par site au delà de R . On a ainsi un premier nombre critique d'atomes N_1 tel que:

$$\frac{4}{3}\pi(2U/k)^3 = N_1(\lambda/2)^3.$$

Lorsque l'on a plus de N_1 atomes, on a donc des sites au voisinage du centre avec 2 atomes par site et plus loin des sites avec 1 atome. Ce qui répond à la question.

Exercice 35 : puissance EM dissipée dans une barre

On considère un barreau métallique fixe de longueur $h = 1$ m, de rayon $R = 2$ cm et de conductivité $\gamma = 5 \cdot 10^7$ S/m, soumis à un champ magnétique spatialement uniforme, variable dans le temps à fréquence $f = 50$ Hz et de direction parallèle à l'axe du cylindre (z): $\vec{B} = B_0 \cos(2\pi ft)\vec{e}_z$. On considérera que $R \ll h$ et on négligera les effets de bord.

Déterminer l'énergie EM moyenne dans le temps dissipée dans le barreau. On montrera en particulier qu'il est nécessaire d'exprimer celle-ci en conservant le(s) terme(s) en f^4 . Estimer alors l'erreur en % que l'on fait sur le calcul de l'énergie dissipée?

Eléments de solution

C'est un exercice classique d'EM dans lequel on arrive très rapidement à une réponse qui ne correspond pas à ce qui est demandé dans l'énoncé. Cette partie est la partie proche du cours. Ensuite, il faut réfléchir.

Pour trouver la puissance dissipée dans le barreau, il faut déjà trouver $\vec{j}(\vec{r}, t)$ donc $\vec{E}(\vec{r}, t)$ dans le barreau, non nul du fait de l'existence d'un champ magnétique variable dans le temps (équation de Maxwell-Faraday). Du fait de l'invariance du problème par rotation autour de l'axe (z) et de l'invariance par translation suivant z (on néglige les effets de bord -énoncé-), on a: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(r, t)$. Comme: $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ est parallèle à z on voit que $E_z = 0$ et tout plan contenant l'axe (z) contenant \vec{B} , \vec{E} est perpendiculaire à ce plan, donc: $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t)\vec{e}_\theta$. On en déduit donc \vec{E} en intégrant l'équation de Maxwell-Faraday sur une surface du cylindre (de rayon r) perpendiculaire à (z). Soit:

$$\vec{E} = -\frac{r}{2}\dot{B}\vec{e}_\theta.$$

On a alors: $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ puis l'énergie EM dissipée en moyenne dans le barreau:

$$\mathcal{E} = \int_0^R 2\pi h r dr \gamma \frac{r^2}{4} \langle \dot{B}^2 \rangle = \frac{\gamma \pi h R^4 B_0^2}{16} (2\pi f)^2.$$

Ce qui ne conclut pas car cette énergie est en f^2 et ne contient pas de terme(s) en f^4 comme demandé dans l'énoncé.

Ce que l'on a oublié, c'est que le champ \vec{E} plus haut va lui même contribuer à modifier le champ magnétique initial via l'équation de Maxwell-Ampère: $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\gamma\vec{E}$. On peut vérifier facilement que le terme en $\frac{1}{2}\partial\vec{E}/\partial t$ est négligeable. On va noter cette contribution au champ magnétique \vec{B}' . On doit donc trouver \vec{B}' tel que:

$$\text{rot}\vec{B}' = \mu_0\gamma \left[-\frac{r}{2}\dot{B}\vec{e}_\theta \right].$$

Avec: $\dot{B} = -B_0(2\pi f)\sin(2\pi ft)$. On voit facilement que \vec{B}' est aussi suivant (z), mais attention \vec{B}' est nul en dehors du barreau et donc nul aussi en R . On trouve (il faut utiliser un

petit rectangle situé dans un plan contenant (z) ayant une longueur suivant (z) à la cote r et l'autre à la cote R):

$$\vec{B}'(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \gamma}{4} (r^2 - R^2) \dot{B} \vec{e}_z.$$

Et ce champ \vec{B}' va donc produire un champ \vec{E}' tel que:

$$\text{rot} \vec{E}' = -\partial \vec{B}' / \partial t.$$

Une fois calculé ce champ \vec{E}' , on pourra calculer à nouveau l'énergie EM dissipée en utilisant cette fois-ci le champ électrique: $\vec{E} + \vec{E}'$ et voir ce que cela change. On revient plus loin sur la nécessité d'itérations supplémentaires. Pour trouver \vec{E}' , on procède comme plu haut mais en faisant attention à l'intégration sur la surface:

$$E'(r, t) = -\frac{\mu_0 \gamma}{4} \ddot{B} \frac{1}{r} \int_0^r (r'^2 - R^2) r' dr' = -\frac{\mu_0 \gamma}{4} \ddot{B} [r^3/4 - R^2 r/2]$$

On peut alors recalculer l'énergie dissipée dans le barreau:

$$\mathcal{E} = \int_0^R 2\pi h r dr \gamma \langle (E(r, t) + E'(r, t))^2 \rangle$$

On obtient:

$$\mathcal{E} = \left[\frac{\gamma \pi h R^4 B_0^2}{16} (2\pi f)^2 \right] \left[1 + \alpha \left(\frac{\mu_0 \gamma (2\pi f) R^2}{4} \right)^2 \right]$$

Avec $\alpha = 11/24$. On peut se tromper dans le calcul de ce coefficient, ce n'est pas très grave. Ceci étant, la forme de l'expression est intéressante: on trouve la valeur plus haut (en f^2) et un terme correctif, qui donne un terme en f^4 . Le terme correctif dans les crochets: $(\frac{\mu_0 \gamma (2\pi f) R^2}{4})^2 \simeq 0.36$ avec les valeurs numériques de l'énoncé: il n'est donc pas négligeable et c'est pour cela qu'il fallait pousser le calcul (au moins) jusque là. On peut faire apparaître l'épaisseur de peau pour ce montage mais ce n'est pas demandé. Si on voulait aller plus loin dans les itérations, en suivant la méthode ci-dessus, on obtiendrait une nouvelle correction en $(\frac{\mu_0 \gamma (2\pi f) R^2}{4})^4 \simeq 0.12$ qui n'est pas encore négligeable par rapport à l'unité. Cela veut dire que l'on a obtenu une expression pour l'énergie dissipée dans le barreau qui contient bien un terme en f^4 , comme demandé, mais l'erreur sur ce calcul est encore d'environ 10 %.

Exercice 36 : MQ - réflexion - transmission harmonique

Un jet d'électrons d'énergie $E > 0$ se propage selon l'axe x dans une région de potentiel nul pour $x < -a$. Entre $x = -a$ et $x = a$ il rencontre une région de potentiel (d'énergie potentielle) $V(x) = V_0 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$ avec $V_0 > 0$. Pour $x > 0$ on a de nouveau un potentiel nul. On supposera

$$\frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{(E + V_0)^2}{V_0} . \quad (1)$$

- 1) En posant $V_0 = \frac{m}{2}\omega^2 a^2$ quelle interprétation pouvez-vous donner à cette condition (1) ?
- 2) Déterminer autant que possible la fonction d'onde dans les différentes régions, et discuter comment obtenir les coefficients de réflexion et de transmission.

Eléments de solution

Un exercice pas facile qui demandera de guider le candidat à certaines étapes.

1) En posant $V_0 = \frac{m}{2}\omega^2 a^2$ on a $V(x) = \frac{m}{2}\omega^2(x^2 - a^2)$ ce qui montre déjà que ω est la fréquence (pulsation) de l'oscillateur classique correspondant. Observons aussi que V_0 est la profondeur maximale du puit harmonique et que $E + V_0$ est l'énergie des électrons mesurée depuis le minimum de ce puit harmonique. La condition (1) devient alors

$$(E + V_0)^2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{m}{2}\omega^2 a^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \Rightarrow E + V_0 = \frac{\hbar\omega}{2} . \quad (2)$$

Mais $\frac{\hbar\omega}{2}$ est l'énergie du niveau fondamental dans un potentiel harmonique $V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$, mesurée depuis son minimum, si $-\infty < x < \infty$. Ici, le choix de E correspond donc précisément à l'énergie de cet état lié. Mais comme $E > 0$, ici il n'y a pas "d'état lié à l'intérieur du puits". Comme on verra après, ce choix de E implique que la solution de Schrödinger entre $-a$ et a sera bien donnée par la fonction d'onde du fondamental de l'oscillateur harmonique correspondant.

2) On a donc 3 régions, avec

$$\begin{aligned}
 \text{région 1 : } \quad x < -a & : \quad V(x) = 0 , \\
 \text{région 2 : } \quad -a < x < a & : \quad V(x) = \frac{m}{2}\omega^2(x^2 - a^2) , \\
 \text{région 3 : } \quad a < x & : \quad V(x) = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

et l'équation de Schrödinger stationnaire est

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x) . \tag{4}$$

On posera comme d'habitude $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ et on trouve pour les régions 1 et 3 :

$$\phi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad , \quad \phi_3(x) = Fe^{ikx} , \tag{5}$$

sans terme e^{-ikx} dans la région 3, vu qu'il n'y a pas de flux venant de $+\infty$. Dans la région 2 on a

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_2'' + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \phi_2 = (E + \frac{m}{2}\omega^2 a^2)\phi_2 = (E + V_0)\phi_2 = \frac{\hbar\omega}{2}\phi_2 , \tag{6}$$

où on a utilisé la relation (2). On peut simplifier un peu pour obtenir

$$-\phi_2'' + \alpha^2 x^2 \phi_2 = \alpha \phi_2 \quad , \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar} . \tag{7}$$

A ce stade on peut laisser le candidat chercher un peu pour trouver la solution, mais assez rapidement il conviendra de suggérer d'essayer une solution de la forme $e^{\beta x^2}$.

Si on essaie donc $\phi_2 = Ce^{\beta x^2}$ on trouve $\phi_2' = 2\beta x\phi_2$ et $\phi_2'' = (4\beta^2 x^2 + 2\beta)\phi_2$ ce qui donne

$$-4\beta^2 x^2 - 2\beta + \alpha^2 x^2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \frac{\alpha^2}{4} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\alpha}{2} . \tag{8}$$

Les deux équations sont compatibles et donnent $\beta = -\alpha/2$, soit $\phi_2 = Ce^{-\alpha x^2/2} = Ce^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$. Le fait que les deux équations sont compatibles vient évidemment du choix particulier de E . Autrement dit, avec un choix différent de E , la simple fonction $e^{\beta x^2}$ n'aurait pas été solution.

Lorsque l'on cherche les états liés dans un potentiel donné (à une dimension) et lorsque'on a trouvé une solution normalisable on se contente de celle-ci. Mais ici, la question de la normalisabilité ne se pose pas et on a besoin de la deuxième solution, linéairement indépendante.

On peut encore laisser le candidat chercher un peu, mais il faudra très probablement suggérer assez vite de chercher une deuxième solution de la forme $\phi(x) = f(x)e^{-\alpha x^2/2}$.

Insérons donc dans (7) l'ansatz $\phi_2(x) = f(x)e^{-\alpha x^2/2}$. On a $(fe^{-\alpha x^2/2})'' = [f(\alpha^2 x^2 - \alpha) - 2\alpha x f' + f'']e^{-\alpha x^2/2}$ et comme $e^{-\alpha x^2/2}$ est déjà solution de (7) on obtient pour f une équation plus simple :

$$f'' = 2\alpha x f' . \quad (9)$$

Evidemment, $f = C$ est solution et redonne juste notre solution précédente. Mais on a aussi la nouvelle solution $f'(x) = De^{\alpha x^2}$ et donc $f(x) = D \int_{-a}^x dz e^{\alpha z^2} + C$. Donc, la solution générale pour ϕ_2 est

$$\phi_2(x) = Ce^{-\alpha x^2/2} + DF(x) \quad , \quad F(x) = e^{-\alpha x^2/2} \int_{-a}^x dz e^{\alpha z^2} . \quad (10)$$

Notons que D/C est homogène à $1/a$. Notons également que $F(-a) = 0$ et $F'(-a) = De^{\alpha a^2/2}$ et que $F(a)$ peut être calculé en fonction de a et $F'(a) = -\alpha a F(a) + De^{\alpha a^2/2}$.

On peut maintenant imposer la continuité de ϕ et de ϕ' en $x = -a$ ce qui donne:

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-\alpha a^2/2} \quad (11)$$

$$ik(Ae^{-ika} - Be^{ika}) = C\alpha a e^{-\alpha a^2/2} + De^{\alpha a^2/2} . \quad (12)$$

Continuité en $x = a$ donne

$$Fe^{ika} = Ce^{-\alpha a^2/2} + DF(a) \quad (13)$$

$$ikFe^{ika} = -C\alpha a e^{-\alpha a^2/2} + De^{\alpha a^2/2} - \alpha a DF(a) . \quad (14)$$

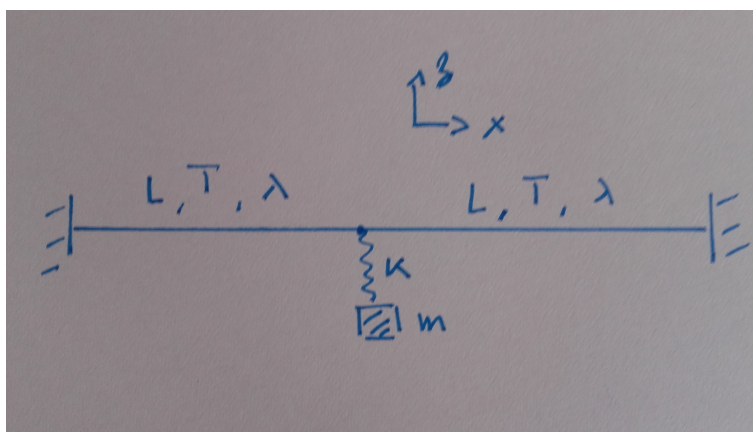
On a donc 4 équations pour 5 inconnues, et on peut exprimer B, C, D et F en fonction de A . Les coefficients de réflexion et transmission sont alors donnés par

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad , \quad T = \frac{|F|^2}{|A|^2} . \quad (15)$$

Exercice 37 : oscillateur sur corde vibrante

On considère une corde de longueur $2L$, de masse linéique λ et tendue avec une tension T entre deux parois solides. Au milieu de cette corde est attaché un ressort de raideur K et au bout de ce ressort est fixée une masse m qui peut se mouvoir selon une direction orthogonale à la direction de la corde au repos (voir schéma). Il n'y a pas de gravité.

A quelles fréquences le système peut-il osciller en régime stationnaire ?



Eléments de solution

On note $z(x)$ la position de la corde et on prend l'origine des x au milieu si bien que $z(-L) = z(L) = 0$ par fixation aux parois. On note Z la coordonnée de la masse par rapport à la position à vide (dans la configuration où la corde aussi est au repos). Je note z_0 la position du point central de la corde, là où le ressort est attaché. L'équation du mouvement de Z est

$$\ddot{Z} + \frac{K}{m}(Z - z_0) = 0. \quad (1)$$

On note la fréquence propre du système ressort et masse $\omega_0^2 = K/m$. En régime oscillatoire stationnaire de fréquence ω on va avoir (bien sûr on peut détailler ou alors se souvenir du cours de sup d'électrocinétique et aller vite)

$$Z = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} z_0 \quad (z_0 - Z) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} z_0. \quad (2)$$

En régime stationnaire on doit avoir des ondes stationnaires dans la corde. La vitesse des ondes est $c = \sqrt{T/\mu}$ et un mode d'onde est relié à la fréquence par $k = \omega/c$. Une onde stationnaire à gauche est (avec la condition $z(-L) = 0$)

$$z_{\text{gauche}}(x, t) = A \sin(k(L + x))e^{i\omega t} \quad (3)$$

et le symétrique à droite est

$$z_{\text{droite}}(x, t) = B \sin(k(L - x))e^{i\omega t}. \quad (4)$$

On a $A = B$ car ces fonctions doivent être égales en $x = 0$ (sauf si $kL = n\pi$, cas envisagé brièvement à part ci-après).

On fait une petite pause pour vérifier ce qui se passe quand on n'accroche pas un ressort. Dans ce cas, la corde doit être continue et les dérivées doivent être égales. Comme en $x = 0$ elles valent

$$\partial_x z_{\text{gauche}}(x = 0, t) = Ak \cos(kL)e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\partial_x z_{\text{droite}}(x = 0, t) = -Bk \cos(kL)e^{i\omega t} \quad (6)$$

on en déduirait sans ressort ni masse que $kL = \pi/2 + n\pi$ car $A = B$ (sauf le cas où on avait pris $kL = n\pi$ plus haut et alors on a besoin de $A = -B$). On voit que $kL = n\pi$ est un peu spécial car on a un noeud au milieu donc on peut bien accrocher un ressort si on veut, la corde ne le fera pas bouger.

Mais on a un ressort. Donc au point d'attache, on va avoir une discontinuité de tangente en général résultant en une force nette due à la tension et qui est équilibrée par la tension du ressort (le point d'attache est sans masse). On suppose qu'on n'a pas $kL = n\pi$ et donc pas de noeud au point d'attache (ou plutôt on a déjà identifié que ce sont des oscillations possibles) et ainsi $A = B$ comme vu plus haut. Dans la corde, la force de la droite sur la gauche du fil étant $\simeq T\partial_x z$, le bilan sur le point d'attache donne

$$T[\partial_x z_{\text{droite}}(x = 0, t) - \partial_x z_{\text{gauche}}(x = 0, t)] = K(z_0 - Z). \quad (7)$$

soit

$$2kTA \cos(kL) = K \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) A \sin(kL) \quad (8)$$

et on peut simplifier par A . Cette condition ne dépend pas de l'amplitude. On utilise $k = \omega/c$ et on définit $\omega_c = c/L$. Cela se réécrit

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega/\omega_c) = \omega_0^2 \frac{\omega c m}{2T} \sin(\omega/\omega_c) \quad (9)$$

ou encore

$$\omega_0^2 \frac{m}{2\mu L} \frac{\omega}{\omega_c} \tan(\omega/\omega_c) = (\omega_0^2 - \omega^2) . \quad (10)$$

On voit en traçant la gauche et la droite qu'il va y avoir plein de solutions possibles. Si $K = 0$ alors $\omega_0 = 0$ alors il faut $\omega = (\pi/2 + n\pi)\omega_c$ ou $kL = (\pi/2 + n\pi)$. On retrouve que les oscillations habituelles avec un ventre au milieu vont bien. Le cas qui est intéressant à discuter c'est quand $\omega_0 \ll \omega_c$ mais pas nul. Alors, on peut développer la tangente en regardant une solution proche de ω_0 . On trouve

$$\frac{m}{2\mu L} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (11)$$

et donc

$$\frac{1}{m\omega^2} = \frac{1}{m\omega_0^2} + \frac{1}{2\mu L} \frac{1}{\omega_c^2} . \quad (12)$$

On se souvient que deux ressorts en série, ont les inverses de leur raideurs qui s'ajoutent. Ici tout se passe comme si on avait ajouté l'inverse de la raideur du ressort $1/K = \frac{1}{m\omega_0^2}$ avec l'inverse de la raideur de la corde $\frac{1}{2\mu L} \frac{1}{\omega_c^2}$ se comportant comme un ressort car ne développant pas plein de noeuds. On note que $2\mu L$ est la masse de la corde. Bien sur comme on est dans l'hypothèse $\omega_0 \ll \omega_c$, on n'a qu'une faible modification et ω est proche de ω_0 . Le point d'attache du ressort n'étant pas stable on a une légère baisse de la fréquence de régime stationnaire. On voit aussi sur (2) que l'amplitude du point d'attache est beaucoup plus petite que l'amplitude de l'allongement du ressort dans ce cas.

On peut aussi questionner le cas $\omega_0 \gg \omega$. On a alors approximativement

$$\tan(\omega/\omega_c) = \frac{2\mu L \omega_c}{m} \frac{\omega}{\omega} \quad (13)$$

On va avoir plein de solutions qui vont tendre vers $\omega \rightarrow n\pi\omega_c$ ou $kL \rightarrow n\pi$ mais en approchant par le supérieur. On a quasiment un noeud au point d'attache. La masse est petite et elle

fait une petite cassure de pente au point d'attache mais rien de méchant, et la raideur du ressort va faire que l'allongement du ressort reste toujours très petit. On doit retrouver les oscillations stationnaires d'une corde avec une perle massive accrochée au milieu.

Exercice 38 : petits mouvements dans une 1/2-sphère en rotation

On considère une 1/2-sphère de rayon R qui tourne autour de son axe de révolution à une vitesse angulaire constante Ω . Une particule (*) de masse m se déplace sur la surface intérieure de la 1/2-sphère, sous l'influence de la gravité. De plus, la particule est soumise à une force de frottement: $-k\vec{v}_{rel}$ où \vec{v}_{rel} est la vitesse de m relativement à la 1/2-sphère.

On s'intéresse aux petits mouvements de la particule proche du bas de la 1/2-sphère. Pour cela, on introduit le référentiel galiléen cartésien (x, y, z) avec son origine en bas de la 1/2-sphère et l'axe (Oz) suivant l'axe de rotation. On se placera dans l'approximation $|x| \ll R$ et $|y| \ll R$.

A quelle(s) condition(s) ce mouvement est périodique? Discuter sa stabilité.

(*) Ici, particule = petite bille suffisamment petite pour négliger tout effet dû à sa taille.

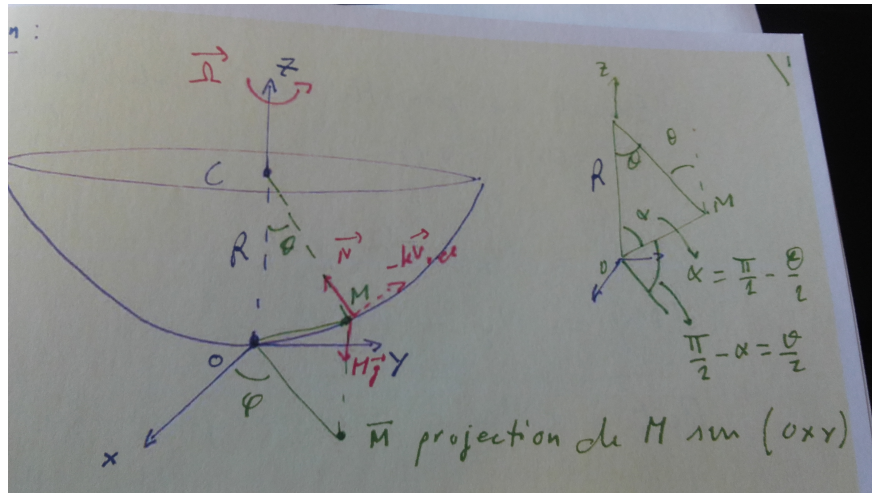
Eléments de solution

On comprend bien ce qui se passe. Si $k = 0$ (pas de frottement) alors, le fait que 1/2-sphère tourne ou pas n'a pas d'importance. Le mouvement de la particule est un mouvement de petites oscillations autour de O avec la pulsation $\omega^2 = g/R$. A un moment, il faudra retrouver ce résultat évident.

Maintenant, si $k \neq 0$, les équations du problème ne sont pas compliquées (avec $\vec{r} = O\vec{M}$):

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} - k\vec{v}_{rel}.$$

Et la vitesse de m est: $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$. Il n'y a pas besoin d'écrire les vecteurs en coordonnées sphériques (énoncé) car on s'intéresse uniquement à ce qui se passe proche de O . En



particulier: $N \simeq mg$, puis on projette l'équation du mouvement sur (x) et (y) :

$$m\ddot{x} = N_x - kv_{rel,x}.$$

$$m\ddot{y} = N_y - kv_{rel,y}.$$

En utilisant la figure, on obtient facilement: $N_x = -mgx/R$ et $N_y = -mgy/R$ puis $(v_{rel,x}, v_{rel,y})$ s'obtient facilement à partir de l'expression de la vitesse plus haut. Au final, on trouve:

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{R} - k\dot{x} - k\Omega y.$$

$$m\ddot{y} = -mg\frac{y}{R} - k\dot{y} + k\Omega x.$$

A partir de là, c'est pratiquement fini. On cherche à quelles conditions un mouvement périodique est possible, soit: $x = x_0 e^{i\omega t}$ et $y = y_0 e^{i\omega t}$. Ce qui va donner un système de 2 équations pour (x_0, y_0) qui admet une solution non nulle seulement si:

$$(-\omega^2 + g/R - ik\omega/m)^2 + (k\Omega/m)^2 = 0.$$

Soit: $-\omega^2 + g/R - ik\omega/m = \pm ik\Omega/m$. Ce qui n'est possible que si les 2 conditions: $\omega = \sqrt{g/R}$ et $\Omega = \pm\omega$ si $k \neq 0$. Et si $k = 0$, seulement $\omega = \sqrt{g/R}$ reste. Ce qui conclut.

Exercice 39 : Oscillations dans un bassin

Un bassin fait 25 m de long et 15 m de large. Le fond du bassin est horizontal. La profondeur de l'eau au repos est de 2 m. Déterminer les fréquences des petites oscillations de la surface de l'eau.

Eléments de solution

Dans un premier temps il faut montrer qu'on peut travailler avec un potentiel qui satisfait l'équation de Laplace avec des conditions aux bords du bassin (conditions de Neumann), puis trouver les solutions. Ensuite il faudra exploiter Euler pour obtenir une condition de bord à la surface libre, ce qui donnera la relation de dispersion. On guidera ou ne guidera pas le candidat ...

On appellera a , b et H la longueur, largeur et hauteur au repos et le fond du bassin sera à $z = 0$. L'eau sera considérée comme incompressible et donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ et en particulier ρ est constant. De plus, pour de petites oscillations le champ des vitesses est de rotationnel nul, $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$, comme on montre facilement: Pour de petites oscillations on a Euler linéarisé

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) . \quad (1)$$

On conclut que $0 = \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})}{\partial t}$ et donc que $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ est une constante indépendante du temps qui doit être nulle pour des mouvements oscillatoires. $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$ implique que \vec{v} dérive d'un potentiel ϕ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ que ce potentiel satisfait l'équation de Laplace:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad , \quad \Delta \phi = 0 . \quad (2)$$

Les conditions aux bords d'absence de vitesse normale deviennent

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=b} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 . \quad (3)$$

L'équation de Laplace (2), ces conditions de bord (3), et le fait qu'on cherche des oscillations suggèrent de chercher des solutions à variables cartésiennes séparées de la forme

$$\phi(x, y, z, t) = f(x)g(y)h(z)e^{-i\omega t} . \quad (4)$$

On pourra aussi bien travailler directement avec la partie réelle $\cos \omega t$. Une fois les solutions obtenues, on pourra les superposer. L'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ donne

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''}{f} = -\alpha^2 \quad , \quad \frac{g''}{g} = -\beta^2 \quad , \quad \frac{h''}{h} = \alpha^2 + \beta^2 \equiv \gamma^2 . \quad (5)$$

Le choix des signes des constantes $-\alpha^2$ et $-\beta^2$ est le seul qui permet de satisfaire les deux conditions de bord pour f et les deux pour g . On obtient

$$f(x) = A \cos \frac{n\pi}{a} x \quad , \quad g(y) = B \cos \frac{m\pi}{b} y \quad , \quad h(z) = C \cosh \gamma_{nm} z \quad , \quad \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad , \quad (6)$$

avec n et m des entiers positifs ou nuls. Evidemment, l'équation de Laplace ne nous apprend rien sur les fréquences ω .

Jusqu'ici on n'a pas tenu compte de la forme des forces de gravité; seule l'incompressibilité et l'approximation linéaires ont été utilisées. Il reste encore à exprimer la condition qu'à la surface libre on a $p = p_0$. Evidemment, cette dernière condition sera cruciale et devra faire intervenir la gravité g , absente des équations (2) et (3). Considérons un élément de fluide à la surface dont l'équation est $z = s(x, y, t)$. L'équation d'Euler linéarisée (1) donne avec $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 . \quad (7)$$

On conclut que $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = \psi(t)$ est indépendant des coordonnées. On peut toujours changer ϕ par une fonction de t uniquement sans changer \vec{v} et en remplaçant $\phi \rightarrow \phi' = \phi - \int^t \psi$ on arrive à

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad , \quad (8)$$

(où on écrit de nouveau ϕ au lieu de ϕ'). Pour un élément de fluide à la surface cela devient

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x, y, s(x, y, t), t) + \frac{p_0}{\rho} + gs(x, y, t) = 0 \quad , \quad (9)$$

En prenant une dérivée par rapport au temps on a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial z} \frac{\partial s}{\partial t} + 0 + g \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad , \quad (10)$$

toujours pris en $z = s(x, y, t)$. Mais $\frac{\partial s}{\partial t} = v_z|_{z=s} = \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=s}$ et l'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad , \quad \text{en } z = s(x, y, t) . \quad (11)$$

Le deuxième terme est $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} v_z$ et, dans l'approximation des petites oscillations, doit être négligé devant les deux autres termes, en accord avec l'utilisation de l'équation d'Euler sans le terme $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$. De plus, on peut évaluer (11) en $z = H$ au lieu de $z = s(x, y, t)$, car pour les petites oscillations $s - H$ est petit. (On peut avoir l'impression que remplacer s par H revient à supprimer l'existence même des oscillations, mais ce n'est évidemment pas le cas, car la non-nullité du terme $\frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z$ en $z = H$ est le signe d'une surface non plane. Plus mathématiquement, on a $\phi(x, y, s) - \phi(x, y, H) \simeq \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, H) (s - H)$ et $s - H \simeq \int^t dt v_z \simeq \frac{v_z}{\omega}$, soit $\phi(x, y, s) - \phi(x, y, H) \simeq \frac{v_z^2}{\omega}$. Donc, à des termes d'ordre v^2 près on pourra remplacer $\phi(x, y, s)$ par $\phi(x, y, H)$.) Finalement, la condition (11) implique pour la solution (4) et (6):

$$\left[-\omega^2 \cosh(\gamma_{nm} z) + g \gamma_{nm} \sinh(\gamma_{nm} z) \right]_{z=H} = 0 , \quad (12)$$

soit la relation de dispersion

$$\omega^2 \equiv \omega_{nm}^2 = g \gamma_{nm} \tanh(\gamma_{nm} H) . \quad (13)$$

Exercice 40 : passoire tournante

On considère une passoire qui tourne autour de son axe vertical de symétrie. On modélise cette passoire par un cylindre de rayon R , et dans le disque de base du cylindre sont disposés un très grand nombre N de trous. Chaque trou est de forme cylindrique, de rayon a et de hauteur $h \gg a$, tous deux très petits devant R . On veut savoir en combien de temps la passoire (qui est initialement remplie d'eau) va se vider.

1) *En régime stationnaire, et en négligeant les pertes par les trous de la passoire, quel est le profil du fluide et sa distribution de pression ?*

2) *Quel est le débit dans chaque trou en fonction de la pression au fond de la passoire?*

3) Etablir les équations décrivant la passoire qui se vide. Discuter leur domaine de validité.

Eléments de solution

Il est crucial de voir que l'on a un écoulement de Poiseuille dans les trous de la passoire (donc il ne s'agit pas d'une passoire de cuisine...).

1) L'équilibre hydrostatique donne

$$\vec{\text{grad}}P = -\rho g \vec{e}_z + \frac{1}{2} \Omega^2 \vec{e}_r. \quad (1)$$

Et donc avec P_0 la pression de l'atmosphère le profil de pression est

$$P = P_0 - \rho g(z - H) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2. \quad (2)$$

où H est la hauteur du point le plus bas de la surface libre. La surface libre est une équipotentielle et donc

$$z = H + \frac{1}{2g} \Omega^2 r^2. \quad (3)$$

Au passage, on calcule que le volume d'eau est

$$V = \int 2\pi r dr dz = \int 2\pi z(r) r dr = \pi R^2 \left(z_{\min} + \frac{R^2 \Omega^2}{4g} \right) \quad (4)$$

2) L'écoulement de Poiseuille est classique et correspond à un régime de Stokes $\vec{\text{grad}}P = \mu \Delta \vec{v}$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_r). \quad (5)$$

Après intégration et conditions aux limites

$$v_r = \frac{r^2 - a^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (6)$$

et le débit par section est alors

$$D = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (7)$$

Le signe moins parce que le fluide coule vers la direction de perte de charge (pression décroissante).

Dans le cas présent la pression à l'entrée des trous est

$$P_{\text{trous}} = P_0 + \rho g H + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2, \quad (8)$$

donc le gradient est

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{h} \left(\rho g z_{\min} + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 \right). \quad (9)$$

3) Le nombre de trous par unité de surface est $N/(\pi R^2)$. On fait une description continue des trous et on intègre pour avoir la débit total. On obtient

$$D_{\text{tot}} = \frac{N}{\pi R^2} \int 2\pi r dr D. \quad (10)$$

On trouve en prenant que D dépend de r puisque selon la position du trou, le gradient de pression ne sera pas le même,

$$D_{\text{tot}} = \pi R^2 \left(\frac{H}{\tau} + U \right) \quad (11)$$

avec le temps caractéristique τ et la vitesse U

$$\frac{1}{\tau} = \frac{N a^4 \rho g}{8 \mu h R^2} \quad U = \frac{a^4 N \Omega^2 \rho}{32 \mu h}. \quad (12)$$

Or le débit correspond à une baisse du volume donc

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial H} \dot{H} = \pi R^2 \dot{H} = -D_{\text{tot}}. \quad (13)$$

Donc on a

$$\dot{H} = -H/\tau - U \quad (14)$$

dont la solution est

$$H = H_i \exp(-t/\tau) + U\tau [\exp(-t/\tau) - 1]. \quad (15)$$

On a $H = 0$ quand

$$t = \tau \ln \left(\frac{H_i + U\tau}{U\tau} \right). \quad (16)$$

En effet grâce au terme de forçage de rotation on n'a pas une simple décroissance exponentielle car cela pousse toujours même quand $H \rightarrow 0$. On peut aussi discuter la validité de la

modélisation. En effet il faut que le temps d'établissement du régime permanent pour le profil soit bien plus court que le temps τ pour que la description hydrostatique reste valable. Il faut que les trous de passoire soient assez longs pour que Poiseuille (valable pour un cylindre infini) soit une bonne description.

4) Question subsidiaire : que se passe-t-il quand $H = 0$? En effet il reste du fluide sur les bords à cause du profil parabolique...

Exercice 41 : raidissement d'une vague

On considère une vague qui se propage à la surface d'un fluide parfait et incompressible. On admet que les variations de hauteur de fluide (c'est-à-dire le mouvement de la vague) peuvent être décrites par l'équation:

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t} + [A + B\delta h] \frac{\partial \delta h}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Avec A et B des constantes positives. C'est une équation de propagation avec une vitesse de propagation $U(\delta h) = A + B\delta h$ qui dépend de δh .

1) Montrer que: $\delta h(x, t) = F(x - U(\delta h)t)$ est solution de l'équation (1) avec $F(\cdot)$ une fonction suffisamment régulière.

2) On note G la fonction qui est l'inverse de F , soit: $G(\cdot) = F^{-1}(\cdot)$ et $x - U(\delta h)t = G(\delta h)$. Montrer que $G'(\delta h) = dG/d(\delta h)$ vérifie la même équation que δh (donc l'équation (1)). En déduire que la vague va se raidir à un moment donné.

Eléments de solution

La question 1) et le début de la question 2) sont simples. Il s'agit de reproduire des calculs qui sont dans le cours sur les ondes progressives, avec la petite variation qu'il faut faire attention car $U(\delta h)$ se dérive aussi. La fin de la question 2) demande d'avoir compris ce qu'est une dérivée en suivant le mouvement (dérivée particulière), ce qui demande de réfléchir un peu.

1) le résultat est immédiat.

2) On cherche à montrer dans un premier temps que:

$$\frac{\partial G'}{\partial t} + [A + B\delta h] \frac{\partial G'}{\partial x} = 0.$$

On doit donc calculer par exemple: $\frac{\partial G'}{\partial t}$. Mais $G'(\cdot)$ est une fonction de δh , donc:

$$\frac{\partial G'}{\partial t} = \frac{\partial G'}{\partial \delta h} \frac{\partial \delta h}{\partial t}.$$

Même principe pour $\frac{\partial G'}{\partial x}$, ce qui donne le résultat. Notons que c'est également vrai pour $G(\cdot)$ qui est aussi une fonction de δh mais pour G c'est évident car: $G(\delta h) = x - U(\delta h)t$. Ce que l'on a montré, c'est que la dérivée temporelle de G' en suivant le mouvement avec la vitesse $U(\delta h)$ est nulle, soit: $dG'/dt = 0$. Alors, si l'on suit le mouvement: $G'(\delta h)[t = T] = G'(\delta h)[t = 0]$. Il faut voir ce que cela signifie. Jusqu'ici, on a suivi l'énoncé avec des questions sur les ondes progressives. Ici, l'énoncé indique qu'il faut utiliser l'invariance de G' en suivant le mouvement (relation ci-dessus). La meilleure stratégie est donc de voir ce que cela donne. On a : $G(\delta h) = x - U(\delta h)t$. Donc, en particulier:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1 - B \frac{\partial \delta h}{\partial x} t = G'(\delta h) \frac{\partial \delta h}{\partial x}.$$

Donc:

$$G'(\delta h) = \frac{1 - B \frac{\partial \delta h}{\partial x} t}{\frac{\partial \delta h}{\partial x}} = \frac{1}{\frac{\partial \delta h}{\partial x}} - Bt.$$

L'invariance de G' dans le temps en suivant le mouvement donne:

$$\frac{1}{\frac{\partial \delta h}{\partial x} |_{t=0}} = \frac{1}{\frac{\partial \delta h}{\partial x} |_{t=T}} - BT.$$

Alors, pour une certaine valeur de x à l'instant initial (pour lequel $\frac{\partial \delta h}{\partial x} |_{t=0} < 0$), on peut trouver un temps T tel que:

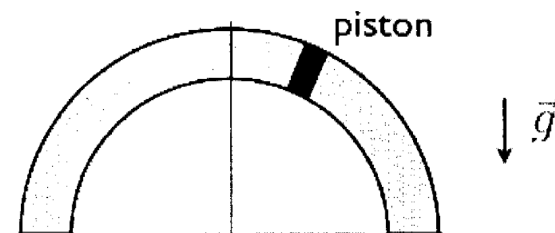
$$\frac{1}{\frac{\partial \delta h}{\partial x} |_{t=0}} = -BT.$$

Et donc, à cette même position dans la vague, en ayant suivi son mouvement, on obtient:

$\frac{1}{\frac{\partial \delta h}{\partial x} |_{t=T}} = 0$, soit $\frac{\partial \delta h}{\partial x} |_{t=T} = \infty$, la vague se raidit, ce qui conclut.

Exercice 42 : oscillations d'un piston dans un tube hemi-circulaire

On considère un tube de section circulaire s , coudé en demi cercle de rayon a ($a \gg \sqrt{s}$), rempli d'un gaz parfait. Le tube est fermé aux deux extrémités. Un piston de masse m et d'épaisseur négligeable devant a peut coulisser sans frottement à l'intérieur du tube. La température du gaz est maintenue constante à T . De chaque côté du piston on a la même quantité n de gaz.



1) En fonction des différentes données, déterminer la ou les positions d'équilibre du piston. En particulier, on identifiera un régime de basse température et un régime de haute température et on étudiera plus en détail la transition entre les deux régimes.

2) Déterminer la fréquence des petites oscillations autour de ces positions d'équilibre. Discuter la validité de l'hypothèse d'une température constante. Par quoi peut elle être remplacée et comment cela changerait les fréquences d'oscillation?

Eléments de solution

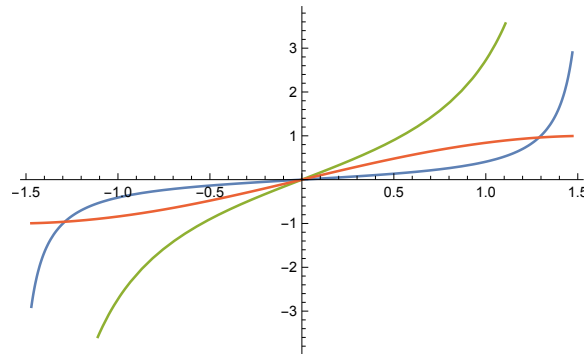
On repère la position du piston par l'angle ϕ compté depuis le haut du tube ($\phi = 0$ est le point symétrique). Les pressions de chaque côté du piston sont alors $p_g = \frac{nRT}{V_g} = \frac{nRT}{as(\frac{\pi}{2} + \phi)}$ et $p_d = \frac{nRT}{V_d} = \frac{nRT}{as(\frac{\pi}{2} - \phi)}$. Le PFD du piston s'écrit alors

$$m a \ddot{\phi} = m g \sin \phi + \frac{n R T}{a} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \phi} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \phi} \right). \quad (1)$$

1) Les positions d'équilibre sont données par $\ddot{\phi} = 0$, soit

$$\sin \phi = C \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \phi} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \phi} \right) \equiv f(\phi) \quad , \quad C = \frac{nRT}{mga} \quad (2)$$

On peut essayer une résolution graphique. La courbe orange est $\sin \phi$, la verte est $f(\phi)$ pour $C = 2$ et la bleue est $f(\phi)$ pour $C = 0.3$.



On voit que pour C grand (haute température) il n'y a qu'une solution $\phi = \phi_0 = 0$, mais que pour C petit (basse température) on a deux solutions $\phi = \pm\phi_1$ avec $f_1 \neq 0$. Plus précisément, tant que $C > C_*$ il n'y aura que la solution $\phi_0 = 0$, mais pour $C < C_*$ on aura en plus les deux solutions $\pm\phi_1$ avec f_1 qui augmente au fur et à mesure que $C_* - C$ diminue. La transition de une à trois solutions a lieu lorsque la dérivée en $\phi = 0$ de $f(\phi)$ est égale à la dérivée de $\sin \phi$, c'est à dire égal à 1. On a

$$f'(0) = \frac{8C}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad C_* = \frac{\pi^2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad T_* = \frac{\pi^2 m g a}{8 n R} . \quad (3)$$

Physiquement, dans la phase haute température $T > T_*$, les pressions sont plus importantes que le poids et le piston est maintenu en haut. Dans la phase basse température $T < T_*$, le poids l'emporte et le piston se stabilisera à droite ou à gauche quand le gaz sera suffisamment comprimé pour que la pression égale de nouveau le poids. C'est donc ϕ_0 qui devient instable et les solutions $\pm\phi_1$ stables.

Clairement, pour $C \rightarrow 0$ on a $\phi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Pour C légèrement inférieure à C_* on est dans la région de la "transition de phase" où ϕ_1 est petit et on peut développer $f(\phi)$ autour de $\phi = 0$. Comme $\sin \phi$, cette fonction est impaire et il faut pousser le DL jusqu'à l'ordre

3: $f(\phi) = C(\frac{8}{\pi^2}\phi + \frac{32}{\pi^4}\phi^3) + \mathcal{O}(\phi^5) = \frac{C}{C_*}\phi + \frac{C}{2C_*^2}\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^5)$. L'équation (2) s'écrit alors ($\sin \phi = \phi - \frac{\phi^3}{6} + \mathcal{O}(\phi^5)$)

$$\phi \left[(C_* - C) - \left(\frac{C_*}{6} + \frac{C}{2C_*} \right) \phi^2 \right] + \mathcal{O}(\phi^5) = 0 . \quad (4)$$

On voit de nouveau que pour $C > C_*$, seul $\phi = 0$ est solution, alors que pour $C < C_*$ on a 3 solutions. Dans ce dernier cas, les solutions stables seront données par

$$\pm\phi_1 = \pm\sqrt{\frac{6C_*(C_* - C)}{C_*^2 + 3C}} \simeq \pm\sqrt{\frac{3}{2C_*}} (C_* - C)^{1/2} \simeq \pm\sqrt{\frac{3}{2T_*}} (T_* - T)^{1/2} . \quad (5)$$

(Remarque : On retrouve l'exposant critique 1/2 caractéristique d'une transition de phase avec brisure spontanée d'une symétrie \mathbf{Z}_2 .)

2) Le PDF (1) peut être réécrit comme

$$\frac{a}{g}\ddot{\phi} = \sin \phi - f(\phi) . \quad (6)$$

Dans la phase de haute température il convient de développer autour de la solution stable $\phi = \phi_0 = 0$ et on trouve

$$\frac{a}{g}\ddot{\phi} = \phi - \frac{C}{C_*}\phi = \frac{C_* - C}{C_*}\phi = \frac{T_* - T}{T_*}\phi \Rightarrow \ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 , \quad \omega^2 = \frac{g}{a}\frac{T - T_*}{T_*} . \quad (7)$$

Pour $T \rightarrow T_*$ on a $\omega^2 \rightarrow 0$ et lorsqu'on passe dans la phase basse température on aurait $\omega^2 < 0$ ce qui est le signe que $\phi = 0$ est devenu instable.

Dans la phase de basse température il faut développer autour de ϕ_1 (ou $-\phi_1$). Soit $\phi = \phi_1 + d\phi$ et rappelons que $\sin \phi_1 - f(\phi_1) = 0$. On trouve alors ($\cos d\phi \simeq 1$ et $\sin d\phi \simeq d\phi$)

$$\frac{a}{g}d\ddot{\phi} = [\cos \phi_1 - f'(\phi_1)] d\phi \Rightarrow d\ddot{\phi} + \omega^2 d\phi = 0 , \quad \omega^2 = \frac{g}{a}[\cos \phi_1 - f'(\phi_1)] . \quad (8)$$

Pour T proche de T_* , mais toujours inférieur à T_* , on sait que ϕ_1 est petit (cf eq (5)) et on peut approximer

$$\omega^2 \simeq \frac{g}{a}(1 - f'(0)) = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{C}{C_*}\right) = \frac{g}{a}\frac{T_* - T}{T_*} . \quad (9)$$

Proche de la température critique T_* la fréquence des oscillations est donc faible et l'hypothèse d'une température maintenue constante est réaliste. Par contre lorsque la fréquence est plus

élevée (amplitude fois fréquence n'est plus petit devant la vitesse du son dans le gaz) une hypothèse adiabatique paraît plus raisonnable et il faudrait alors remplacer $pV = nRT$ par $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$. Le PFD deviendrait alors

$$ma\ddot{\phi} = mg \sin \phi + p_0s \left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2} + \phi)^\gamma} - \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - \phi)^\gamma} \right). \quad (10)$$

ou

$$\frac{a}{g} \ddot{\phi} = \sin \phi - \tilde{f}(\phi) \quad , \quad \tilde{f}(\phi) = \frac{p_0s}{mg} \left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2} - \phi)^\gamma} - \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + \phi)^\gamma} \right). \quad (11)$$

Le reste de l'analyse est similaire avec \tilde{f} à la place de f .

Exercice 43 : GP

1) Soit une particule de masse m soumise à une force \vec{F} . On suppose que la vitesse de la particule est toujours finie. Montrer que la valeur moyenne dans le temps de $\vec{F} \cdot \vec{r}$ est égale à la valeur moyenne dans le temps de $-2E_c$, où E_c est l'énergie cinétique de la particule.

2) Généraliser à un ensemble de particule $\{i\}$ soumises à une force extérieure agissant sur chaque particule (\vec{F}_i^{ext}) et des forces intérieures: particule $\{j\}$ agissant sur $\{i\}$ ($\vec{F}_{ij}^{\text{int}}$).

3) En déduire l'équation d'état d'un gaz parfait, composé de N molécules (sans interaction mutuelle) et à la température T , dans un récipient (fermé) de volume V . On rappelle que pour ce système, on peut écrire $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2}Nk_B T$ (théorème d'équipartition de l'énergie).

Eléments de solution

1) La particule de masse m est soumise à la force $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. On calcule alors facilement:

$$\langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle = \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{r} dt .$$

Après une intégration par parties, en supposant la vitesse finie et la trajectoire toujours bornée, on obtient le résultat demandé: $\langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle = -2 \langle E_c \rangle$

2) On reprend le résultat de la question 1) que l'on exprime comme indiqué dans l'énoncé:

$$\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{r}_i \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{int} \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

Le dernier terme peut être écrit un peu différemment en appariant les termes $\vec{F}_{ij}^{int} \cdot \vec{r}_i$ et $\vec{F}_{ji}^{int} \cdot \vec{r}_j$ (et en utilisant la 3^e loi de Newton: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$). On trouve alors (avec $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$):

$$\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{r}_i \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{int} \cdot \vec{r}_{ij} \right\rangle .$$

3) En l'absence d'interaction mutuelle, cela devient très simple:

$$\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{r}_i \right\rangle .$$

Pour le terme de gauche, on utilise l'indication de l'énoncé: $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} Nk_B T$. Pour le terme de droite, il est clair que les forces extérieures sur les molécules de gaz ne peuvent provenir que des parois du récipient. Donc, le terme à exprimer est uniquement un terme de pression qui est produit par les chocs des molécules sur les parois. Alors, la somme sur i peut être convertie en une intégrale sur la surface du récipient. Après calculs on trouve que la relation ci-dessus conduit à la loi des gaz parfait, comme attendu.

Exercice 44 : jet sur un coin

On considère un jet d'eau bidimensionnel impactant un coin d'angle intérieur 2α . On note L sa dimension transverse. Loin en amont, la vitesse du jet est U_0 et son épaisseur h_0 , symétrique par rapport au coin. On considère que l'écoulement est stationnaire, que le fluide est incompressible et de masse volumique ρ . On négligera les effets de la gravité.

1) *En supposant le fluide parfait, déterminer la force exercée par le jet sur le coin.*

2) On ne suppose plus le fluide parfait. Ceci étant, on suppose que les effets de viscosité sont non-négligeables uniquement dans une couche (limite) d'épaisseur $\delta(x) \ll h_0$ au niveau des

bords du coin (x repérant la progression le long d'un bord dans la direction du fluide). Donc, au-delà de l'épaisseur $\delta(x)$, le fluide est considéré comme parfait.

En déduire la force du jet sur le coin jusqu'à une extension du coin $x = a$, le long de chaque bord du coin. Cette expression fait intervenir en particulier $\delta(a)$.

Indication: le cours indique l'expression de l'épaisseur d'une couche limite sur une dimension caractéristique L : $\delta = L/\sqrt{Re}$, ce qui se traduit ici par: $\delta(x) = \sqrt{\frac{\eta x}{\rho U}}$.

Eléments de solution

Question 1: cours. Question 2: variation par rapport au cours. La notion de couche limite est dans le cours, en particulier la formule rappelée dans l'énoncé. Simplement, on en fait ici une utilisation qui n'est pas directement dans le cours.

1) Le fluide est incompressible, on a donc conservation du débit volumique. On prend une section transverse (h_0L) de fluide en amont et les deux sections transverses à une position x sur chaque bord: hL (le jet reste symétrique de part et d'autre du coin):

$$U_0 h_0 L = 2U h L.$$

De plus, en utilisant le théorème de Bernoulli le long de la surface libre: $U = U_0$, donc $h = h_0/2$.

Ensuite, pour calculer la force extérieure exercée sur le fluide, on peut considérer un volume donné de fluide qui se déplace en fonction du temps. Voir cours (systèmes ouverts). On considère le volume entre une section h_0L en amont et deux sections hL à une position x le long de chaque bord. La variation de quantité de mouvement pour tout le fluide dans ce volume est la force extérieure exercée sur le fluide contenu dans ce volume. Donc ici, la force exercée par le coin sur le fluide dans ce volume plus les forces de pression (qui s'exercent sur le volume de contrôle).

Les seules contributions non nulles sont celles qui viennent des sections transverses. On obtient

en projetant sur la direction du jet initial (\vec{e}_X):

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \rho \vec{v}(\cdot) dV \right] = -\rho U_0^2 h_0 L + \rho U^2 h L (2 \cos \alpha) = \rho U_0^2 h_0 L (\cos \alpha - 1) \vec{e}_X.$$

C'est la force de l'extérieur sur le fluide. Les forces de pression sur le fluide s'expriment comme: $-\int p d^2 \vec{S}$, où l'intégrale est prise sur la surface (fermée) qui délimite le volume de contrôle. Mais la pression est partout égale à p_0 , donc cette contribution est nulle. Finalement, la force du coin sur le fluide est:

$$\vec{F} = \rho U_0^2 h_0 L (1 - \cos \alpha) \vec{e}_X.$$

Elle est bien orientée suivant \vec{e}_X . De plus, elle est bien nulle pour $\alpha = 0$ et maximale pour $\alpha = \pi/2$.

2) On va d'abord écrire la conservation du débit volumique dans les nouvelles conditions d'un fluide non parfait. On suit le fluide le long d'un bord du coin, circulant le long de x . On prend l'axe (y) perpendiculaire à (x). En $y = 0$ la vitesse du fluide est donc nulle (condition à la limite pour un fluide visqueux), puis cette vitesse augmente de $y = 0$ à $y = \delta(x)$. Au-delà de $\delta(x)$ le fluide est à nouveau parfait et sa vitesse est U_0 (question 1)). Donc, la vitesse dans le fluide visqueux peut s'écrire au 1er ordre:

$$v_x(y) = U_0 \frac{y}{\delta(x)}.$$

La conservation du débit volumique s'écrit donc (pour un bord):

$$Q_1 = L \int_0^{\delta(x)} v_x(y) dy + \int_{\delta(x)}^{h(x)} U_0 dy = L \frac{h_0}{2} U_0.$$

Attention: $h(x)$ est égal à $h_0/2$ uniquement pour $x = 0$. Ensuite, $h(\cdot)$ doit être une fonction de x pour que la conservation du débit volumique soit possible. On obtient:

$$h(x) = \frac{1}{2}(h_0 + \delta(x)).$$

On reprend le même raisonnement qu'en 1) pour déterminer la force du coin (jusqu'à la position x) sur le fluide:

$$F = \rho U_0^2 h_0 - 2 \cos \alpha \int_0^{h(x)} v_x^2(y) dy.$$

Il reste à calculer: $\int_0^{h(x)} v_x^2(y) dy$, en utilisant la méthode ci-dessus. On obtient:

$$\int_0^{h(x)} v_x^2(y) dy = \frac{1}{2} U_0^2 h_0 \left(1 - \frac{1}{3} \delta(x)\right).$$

Donc la force du coin (jusqu'à la position a sur chaque bord) sur le fluide devient:

$$F = \rho U_0^2 h_0 \left[1 - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos \alpha \frac{\delta(a)}{h_0}\right].$$

Ce qui conclut.

Exercice 45 : jet sur un plan incliné

Un jet d'eau est envoyé à vitesse constante U suivant l'axe horizontal (x) sur une plaque inclinée faisant un angle α avec la verticale (y). L'eau est un considéré comme un fluide parfait incompressible et le jet d'eau a une hauteur h (suivant (y)) et une largeur L suivant (z) ($L \gg h$). On suppose de plus que le régime permanent est établi et on négligera l'effet de la gavité.

Déterminer la force totale qui s'exerce sur la plaque.

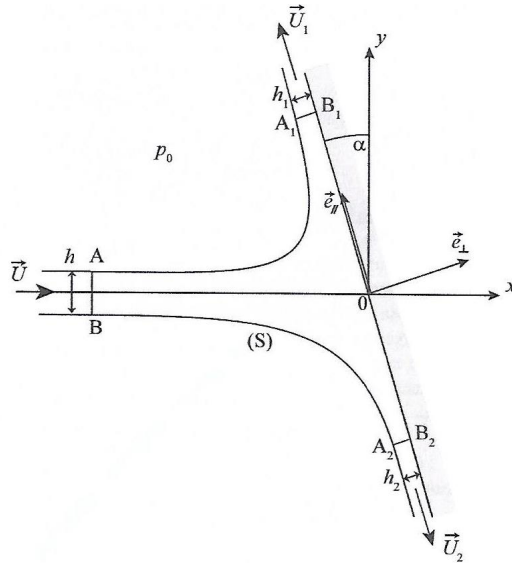
Etablir ensuite qualitativement le champ de pression le long de la plaque.

La figure ci-dessous donne des indications pour la résolution:

Eléments de solution

C'est un exercice proche d'un exercice de cours ($\alpha = 0$, jet perpendiculaire à une plaque).

On cherche dans un premier temps la force du jet sur la plaque. Mais ce que l'on donne dans l'énoncé, c'est le mouvement du fluide (jet d'eau). Cela veut dire que l'on peut calculer la variation de quantité de mouvement d'un volume (dit de contrôle) du fluide. Une fois que l'on trouve cette variation, on peut en déduire la force de l'extérieur (en particulier la plaque) sur le fluide. Alors, on peut trouver la force du fluide sur la plaque, puis la force totale sur la plaque. Il faut donc correctement définir le volume (dit de contrôle). Comme un problème



proche est fait en cours (dans le cas d'une plaque perpendiculaire), cela ne doit pas poser trop de difficultés.

On considère le volume défini par une section (h, L) de fluide de vitesse U bien en amont du point d'impact puis une section (h_1, L) dans la partie haute de la plaque assez loin du point d'impact pour que la vitesse de l'écoulement U_1 puisse être considérée comme uniforme à cet endroit et enfin, une section (h_2, L) dans la partie basse de la plaque assez loin du point d'impact pour que la vitesse de l'écoulement U_2 puisse aussi être considérée comme uniforme à cet endroit. Voir figure: volume $AB - BA_2 - A_2B_2 - B_2B_1 - B_1A_1 - A_1A$.

La conservation du débit donne: $Uh = U_1h_1 + U_2h_2$ et le théorème de Bernoulli sur les lignes de courant AA_1 et BA_2 de la figure permet d'écrire que: $U = U_1$ et $U = U_2$. Donc: $h = h_1 + h_2$.

De plus, la variation de quantité de mouvement du volume de fluide considéré ci-dessus s'écrit, pendant l'intervalle de temps dt :

$$d\vec{p} = \rho(U_1 dt h_1 L) \vec{U}_1 + \rho(U_2 dt h_2 L) \vec{U}_2 - \rho(U dt h L) \vec{U}.$$

Alors, $d\vec{p}/dt$ est la force de la plaque sur le fluide et la force due à la pression extérieure p_0

sur le fluide (dans le volume considéré), soit:

$$\vec{F}_{pl \rightarrow fl} - \int_{S_0} p_0 d\vec{S},$$

où S_0 est la surface du volume de fluide en contact avec la pression atmosphérique. Sur la surface complète et fermée (S_V) du volume de fluide considéré ici:

$$\int_{S_V} p_0 d\vec{S} = \vec{0}.$$

Donc:

$$- \int_{S_0} p_0 d\vec{S} - L(B_1 B_2) p_0 \vec{e}_\perp = \vec{0}.$$

où $L(B_1 B_2)$ est la surface de la plaque en contact avec le volume de contrôle: S_{pl} . Finalement, la somme des forces extérieures sur le volume de fluide donne:

$$\vec{F}_{pl \rightarrow fl} + S_{pl} p_0 \vec{e}_\perp.$$

Et c'est cette expression qui est égale à la quantité $d\vec{p}/dt$ calculée plus haut pour le volume de fluide considéré. Donc:

$$\vec{F}_{pl \rightarrow fl} = [\rho(U_1 h_1 L) \vec{U}_1 + \rho(U_2 h_2 L) \vec{U}_2 - \rho(U h L) \vec{U}] - S_{pl} p_0 \vec{e}_\perp$$

Donc $\vec{F}_{fl \rightarrow pl}$ est l'opposé de cette expression. Mais pour la force qui s'exerce sur la plaque, il faut aussi prendre en compte l'air qui est de l'autre côté de la plaque qui produit une force: $-S_{pl} p_0 \vec{e}_\perp$. Donc, au final (avec les notations de la figure), on obtient la force qui s'exerce sur la plaque (due au jet d'eau et à l'air de l'autre côté de la plaque) :

$$\vec{F}_{\rightarrow pl} = \rho L (U^2 h) \vec{e}_x - U^2 (h_1 - h_2) \vec{e}_{//}.$$

De plus, on sait que la force est perpendiculaire à la plaque car le fluide est parfait. Avec $\vec{e}_x = \vec{e}_\perp \cos \alpha - \vec{e}_{//} \sin \alpha$, on trouve: $F_\perp = \rho L h U^2 \cos \alpha$. Note: cette force ne dépend pas de la surface de contact avec la plaque. C'est donc bien la force totale qui s'exerce sur la plaque.

Concernant la question sur le champ de pression le long de la plaque, il faut déjà remarquer que la pression n'est pas partout p_0 le long de la plaque, sinon, la force sur la plaque serait

nulle, en contradiction avec la première question. Ce que l'on sait c'est que loin vers le haut ou loin vers le bas, la pression est bien p_0 au niveau de la plaque. On sait aussi qu'il y a des lignes de courant qui partent vers le haut et d'autres vers le bas. Donc, il doit y avoir une ligne de courant qui s'arrête sur la plaque (un peu au-dessus du point O de la figure). A cet endroit la pression est maximale: $p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$. Donc, qualitativement, le champ de pression sur la plaque a un maximum $p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$ pour un point proche de O et tend vers p_0 quand on monte ou on descend sur la plaque.

Exercice 46 : ondes acoustiques sphériques

On modélise une source d'ondes acoustiques par une sphère dont le rayon peut varier. Le rayon de celle-ci au repos est r_0 et lorsque la source est active son rayon oscille et est donné par $r = r_0 + \epsilon \cos(\omega t)$.

1) On adopte une notation complexe. Montrer que $\delta P = \underline{\delta P} e^{i(\omega t - kr)}$ avec $\underline{\delta P} = P_0/r$ est solution de l'équation d'ondes acoustiques pour la pression. Justifier qu'il s'agit d'une onde sphérique.

2) Quelle est la forme du champ de vitesses ?

3) Quelle est l'intensité acoustique ? Quelle est la puissance totale transmise ?

4) Quelle est l'efficacité de cette source ?

Eléments de solution

1) Avec l'expression du Laplacien en sphérique sans dépendance angulaire $\Delta f(r) = 1/r^2 \partial_r (r^2 \partial_r f)$ on vérifie

$$\partial_{tt} \delta P - c^2 \Delta \delta P = 0 \quad (1)$$

si $\omega = kc$. On a bien la phase $i(\omega t - kr)$ pour la propagation selon la direction radiale et la décroissance en $1/r$ caractéristique des ondes sphériques.

2) Avec l'équation d'Euler linéarisée on a

$$\rho_0 \partial_t v_r = -\partial_r \delta P \quad (2)$$

et donc avec la notation complexe

$$v_r = \underline{v}_r e^{i(\omega t - kr)} \quad (3)$$

on trouve

$$\underline{v}_r = \frac{1}{\rho_0 c} \left(1 - \frac{i}{kr} \right) \delta P. \quad (4)$$

On voit qu'on a deux termes. Un qui correspond au champ proche et qui est négligeable quand $kr \gg 1$ et la solution en champ lointain qui va en $1/r$. Mais maintenant on veut mettre les conditions aux bords de la sphère. Le fluide au niveau de la sphère doit avoir la vitesse imposée par celle-ci et donc avec $r = r_0 + \epsilon e^{i\omega t}$ on a $v_r^{\text{sphère}} = i\omega \epsilon e^{i\omega t}$. On va toujours supposer que ϵ est très petit devant la longueur d'onde et donc considérer que cette vitesse est la vitesse du fluide en r_0 et donc on obtient de (4)

$$\underline{P}_0 = -\epsilon \omega r_0 c \rho_0 \frac{kr_0}{1 + ikr_0} \quad (5)$$

Ici on ne suppose pas $kr_0 \ll 1$ (et donc la source pas dans le champ proche) et on donne bien le cas général.

3) L'intensité acoustique est $1/2 \text{Re}(\delta P \underline{v}_r^*)$ donc

$$I = \frac{|\underline{P}_0|^2}{2\rho_0 c r^2} = \frac{\rho_0 c (\epsilon \omega r_0)^2}{2} \frac{\omega^2 r_0^2 / c^2}{1 + \omega^2 r_0^2 / c^2} \quad (6)$$

On a à toute distance une décroissance en $1/r^2$, et donc une puissance totale à travers une sphère de rayon r constante. En effet on n'a aucun phénomène dissipatif. La puissance totale est $4\pi r^2 I$.

4) Pour définir une efficacité, il faut avoir en tête la propagation pour une onde plane progressive. On a en effet que l'intensité acoustique est la densité d'énergie acoustique multipliée par la vitesse du son. On va donc d'abord calculer la densité d'énergie acoustique moyenne

$$u = \frac{1}{2} \langle \rho_0 |v_r|^2 + \frac{|\delta P|^2}{\rho_0 c^2} \rangle = \frac{1}{4} \rho |v_r|^2 + \frac{1}{4\rho c^2} |\delta P|^2 \quad (7)$$

$$= \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{\rho_0 (\epsilon \omega)^2}{2} \left(\frac{1 + 2(kr)^2}{2(kr)^2} \right) \left(\frac{(kr_0)^2}{1 + (kr_0)^2} \right) \quad (8)$$

Pour répondre à la question de l'efficacité on n'a jamais besoin de cette dernière expression générale (qui pourtant est instructive car on voit que pour $kr \ll 1$, la décroissance en r n'est pas juste en $1/r^2$). Pour évaluer l'efficacité on regarde juste la densité d'énergie acoustique au niveau de la sphère donc en r_0 .

Au niveau de la sphère on a alors (il faut pas spécialiser le calcul précédent mais plutôt le faire directement en r_0 ce qui est beaucoup plus court)

$$u|_{r=r_0} = \frac{\epsilon^2 \omega^2 \rho_0}{2} \left(\frac{1 + 2k^2 r_0^2}{2 + 2k^2 r_0^2} \right). \quad (9)$$

On définit l'efficacité comme

$$\alpha \equiv \frac{I}{uc} \quad (10)$$

évalué en r_0 . Si c'est unité c'est que tout se passe comme les ondes planes progressives. Sinon c'est pas le cas. On trouve

$$\alpha = \frac{2(kr_0)^2}{1 + 2(kr_0)^2}. \quad (11)$$

Si la longueur d'onde est très inférieure à la taille de la source ($kr_0 \gg 1$) on a une efficacité à un et c'est une bonne source. Dans le cas contraire on a une suppression de l'efficacité en $(r_0/\lambda)^2$. Pour des grandes longueurs d'ondes et donc basses fréquences, il faut des grosses enceintes sinon cela ne fonctionne pas bien.

Exercice 47 : force d'adhérence

On considère un disque en verre circulaire de rayon a posé à plat sur une plaque de verre avec entre les deux une mince couche d'eau, considérée comme un fluide Newtonien (donc incompressible) de masse volumique ρ , viscosité η et d'épaisseur h . On tire le disque vers le haut avec une force F , donc $h = h(t)$ et $dh/dt > 0$. On sait que c'est difficile en pratique et on va comprendre pourquoi ici. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec (z) orienté vers le haut et on admet que la force F provoque un écoulement dans la mince couche d'eau avec le champ des vitesses: $\vec{u} = u_r(r, z, t)\vec{e}_r + u_z(r, z, t)\vec{e}_z$. On suppose toujours $h(t) \ll a$. On suppose également que le nombre de Reynolds (horizontal) associé à cet écoulement est tel que: $\rho|u|a/\eta \ll a^2/h^2$ (dit écoulement rampant).

1) Justifier que dans les conditions du montage l'équation du mouvement radiale pour un petit élément de fluide se réduit à: $\frac{\partial P}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$.

Qu'en est-il pour l'équation du mouvement suivant z ?

2) Montrer que la pression dans la couche de fluide s'écrit:

$$P(r) - P(a) = \frac{6\eta \frac{dh}{dt}}{h^3} (r^2 - a^2).$$

En déduire la force F pour $a = 10 \text{ cm}$, $\frac{dh}{dt} = 0.02 \text{ mm/s}$ et $h(0) = 0.02 \text{ mm}$ ($\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$).

Formulaire: Pour $\vec{u} = u_r(r, z, t)\vec{e}_r + u_z(r, z, t)\vec{e}_z$, $\text{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Eléments de solution

C'est un exercice dans lequel on comprend qu'il faut négliger les termes instationnaire et convectif par rapport au terme de viscosité. Cela est fait dans le cours dans un cas plus simple qui utilise uniquement la comparaison du nombre de Reynolds avec l'unité. Ici, on part tout de suite avec une variation de ce qui est fait en classe, mais le principe est le même. De plus, on voit dans l'énoncé que le terme de viscosité ne comprend qu'une dérivée seconde suivant z , on comprend donc qu'il faut utiliser la condition $h \ll a$ pour ne conserver que les termes dominants. Il y a beaucoup d'exercices qui utilisent cette technique mais le candidat n'est pas tenu de les avoir faits. L'énoncé donne toutes les clefs dans la question 1) pour avancer. La question 2) utilise uniquement ce qui est fait en classe, en particulier pour les conditions aux limites.

1) Le début de l'exercice utilise ce qui est vu dans différents exercices utilisant les couches limites ou le nombre de Reynolds, ici que le mouvement radial de l'écoulement s'effectue sur une distance caractéristique a alors que le mouvement suivant z s'effectue sur h avec $h \ll a$. Ceci va permettre d'estimer les différents termes qui entrent dans les équations avec des dérivées suivant r ou z . Déjà, l'équation de continuité, ici $\text{div}(\vec{u}) = 0$ donne: $u_z/h \equiv u_r/a$ et donc, en ordre de grandeur $u_z \ll u_r$. Ensuite, on voit facilement que $\rho \partial u_r / \partial t$ et $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})u_r$ sont du même ordre de grandeur, soit: $\rho u_r^2/a \simeq \rho u^2/a$ mais $\rho u^2/a \ll \eta u/h^2$, ce qui correspond à la condition de l'énoncé: $\rho u a / \eta \ll a^2/h^2$. Les termes $\rho \partial u_r / \partial t$ et $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})u_r$

sont donc négligeables devant le terme de viscosité dans l'équation du mouvement radiale pour un petit élément de fluide. En effet, dans le terme de viscosité, le Laplacien est complètement dominé par $\partial^2/\partial z^2 \equiv 1/h^2$. On en déduit que l'équation du mouvement radiale se réduit à: $\frac{\partial P}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$. Pour l'équation du mouvement suivant z , le même type de raisonnement donne une équation très simple: $\partial P/\partial z = 0$, ce qui conclut.

2) Comme $P(\cdot)$ est indépendant de z , on peut intégrer l'équation du mouvement radiale pour obtenir $u_r(\cdot)$. On obtient:

$$u_r(r, z, t) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial r} (z^2 - zh(t)).$$

En $z = 0$ et $z = h(t)$, on a bien u_r qui est nulle. Ensuite, la seule équation qui reste à utiliser pour avancer, c'est l'équation de continuité. De plus, on voit dans le résultat donné dans l'énoncé qu'il y a un dh/dt , soit u_z en $z = h(t)$, or la seule manière pour faire apparaître un terme avec u_z , c'est d'utiliser l'équation de continuité. Il n'y a donc pas d'autre option possible:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Avec $u_r(r, z, t)$ trouvé plus haut. On doit donc injecter l'expression pour u_r dans l'équation de continuité mais il faut également intégrer cette équation sur z entre $z = 0$ et $z = h(t)$ pour faire apparaître un terme en $u_z(z = h(t)) = dh/dt$ (et $u_z(z = 0) = 0$). On écrit:

$$\int_0^{h(t)} dz \left(\frac{1}{2\eta} (z^2 - zh(t)) \frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial P}{\partial r})}{\partial r} \right) + \frac{dh}{dt} = 0.$$

Soit:

$$\frac{1}{2\eta} \left(-\frac{h(t)^3}{6} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial P}{\partial r})}{\partial r} \right) + \frac{dh}{dt} = 0.$$

Ce qui donne:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial P}{\partial r})}{\partial r} = \frac{12\eta \frac{dh}{dt}}{h(t)^3}$$

On peut alors intégrer 2 fois suivant r cette expression, en sachant qu'il n'y a pas de divergence pour $\frac{\partial P}{\partial r}$ en $r = 0$. On obtient facilement le résultat proposé dans l'énoncé:

$$P(r) - P(a) = \frac{3\eta \frac{dh}{dt}}{h^3} (r^2 - a^2).$$

Avec $P(a)$ la pression atmosphérique en dehors de la petite couche d'eau. On voit que $P(r) - P(a) < 0$, donc la couche d'eau tend à attirer le disque en verre, c'est pour cela qu'il faut tirer avec une force:

$$F = - \int_0^a (P(r) - P(a)) 2\pi r dr.$$

On trouve:

$$F = \frac{3\pi\eta \frac{dh}{dt}}{h^3} a^4.$$

On observe en particulier le terme en $1/h^3$, c'est pour cela qu'il est très difficile de décoller le disque. L'AN donne $F \simeq 2.3 \cdot 10^3$ N, soit l'équivalent d'une masse de 230 kg suspendue à une poulie. Il est également préférable de vérifier que la condition: $\rho|u|a/\eta \ll a^2/h^2$ est satisfaite. avec $|u|$ la vitesse horizontale qui s'obtient comme: $u_z h/a \simeq \frac{dh}{dt} h/a$ et on voit que la condition est bien vérifiée: $10^4 \ll 10^8/4$.

Exercice 48 : propagation d'une onde électromagnétique dans un gaz

Etudier la propagation d'une onde électromagnétique de fréquence ω dans de l'hélium à température ambiante et pression atmosphérique. On considérera que tous les électrons sont élastiquement liés avec une même force de rappel que l'on estimera.

Déterminer la fréquence caractéristique de cette liaison élastique. Déterminer la relation de dispersion de l'onde ainsi que l'indice de réfraction de l'hélium dans ce modèle. Comparer les résultats avec ceux pour la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma.

Eléments de solution

Ecrivons la force de rappel $F_{el} = m\omega_0^2 r$ où m est la masse de l'électron et r sa distance au noyau. Cela donne une énergie potentielle $\frac{m}{2}\omega_0^2 r_0^2$. L'énergie cinétique est du même ordre de grandeur (on pourra éventuellement le démontrer pour des mouvements classiques circulaires dans ce potentiel élastique; pour cela il suffit d'égaliser la force centrifuge et la force de rappel). Donc $m\omega_0^2 r_0^2 \simeq E_{liaison} \simeq 25\text{eV}$. (On a $Z = 2$ ce qui double l'énergie de liaison du premier électron par rapport à l'hydrogène.) Pour r_0 on prendra le rayon de Bohr $r_0 \simeq 5 \times 10^{-11}$ m,

et la masse de l'électron est donnée par $mc^2 \simeq 5 \times 10^5$ eV. Donc

$$mc^2 \left(\frac{\omega_0 r_0}{c} \right)^2 \simeq E_{\text{liaison}} \Rightarrow \left(\frac{\omega_0 r_0}{c} \right)^2 \simeq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow \omega_0 \simeq 0,7 \times 10^{-2} \frac{c}{r_0} \simeq 4 \times 10^{16} \text{ s}^{-1} \quad (1)$$

Il faudra comparer ce ω_0 à ω . Pour une onde em, une fréquence de ce ω_0 correspond à une longueur d'onde de $\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega_0} \simeq \frac{r_0}{0,7 \times 10^{-2}}$, soit $\lambda \simeq 10^3 r_0 \simeq 5 \times 10^{-8} \text{ m} = 50 \text{ nm}$. On est bien dans l'ultraviolet.

L'équation pour la position classique \vec{x}_e d'un électron est

$$m \ddot{\vec{x}}_e = -m\omega_0^2 \vec{x}_e + q\vec{E}(\vec{x}_e) + q\dot{\vec{x}}_e \wedge \vec{B}(\vec{x}_e). \quad (2)$$

Pour une onde em on a $|B| \simeq \frac{|E|}{c}$ et comme $|\dot{\vec{x}}_e| \simeq \omega_0 r_0 \simeq 10^{-2} c$ on a $|\dot{\vec{x}}_e \wedge \vec{B}| \simeq 10^{-2} |\vec{E}|$ et on pourra négliger le terme magnétique dans la force. Une autre difficulté vient de ce que l'onde plane $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ est à prendre à la position de l'électron $\vec{x} = \vec{x}_e$, ce qui fait de (2) une équation différentielle non-linéaire compliqué. Pour éviter cela, on se placera dans un régime de $\lambda \gg r_0$ de telle sorte que $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ peut être supposé constant sur l'échelle d'un atome. On remplacera alors \vec{x} par \vec{x}_n , la position du noyau. Cette condition implique $\omega \simeq ck \ll \frac{c}{r_0} \simeq 1,4 \times 10^2 \omega_0$. On ne regardera donc que des ondes em avec $\omega \ll 100 \omega_0$, disons $\omega \leq 10^{18} \text{ s}^{-1}$. L'équation (2) est alors simplement une équation pour un oscillateur forcé:

$$\vec{x}_e(t) = \vec{x}_e^{(0)} e^{-i\omega t} \quad , \quad \vec{x}_e^{(0)} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_n}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3)$$

Ce déplacement des électrons (il y en a 2 par atome et n atomes par unité de volume) génère un courant volumique associé

$$\vec{j} = 2nq\dot{\vec{x}}_e = -2i\omega nq \frac{q\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_n}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{-i\omega t} \Rightarrow \vec{j}(t, \vec{x}) = -\epsilon_0 i\omega \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}(t, \vec{x}) \quad , \quad \omega_p^2 = \frac{2nq^2}{\epsilon_0 m} \quad (4)$$

où on a défini la fréquence plasma par ω_p . Ce courant est à insérer dans l'équation de Maxwell

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5)$$

On obtient l'équation d'onde comme d'habitude en utilisant $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ avec $\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$ car à l'échelle des variations spatiales de \vec{E} on a un gaz globalement

neutre.

$$\Delta \vec{E} = -\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (6)$$

On obtient la relation de dispersion et l'indice de réfraction n

$$c^2 \vec{k}^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad n = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (7)$$

L'indice n (et donc aussi \vec{k}) devient imaginaire si $\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_0^2 + \omega_p^2$. Estimons ω_p^2 . n est de l'ordre de 6×10^{23} par 221, soit environ $3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$. On a la constante de structure fine $\frac{1}{137} \simeq \frac{q^2}{\epsilon_0 \hbar c}$ et $mc^2 \simeq 5 \times 10^5 \text{ eV}$, $\hbar \simeq 10^{-34} \text{ Js}$ et $1 \text{ eV} \simeq 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. A la fin on trouve $\omega_p \simeq 10^{14} \text{ s}^{-1}$, soit $\omega_p \ll \omega_0$ et l'intervalle des ω qui donne des n et k imaginaires est donc très petit.

Pour discuter le cas d'un plasma avec des électrons libres il suffit de poser $\omega_0 = 0$ et on a alors $c^2 \vec{k}^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ et $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. Dans un plasma il y a propagation (k réel) uniquement si $\omega > \omega_p$.

Exercice 49 : transfert thermique barreau

On considère une barre solide infinie et de section S , de capacité thermique c , de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ .

1) Etablir l'équation de la chaleur. Introduire le coefficient de diffusion D .

2) Vérifier que $T(x, t) = \frac{T_0 \ell}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$ est solution où ℓ est une longueur.

3) A quelle profil de température initial cela correspond-il ? Quel est l'injection d'énergie thermique faut-il réaliser à $t = 0$ pour obtenir ce profil initial ?

4) On prépare maintenant le barreau à $t = 0$ avec la condition initiale $T = T_0$ pour $-L < x < 0$ et $T = 0$ partout ailleurs. Quelle est l'évolution ultérieure de la température ?

5) Discuter cette solution quand $L \gg \sqrt{4Dt}$ puis quand $L \ll \sqrt{4Dt}$.

Aide. On posera si nécessaire la fonction $\mathcal{E}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz$ et on rappelle $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Eléments de solution

Au centre du raisonnement est le principe de superposition autorisé par la linéarité de l'équation.

1) On fait un bilan avec le flux $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T$ et on trouve

$$\rho c \partial_t T = \lambda \Delta T = \lambda \partial_{xx} T \quad (1)$$

et on pose $D = \lambda/(\rho c)$.

2) La vérification prend une ligne pour la dérivée temporelle et deux lignes pour la double dérivée spatiale.

3) On a une Gaussienne qui s'élargit. A $t = 0$ c'est nul partout sauf en $x = 0$ où c'est infini. On a donc injecté beaucoup d'énergie thermique en une zone infiniment petite. On peut calculer cette chaleur qui est

$$Q_0 = \int \rho c S T(x) dx = \rho c S \ell T_0. \quad (2)$$

C'est comme si on avait injecté l'énergie nécessaire pour chauffer à T_0 une tranche de longueur ℓ du barreau, sauf que cette énergie a en fait été injectée dans un espace infiniment petit centré en $x = 0$.

4) Si on a bien interprété la question précédente, alors on applique le principe de superposition. On considère que sur un élément de longueur dx on a apporté

$$\delta Q(x) = \rho c S T_0(x) dx \quad (3)$$

et que ça diffuse ensuite selon la solution trouvée. La différence c'est que ces différentes injections sont comprises entre $-L$ et 0 . On a une convolution de la solution précédente (celle

associée à un Dirac initial) avec la condition initiale en superposant et on trouve

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-L}^0 e^{-(x-y)^2/(4Dt)} dy. \quad (4)$$

On peut reformuler avec la fonction \mathcal{E} proposée en faisant un changement de variable $Z = (x - y)/\sqrt{4Dt}$ et on trouve

$$T(x, t) = T_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{4Dt}}^{(L+x)/\sqrt{4Dt}} e^{-Z^2} dZ \quad (5)$$

$$= T_0 \left[\mathcal{E} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) - \mathcal{E} \left(\frac{L+x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (6)$$

5) Si $L \gg \sqrt{4Dt}$ alors la seconde contribution est négligeable. Donc on trouve

$$T(x, t) \simeq T_0 \mathcal{E} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right). \quad (7)$$

En $x = 0$, comme $\mathcal{E}(0) = 1/2$ (trouvable avec l'aide), on a

$$T(0, t) = T_0/2. \quad (8)$$

Physiquement si L est très grand on a la même chose que lorsque l'on met deux barreaux semi-infinis en contact. La température au point de contact est alors la température moyenne (ici la moyenne entre 0 et T_0). On peut calculer le flux (intégré sur la surface) et on trouve en utilisant $\mathcal{E}'(x) = -e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$

$$\Phi_x(x=0) = S\lambda \frac{T_0}{2\sqrt{\pi Dt}}. \quad (9)$$

On a donc retrouvé la solution d'un barreau semi infini avec un bord maintenu à une température $T_0/2$. La partie $x < 0$ assure de toujours subvenir au flux nécessaire pour maintenir $T_0/2$ à $x = 0$.

Si en revanche L est petit devant la longueur de diffusion (ou vu plus physiquement lorsqu'on attend longtemps pour que la longueur de diffusion soit plus grande que L) alors on peut faire un DL de (5) qu'on peut voir comme $f(x) - f(x + L)$ et on trouve

$$T(x, t) \simeq \frac{T_0 L}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}. \quad (10)$$

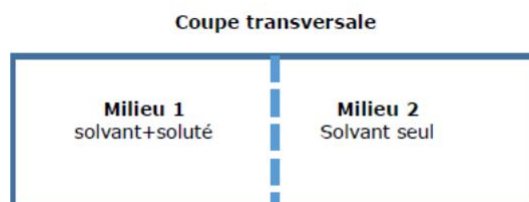
On retrouve la première solution où l'énergie avait été concentrée sur une longueur infinitésimale. En fait il vaut mieux faire ce DL autour de $x + L/2$ car le terme d'ordre deux s'annule donc le résultat est plus précis. On trouve alors

$$T(x, t) \simeq \frac{T_0 L}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x+L/2)^2/(4Dt)} + \mathcal{O}((L/\sqrt{Dt})^3). \quad (11)$$

Là c'est plus clair. La diffusion a effacé l'étalement initial de la température et tout se passe comme si on avait concentré l'injection au milieu du segment $[-L, 0]$.

Exercice 50 : échange d'un solvant

On considère une boîte séparée en deux par une membrane fixe semi-perméable (figure).



Le membrane sépare les 2 milieux représentés sur la figure: (1) étant un milieu dilué constitué d'un solvant et d'un soluté et (2) constitué du même solvant seul. Seul le solvant peut traverser la membrane. Cette dernière est d'épaisseur e et elle est trouée par des fentes de hauteur b et de largeur L (dans le plan perpendiculaire à la figure, L est donc aussi la largeur de la boîte). Le solvant s'échange entre les 2 milieux par ces fentes. On suppose que $P_1 > P_2$ (la pression dans (1) est la plus grande) et que le solvant est un fluide Newtonien de viscosité η . On suppose de plus que le volume molaire du solvant et du soluté sont identiques.

Sans utiliser la notion de potentiel chimique (vu en cours de chimie), déterminer l'expression de $\Delta P = P_1 - P_2$ lorsqu'un régime permanent s'établit (on montrera en particulier que ΔP est proportionnelle à η).

Note: si besoin, les bords extérieurs de la boîte peuvent être un peu mobiles

Eléments de solution

L'exercice combine 2 exercices classiques, probablement faits en classe: un problème de diffusion particulière (dans un cas simple) et un problème d'écoulement de Poiseuille plan. Ce qui est compliqué ici c'est qu'il faut rapprocher ces 2 histoires. Donc, si c'est fait, c'est un excellent point même si les calculs ne sont pas conduits très loin. Sinon, il y a beaucoup de choses à dire qui relèvent du cours.

Donc, le point à comprendre, c'est que le régime permanent ici, c'est l'équilibre entre les 2 courants possibles: celui de diffusion particulière du solvant entre (1) et (2) et celui de l'écoulement de Poiseuille plan par chaque fente ($\Delta P \neq 0$). L'égalité (en module) entre les vecteurs densité de courant de ces 2 phénomènes est la seule manière d'avoir un équilibre (ou un régime permanent). Cela veut dire évidemment que nécessairement, dans les conditions du montage, la densité particulière de solvant n'est pas la même dans (1) et (2) -sans que ce soit besoin de le préciser dans l'énoncé-. Egalement, il serait préférable que les vecteurs densité de courant soient de sens opposés.

On va toujours raisonner pour une fente. On oriente (x) de (1) vers (2). On commence par exemple par le courant de diffusion du solvant: $J_x = -D(n_{solv,2} - n_{solv,1})/e$ où $n_{solv,1}$ est le nombre de particules de solvant dans (1) ($N_{solv,1}$) divisé par V_1 . En introduisant, la concentration particulière de soluté (petite devant celle du solvant), puis l'égalité des volumes molaires (énoncé), on arrive facilement à:

$$J_x = -D \frac{n_{solv,2}/V_2}{e} \frac{n_{solute}}{n_{solv,1}}.$$

C'est un courant négatif, qui tend à pousser la membrane vers la gauche. Et en termes d'unité, J_x multiplié par une surface est la variation par seconde d'un nombre de particules (de solvant).

Ensuite, on passe au courant de Poiseuille plan. L'énoncé donne $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$, ce qui va provoquer un courant de Poiseuille vers la droite. Donc, tout va bien. L'établissement du profil des vitesses entre 2 fentes rectangulaires est fait en cours. Dans le montage de l'exercice,

cela donne:

$$v(y) = \frac{P_2 - P_1}{2\eta e} (y^2 - b^2/4)$$

Le débit volumique correspondant est: $\mathcal{D}_v = \int_{-b/2}^{b/2} v(y) dy L$ et vecteur densité de courant de Poiseuille (densité de particules de solvant de (1) multipliée par la vitesse moyenne $\frac{\mathcal{D}_v}{Lb}$):

$$J'_x = \frac{n_{\text{solv},1}}{V_1} \frac{\mathcal{D}_v}{Lb} = \frac{n_{\text{solv},1}}{V_1} \frac{\Delta P}{12\eta e} b^2 > 0.$$

Il ne reste plus qu'à écrire: $|J_x| = |J'_x|$ et c'est fini. On trouve:

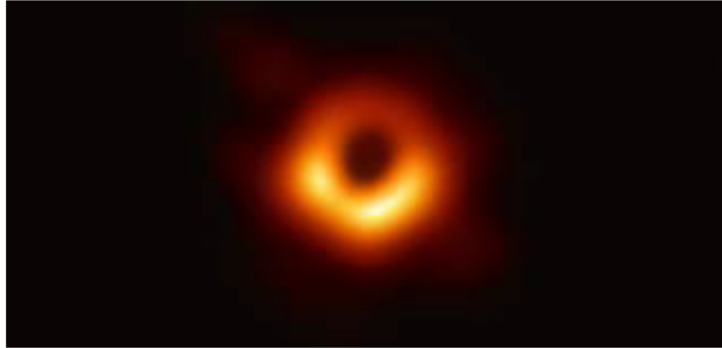
$$\Delta P = \frac{12\eta D}{b^2} \frac{n_{\text{solute}}}{n_{\text{solv},1}}.$$

Si on prend des valeurs numériques raisonnables: $D = 10^{-10}$ SI, $\eta = 0.01$ SI et $b \sim 1 \mu\text{m}$ avec un rapport soluté/solvant de 1/10, on trouve: $\Delta P = 1$ atm, ce qui est compatible avec une pression osmotique.

Exercice 51 : trou noir, photo

Le 10 avril 2019 la collaboration Event Horizon Telescope a publié la première photo d'un trou noir, celui au centre de la galaxie M87. Ce trou noir a une masse d'environ $6.5 \times 10^9 M_S$ où $M_S \simeq 2 \times 10^{30}$ kg est la masse du soleil. Mais la masse d'un trou noir n'est pas nécessairement si élevé. Un trou noir se caractérise par une attraction gravitationnelle si forte dans l'espace qui l'entoure que rien, ni même la lumière ne peut s'en échapper, une fois à l'intérieur de "l'horizon" du trou noir. Ce que l'on voit sur la photo est de la matière chaude à l'extérieur de l'horizon du trou noir.

- 1) *Rappeler comment on calcule la vitesse de libération (p.ex. pour une fusée) sur terre.*
- 2) *Dans le cadre de la mécanique classique, calculer la vitesse de libération pour un objet astronomique (étoile, planète,...), supposé à symétrie sphérique, de masse m et rayon R . Quelles conditions trouve-t-on alors sur m et R pour que la vitesse de libération soit supérieure*



à la vitesse de la lumière? Que devient cette condition si $m = M_S$ et quelle conclusion sur la masse volumique (à tort supposée uniforme) d'un tel trou noir ? Comparer avec différentes masses volumiques que vous connaissez.

3) Toujours dans le cadre de la mécanique classique, et en traitant à tort la lumière comme des corpuscules ayant une masse et allant à la vitesse de la lumière, comment nous apparaîtrait alors une région du ciel dans laquelle se trouverait un trou noir, en supposant qu'il n'y ait pas de gaz ou autre matière à proximité.

4) Maintenant on suppose qu'à un instant initial un tel trou noir de rayon R_S se trouve entouré à l'extérieur d'une couche sphérique d'hélium de masse volumique ρ_0 et température initiale $T_0 = 3\text{K}$ uniformes, située autour de $r = 100R_S$ et d'une épaisseur $h = \frac{R_S}{10}$. Décrire ce qui se passe et commenter si cela pourra ressembler à la photo.

Eléments de solution

1) On obtient l'énergie potentielle gravitationnelle en intégrant la force de Newton : $E_p(r) = -\frac{GMm}{r}$. On aura donc une énergie totale zéro à $r = \infty$ si $\frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} = 0$ et donc pour la vitesse de libération $v^2 = \frac{2GM}{r}$. Tout ceci suppose bien sûr une masse volumique à symétrie sphérique.

2) Pour $v = c$ on a $r = \frac{2GM}{c^2}$. Pour une masse M donné ce rayon s'appelle le rayon de

Schwarzschild:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} . \quad (1)$$

C'est aussi la valeur correcte du rayon de l'horizon d'un trou noir en relativité générale. Pour une masse solaire on trouve $R_S = 3$ km, largement inférieur au rayon du soleil. *On appréciera l'incroyable coïncidence entre le nom de Karl Schwarzschild et la signification littérale : schwarz = noir, schild = bouclier !*

On aura donc un trou noir si le rayon de l'objet céleste r est inférieur à R_S , soit pour la masse volumique

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}r^3} > \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R_S^3} = \frac{Mc^6}{\frac{4\pi}{3}8G^3M^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3M^2} . \quad (2)$$

On voit donc que la densité critique est d'autant plus grande que la masse est petite. Pour $M = M_{\text{soleil}}$ et $R_S = 3$ km on trouve par exemple $\rho > 2 \times 10^{16} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. A titre de comparaison, pour la matière nucléaire on a, en prenant un noyau $m \simeq 10^{-23}$ g et $r \simeq 10^{-15}$ m, soit $\rho \simeq 10^{16} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

3) Sans rentrer dans les calculs, il est clair qu'il existent deux rayons, le rayon de capture R_c et le rayon de Schwarzschild R_S avec $R_c > R_S$. En effet, le rayon de capture correspond au rayon maximal jusqu'auquel un "corpuscule de lumière" peut s'approcher sans être capturé et ensuite spiraler vers le centre. Clairement, pour cela il suffit d'une attraction plus faible que pour contraindre un "corpuscule de lumière" à faire demi-tour sur une trajectoire radiale. Donc $R_c > R_S$. Les trajectoires pour lesquelles la distance de plus grande approche est supérieure à R_c subissent juste une déviation vers le centre. Si on considère l'ensemble des rayons lumineux qui proviennent des étoiles derrière le trou noir, on a un fort effet de lentille (gravitationnelle). En particulier on ne verra pas de rayons qui proviennent du disque apparent du trou noir, et par l'effet de lentille ce disque paraîtra plus grand que R_c . On verra donc bien une tache noire dans le ciel.

4) Le gaz (parfait) a une pression "thermique" de $p = \frac{\rho}{\mu}R_B T$ où ρ est toujours la masse volumique, $\mu = 4 \times 10^{-3}$ kg la masse molaire et R_B la constante des gaz. Sous les forces gravitationnelles, ce disque va subir une force radiale (vers le centre du trou noir) par unité

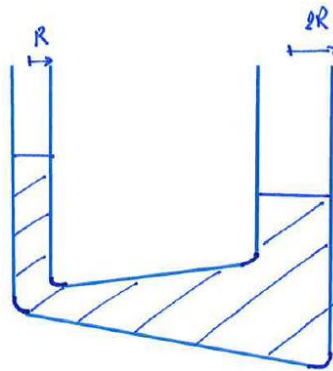
de surface de $\frac{GM\rho(4\pi r^2 h)}{r^2 \times 4\pi r^2} = \frac{GM\rho h}{r^2}$. Ceci est l'équivalent d'une pression

$$p_{\text{grav}} = \frac{GM\rho h}{r^2} = \frac{\rho}{\mu} R_B T_{\text{grav}} \quad , \quad T_{\text{grav}} = \frac{GMh\mu}{R_B r^2} = \frac{R_S h}{r^2} \frac{c^2 \mu}{2R_B} . \quad (3)$$

Mais $\frac{c^2 \mu}{2R_B} \simeq 2 \times 10^{13} \text{K}$ tandis que $\frac{R_S h}{r^2} = 10^{-5}$, soit $T_{\text{grav}} \simeq 10^8 \text{K}$. Evidemment ceci n'est pas la pression thermique dans le gaz, mais l'équivalent d'une pression radiale qui va faire contracter cette couche de gaz vers des r de plus en plus petits. Ce calcul montre que les forces gravitationnelles sont largement supérieures aux forces thermiques. La contraction résulte en une compression de la couche de gaz qui va donc augmenter sa (vraie) température thermique. En passant de $r = 100R_S$ à $r = 2R_S$ (et en supposant h constant), le volume sera divisé par 2500 et la température augmentera par un facteur du même ordre pour atteindre quelques milliers de Kelvin résultant en une émission de lumière. Si on prend $3 \text{K} \times 2500$, on atteint 7500 K, très proche de la température de la surface du soleil et donc l'émission de lumière avec un spectre très proche. D'où la photo.

Exercice 52 : tube en U modifié

On considère un tube en U un peu particulier, voir sur la figure ci-dessous, qui est rempli d'un fluide parfait.



Le tube de gauche a pour rayon R et celui de droite $2R$. La distance entre les 2 tubes est l (entre les 2 bords intérieurs sur la figure). Le tube horizontal est alors de la forme d'un entonnoir et son rayon augmente linéairement de R à $2R$ sur la distance l .

Déterminer la période des petites oscillations du fluide dans ce tube en U.

Eléments de solution

Il faut bien voir la géométrie du problème. La section du tube est πR^2 à gauche (verticalement et horizontalement), puis sur la distance l , cette section augmente linéairement jusqu'à $4\pi R^2$ horizontalement et la section verticale est aussi de $4\pi R^2$ (pour le tube de droite).

L'exercice pour un tube en U de section constante est un exercice de cours. La vitesse est constante le long du tube en U, et si L est la longueur moyenne du fluide dans le tube, alors l'équation du mouvement pour les variations de niveau est: $L\ddot{z} + 2gz = 0$.

Ici, c'est un peu plus compliqué mais le problème est toujours à une dimension, le long du tube. Donc, on a intérêt à utiliser l'approche: conservation de l'énergie. A l'équilibre (en l'absence d'oscillation), on note h le niveau de l'eau (suivant (z)) dans chacun des tubes. Supposons que l'on ait une petite oscillation de ce niveau et donc une différence de niveaux entre les deux tubes verticaux, telle que le niveau du fluide est $h + y$ dans le tube de gauche (section πR^2) et $h - y/4$ dans le tube de droite (section $4\pi R^2$). On prendra $y > 0$ pour faciliter le raisonnement.

On détermine l'énergie potentielle de cette configuration. Ce que l'on observe auparavant, c'est que si le niveau monte de y dans le tube de gauche, alors il baisse de $y/4$ dans le tube de droite. Et donc, la différence de l'énergie potentielle gravitationnelle de cette configuration par rapport à la configuration d'équilibre, c'est l'énergie potentielle gagnée par une masse de fluide: $4\pi R^2(y/4) \rho$, prise à droite à la cote (pour son centre de gravité) $z = h - y/8$ et portée à gauche à la cote $z = h + y/2$ (pour son centre de gravité). On trouve donc:

$$E_p = \rho g \pi R^2 y (y/2 + y/8) = \rho g \frac{5}{8} \pi R^2 y^2.$$

Pour l'énergie cinétique, on cherche déjà la contribution d'une petite section entre x et $x + dx$ dans la partie horizontale. Le débit volumique est constant et la section augmente linéairement suivant x , donc: $\pi R^2 \dot{y} = v_x [\pi R^2 (1 + x/l)^2]$. Ce qui donne la contribution du petit élément

entre x et $x + dx$ puis pour la partie horizontale en intégrant pour x de 0 à l :

$$E_c^{(horiz)} = \frac{\rho}{4} \pi R^2 l \dot{y}^2.$$

Enfin, il y a l'énergie cinétique pour les 2 tubes verticaux. On rappelle que: $h + y(t)$ est le niveau de l'eau dans le tube de gauche (section πR^2) et donc: $h - y(t)/4$ est le niveau dans le tube de droite (section $4\pi R^2$). La vitesse d'un petit volume de fluide dans le tube de droite est uniforme et vaut: \dot{y} et elle est de $-\dot{y}/4$ dans le tube de gauche. De plus, si le niveau de l'eau est de $h + y(t)$ dans le tube de gauche, cela veut dire que la hauteur d'eau (disponible) dans ce tube est de $h + y(t) - R$ (voir dessin de l'énoncé). Pour le tube de droite, la hauteur d'eau (disponible) est alors de $h - y(t)/4$. On peut ensuite calculer l'énergie cinétique pour les 2 tubes verticaux. On obtient:

$$E_c^{(vert)} = \frac{1}{2} \pi R^2 \rho \dot{y}^2 \left[h + y - R + \frac{h - y/4}{4} \right].$$

On ne s'intéresse qu'aux petites oscillations donc:

$$E_c^{(vert)} \simeq \frac{1}{2} \pi R^2 \rho \dot{y}^2 \left[\frac{5}{4} h - R \right].$$

En regroupant tout, on obtient l'énergie mécanique.

$$E = \frac{1}{4} \pi R^2 \rho l \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \pi R^2 \rho \dot{y}^2 \left[\frac{5}{4} h - R \right] + \rho g \frac{5}{8} \pi R^2 y^2.$$

On peut alors prendre la dérivée par rapport au temps pour obtenir l'équation du mouvement:

$$\ddot{y} + \frac{5g}{2l + 5h - 4R} y = 0.$$

Dans les conditions du montage, on a évidemment que: $2l + 5h - 4R > 0$. Donc: $\omega^2 = \frac{5g}{2l + 5h - 4R}$ et on trouve la période des petites oscillations: $T = 2\pi/\omega$.

Exercice 53 : pluie dans un nuage

On décrit un nuage comme un ensemble de gouttelettes distribuées uniformément dans un large volume. A l'intérieur de ce nuage, on suppose qu'il pleut, c'est-à-dire que des gouttes de

pluie tombent à travers le nuage. On suppose que cet ensemble de gouttes de pluie représente une distribution uniforme de gouttes et reste toujours sphérique.

On considère que quand une goutte de pluie rencontre une gouttelette du nuage sur son chemin, la masse de la goutte de pluie augmente de la valeur de la masse de la gouttelette rencontrée.

Déterminer la vitesse de l'ensemble sphérique des gouttes de pluie.

Eléments de solution

Exercice de mécanique sur un système à masse variable, donc qui ressemble au cours sur la fusée.

Il y a une relation évidente entre la masse des gouttes de pluie $M(t)$ et le rayon de cet ensemble de gouttes $R(t)$ (toujours de forme sphérique): $M(t) = \frac{4}{3}\pi R(t)^3 \rho$, où ρ est la masse volumique des gouttes. Cette masse $M(t)$ va augmenter du fait que cet ensemble tombe dans le nuage en agrégeant les gouttelettes du nuage lui-même. On note ρ' la masse volumique du nuage: comme le nuage est certainement moins dense que l'ensemble des gouttes de pluie, c'est assez logique de prendre une masse volumique $\rho' \neq \rho$ qui sera donc plus petite que ρ . Il faut trouver quel est le volume balayé par les gouttes de pluie pendant dt en supposant qu'à cet instant l'ensemble des gouttes de pluie ont par exemple une vitesse v (suivant z). Chaque petite couronne de la demi-sphère inférieure de l'ensemble des gouttes balaye le volume $v dt$ fois l'aire de la petite couronne projetée sur la surface horizontale (perpendiculaire à (z)). Au final, cela représente le volume: $\pi R(t)^2 v dt$, où $R(t)$ est le rayon de l'ensemble des gouttes. Et donc, l'augmentation de la masse des gouttes est:

$$dM = \pi R(t)^2 v dt \rho'.$$

Il reste à écrire l'équation du mouvement pour la boule de gouttes de pluie et le problème sera complètement posé.

$$\dot{M}v + M\dot{v} = Mg.$$

Soit (après division par $\pi R(t)^2$):

$$\rho' v^2 + \frac{4}{3} R(t) \rho v = \frac{4}{3} R(t) \rho g.$$

Avec les relations pour $M(t)$ et $dM(t)$, on obtient aussi:

$$v = 4\dot{R} \frac{\rho}{\rho'}.$$

Ce qui permet d'obtenir une équation pour $R(t)$ seul, puis on pourra ensuite déduire v (via l'équation ci-dessus):

$$12\dot{R}^2 + 4R\ddot{R} = \frac{\rho'}{\rho} g R.$$

On n'a pas une équation toute simple qui lie \ddot{R} avec g mais on a quand même un mouvement de chute libre, donc on doit chercher une solution de la forme: $R(t) = a \frac{\rho'}{\rho} g t^2$ et déterminer a pour que cette forme soit solution de l'équation pour $R(t)$. On trouve $a = 1/56$, donc:

$$v = \frac{g}{7} t.$$

Ce qui conclut.

Il va y avoir une augmentation de température de l'ensemble des gouttes de pluie. Ce n'est pas évident à montrer. Mais il se trouve que cette augmentation de température restera faible sur les distances raisonnables et donc le nuage de pluie ne va pas se mettre à s'évaporer auquel cas le problème posé n'aurait pas de sens.

Exercice 54 : trou noir, rayonnement

Le 10 avril 2019 la collaboration Event Horizon Telescope a publié la première photo d'un trou noir, celui au centre de la galaxie M87. Ce trou noir a une masse d'environ $6.5 \times 10^9 M_S$ où $M_S \simeq 2 \times 10^{30}$ kg est la masse du soleil. Mais la masse d'un trou noir n'est pas nécessairement si élevé.

Selon la relativité générale (classique, c'est à dire non quantique), un trou noir se caractérise par une attraction gravitationnelle si forte dans l'espace qui l'entoure que rien, ni même la lumière ne peut s'en échapper, une fois à l'intérieur de "l'horizon" du trou noir.

Cependant, en combinant relativité (gravitation) et mécanique quantique, Hawking a démontré que, par un effet quantique relativiste, un trou noir doit néanmoins émettre un rayonnement de corps noir caractérisé par la température de Hawking T_H . Cela veut dire que le trou noir se comporte comme un corps noir qui émet un rayonnement de corps noir à cette température T_H . Dans la suite on admettra simplement ce résultat.

1) *Rappeler la loi de Stefan-Boltzmann. Que peut-on conclure pour la puissance rayonnée par le soleil ? A quelle perte de masse par an cela correspond-il ? Commentaire ? On donne $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$.*

2) *Hawking trouve que pour un trou noir (sphérique) de masse M la température de Hawking est $T_H \sim \frac{1}{M}$. Déterminer la relation correcte, à un facteur numérique près (qui s'avère être $\frac{1}{8\pi}$).*

3) *La taille d'un trou noir est caractérisé par son rayon de Schwarzschild $R_H \sim M$. Comme ci-dessus, trouver la bonne relation entre R_H et M à un facteur numérique près (qui sera 2).*

4) *En considérant le trou noir de masse M comme un corps noir sphérique de rayon R_H et de température T_H , calculer la puissance rayonnée. Quelle masse devrait avoir le trou noir pour que cette puissance soit comparable à celle du soleil ? A quelle perte de masse correspond ce rayonnement ? Calculer la durée de vie d'un trou noir par cette "évaporation de Hawking".*

Eléments de solution

1) On a $j = \sigma T^4$ où j est le flux d'énergie, i.e. la puissance par unité de surface. Le rayon du soleil est environ 100 fois celui de la terre, soit $R_S \simeq 7 \times 10^8 \text{ m}$. On trouve pour la puissance totale rayonnée:

$$P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4, \quad (1)$$

où on prendra $T_S = 6000 \text{ K}$. (Si besoin, on peut discuter la loi de Wien $\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$ avec $b \simeq 2,9 \times 10^{-3} \text{ K m}$ qui donne pour la lumière jaune $T = \frac{b}{\lambda_{\max}} = \frac{b}{600 \text{ nm}} \simeq 5000 \text{ K}$.)

On trouve alors, avec $T = 6000 \text{ K}$, $P_S \simeq 4,5 \times 10^{26} \text{ W}$. Par la relation $E = mc^2$ bien

connue de tous, cette puissance correspond à une perte de masse par unité de temps de $\frac{dm}{dt} = -\frac{P}{c^2} \simeq 5 \times 10^9 \text{ kg s}^{-1} \simeq 1,5 \times 10^{17} \text{ kg an}^{-1}$. Ceci est très faible devant M_S et il faudrait donc de l'ordre de 10^{13} années pour que toute la masse soit rayonnée. Evidemment la durée de vie d'une étoile comme le soleil est plus de l'ordre 10^9 années, temps au bout duquel tout l'hydrogène sera transformé en Hélium (et autres).

2) C'est un exercice sur les unités. D'abord, il faut voir que le phénomène fait intervenir, d'après l'énoncé, la relativité (vitesse de la lumière c), la gravitation (constante de Newton G) et la mécanique quantique (\hbar). Donc, on pose

$$T_H = \frac{A}{8\pi k_B M} \quad , \quad A = \hbar^\alpha c^\beta G^\gamma \quad . \quad (2)$$

En effet, \hbar , c ou G ne font intervenir le Kelvin, et donc la seule façon de relier les grandeurs est de relier l'énergie $k_B T_H$ à $\frac{A}{8\pi M}$.

Il faut ensuite tout exprimer en kg, m et s et on aura 3 équations pour 3 inconnues:

$$\begin{aligned} [\hbar] &= J s = N m s = kg m^2 s^{-1} \quad , \quad [c] = m s^{-1} \quad , \\ [G] &= N m^2 kg^{-2} = m^3 s^{-2} kg^{-1} \quad , \quad [k_B T_H] = J = kg m^2 s^{-2} \end{aligned} \quad (3)$$

On trouve alors le système de 3 équations (pour les kg) $1 = \alpha - \gamma - 1$, (pour les m) $2 = 2\alpha + \beta + 3\gamma$ et (pour les s) $-2 = -\alpha - \beta - 2\gamma$, soit $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$ et donc

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad . \quad (4)$$

3) Posons de même, $R_H = 2BM$ avec $[B] = m kg^{-1}$ et on voit simplement que G/c^2 a la bonne unité, soit

$$R_H = \frac{2GM}{c^2} \quad \Rightarrow \quad T_H = \frac{\hbar c}{4\pi k_B R_H} \quad . \quad (5)$$

4) Comme pour le soleil, on écrit pour la puissance totale rayonnée par le trou noir

$$P = 4\pi R_H^2 \sigma T_H^4 = \frac{\sigma}{(4\pi)^3} \left(\frac{\hbar c}{k_B} \right)^4 \frac{1}{R_H^2} \quad (6)$$

On a $k_B = R_{\text{gaz}}/N_{\text{Avogadro}} \simeq \frac{8}{6 \times 10^{23}} \text{J K}^{-1} \simeq 1,3 \times 10^{-23} \text{J K}^{-1}$, $\hbar \simeq 10^{-34} \text{J s}$ et donc $\frac{\hbar c}{k_B} \simeq 2,3 \times 10^{-3} \text{K m}$. On trouve alors

$$P \simeq 8 \times 10^{-22} \text{W} \left(\frac{\text{m}}{R_H} \right)^2 . \quad (7)$$

Pour un trou noir de la masse du soleil on a $R_H \equiv R_S \simeq 3 \text{km}$ et donc $P \simeq 10^{-28} \text{W}$, à comparer avec les $4,5 \times 10^{26} \text{W}$ rayonnés par le soleil. Ce ne sera donc qu'au bout de $10^{28+26+13} = 10^{67}$ années qu'une fraction considérable de la masse de ce trou noir aura été rayonnée. En revanche, un trou noir qui sera 10^{30} fois plus petit (soit d'un kg environ) rayonnera une fraction considérable de sa masse en rayonnement de Hawking en seulement 10 millions d'années. Et plus la masse diminue, plus T_H augmente et plus il rayonnera fort car en termes de M on peut réécrire (6) comme

$$P = \frac{\sigma}{(4\pi)^3} \left(\frac{\hbar c}{k_B} \right)^4 \frac{c^4}{4G^2 M^2} \equiv \gamma \frac{c^2}{M^2} \quad \text{où } \gamma = \frac{\sigma c^2}{4(4\pi)^3 G^2} \left(\frac{\hbar c}{k_B} \right)^4 \quad (8)$$

On peut même calculer la durée qu'il faut pour que le trou noir ait rayonné toute sa masse. Comme avant on a $-\frac{dM}{dt} = \frac{P}{c^2} = \frac{\gamma}{M^2}$ ou $-M^2 dM = \gamma dt$, soit intégré entre 0 et t_f et entre $M_i = M$ et $M_f = 0$ on obtient la durée de vie t_f comme

$$M^3 = 3\gamma t_f . \quad (9)$$

Exercice 55 : fabrication de la barbabapa

Vous avez déjà vu une machine à fabriquer de la barbabapa ? Cela peut se modéliser par à une passoire remplie de sucre liquide (car chauffé) et qui tourne à toute vitesse autour d'un axe vertical. On veut modéliser le phénomène de formation des fibres de sucre en faisant des hypothèses simplificatrices. La passoire peut être décrite par un pot cylindrique de rayon $r_0 = 0.1 \text{m}$ (percé de nombreux trous sur son côté, mais pas au fond) qui tourne autour de l'axe vertical à $\Omega = 100 \text{rad/s}$. La viscosité du sucre chauffé est $\mu = 1 \text{Pa.s}$ et sa densité la même que l'eau. Le sucre sort de chaque trou à une vitesse radiale de $u_0 = 0.01 \text{m/s}$. On cherche à décrire la fibre qui se forme par le fluide qui sort d'un trou.

- 1) Estimer les différentes forces en jeu et montrer que la force d'inertie d'entraînement est la plus importante.
- 2) Résoudre alors en ne considérant que cette force d'entraînement et vérifier le domaine de validité des approximations.
- 3) Comment évolue le rayon de la fibre dans le régime stationnaire en fonction de la distance à la passoire ?
- 4) En prenant en compte également la force de Coriolis (mais toujours en négligeant la viscosité et le poids) trouver l'expression de la norme de la vitesse du sucre liquide dans le référentiel tournant en fonction du temps de vol. On négligera aussi la vitesse radiale initiale u_0 . On utilisera que dans le référentiel Galiléen, la trajectoire du sucre est très simple. Trouver également la forme de la fibre.

Eléments de solution

Ce sujet mélange mécanique (changement de référentiel éventuellement) pour une description balistique, mais également fluides visqueux pour comprendre les limitations de cette approche.

- 1) On compare les accélérations associées à chaque force. Tout d'abord la force d'inertie d'entraînement est d'ordre $r_0\Omega^2 = 10^3 \text{ m/s}^2$ soit cent fois plus que la gravité qu'on négligera. Pour la force de Coriolis, on utilise qu'on a un peu de vitesse radiale en sortant des trous donc $\Omega u_0 = 1 \text{ m/s}^2$. Et pour la viscosité, il faut estimer $\mu\Delta v/\rho$. Si on prend $\Delta v \simeq u_0/r_0^2$ ça donne 1 m/s^2 . Mais on sait que le fluide accélère et donc on peut l'estimer avec la vitesse radiale Ωr_0 plutôt que u_0 et on trouve alors la même expression que la force d'inertie et donc le même ordre de grandeur 10^3 m/s^2 . On va voir que loin de la passoire la force de Coriolis ne doit pas être négligée, mais pour ce qui est de la viscosité on verra que c'est en sortie de passoire que l'on ne peut pas la négliger et c'est la limitation de la description.
- 2) Avec ces hypothèses, dans le référentiel tournant on a $\dot{\theta} = 0$ (coordonnées cylindriques) et

donc simplement

$$\ddot{r} = \Omega r. \quad (1)$$

On considère que le temps d'éjection d'une particule dont on décrit la trajectoire est $t_e = 0$. Les conditions initiales sont donc $r(t = 0) = r_0$ et $\dot{r}(t = 0) = u_0$ et on trouve

$$r = r_0 \cosh(\Omega t) + \frac{u_0}{\Omega} \sinh(\Omega t) \quad (2)$$

$$v = u_0 \cosh(\Omega t) + \Omega r_0 \sinh(\Omega t). \quad (3)$$

On va maintenant utiliser ces résultats pour calculer les termes négligés. On cherche des ordres de grandeur donc on néglige u_0 dans les expressions précédentes. Le rapport force de Coriolis sur force centrifuge est alors

$$(\Omega v)/\Omega^2 r = \tanh(\Omega t). \quad (4)$$

On voit qu'il faut $\Omega t \ll 1$ et donc $r - r_0 \ll r_0$. Il faut rester proche du bord de la passoire (proche en comparaison au rayon de la passoire). Pour calculer les effets visqueux et il faut trouver $t(r)$ pour avoir $v(r)$. On passe d'une description Lagrangienne à Eulerienne. On va estimer $\Delta v = v''(r)$ puisque dans les fibres les vitesses sont essentiellement le long de la fibre et notre fibre est radiale dans notre solution. On peut développer en Ωt les solutions précédentes, mais cette fois-ci sans négliger u_0 . On trouve

$$r = r_0 + u_0 t + \frac{1}{2} \Omega^2 r_0 t^2 \quad (5)$$

$$v = \Omega^2 r_0 t + u_0 \quad (6)$$

Physiquement ça revient à considérer une accélération d'inertie constante et donc à rester proche de la passoire. On aurait d'ailleurs pu faire ce choix dès le début en prenant une accélération d'inertie constante $\Omega^2 r_0$ pour trouver ce mouvement de chute libre dans la direction radiale.

On cherche $t(r)$ pour avoir le temps de vol de cette particule en fonction de la distance dans la fibre

$$t = \frac{-u_0 + \sqrt{u_0^2 + 2\Omega^2 r_0 (r - r_0)}}{\Omega^2 r_0} \quad (7)$$

et donc

$$v(r) = u_0 \sqrt{1 + 2\Omega^2 r_0 (r - r_0) / u_0^2} \quad (8)$$

En dérivant deux fois

$$v''(r) = -u_0 \frac{C^2}{[1 + 2C(r - r_0)]^{3/2}} \quad C \equiv \Omega^2 r_0 / u_0^2. \quad (9)$$

Quand $C(r - r_0) \ll 1$, donc proche de la sortie, voire à la sortie même, on trouve une accélération de viscosité immense. Clairement ça bloque la solution balistique. En revanche si $C(r - r_0) \gg 1$ alors le terme de viscosité devient négligeable. Par exemple on trouve alors $\mu / \rho v''(r = 2r_0) \simeq 10^2 m/s^2$. Proche de la passoire on ne peut pas négliger la viscosité, et l'élongation de la fibre n'est pas aussi efficace que l'approche balistique le laisse penser.

3) Une fois qu'on a $v(r)$, alors en régime stationnaire la conservation de sucre donne que $a^2(r)v(r)$ est constant ou $a(r)$ est le rayon de la fibre (il suffit de faire un bilan sur un volume). On a donc

$$a(r) = a_0 \left[1 + \frac{2\Omega^2 r_0 (r - r_0)}{u_0^2} \right]^{-1/4} \quad (10)$$

Et on trouve qu'en $r = 2r_0$ on a réduit d'un facteur $(20)^{3/2} \simeq 100$.

4) La résolution du problème peut se faire en prenant en compte Coriolis. Mais pour cela on ne se place pas dans le référentiel tournant mais dans le référentiel de la fête foraine. Après éjection à t_e une particule de sucre suit une trajectoire rectiligne, de vitesse constante donc sa vitesse et position à t/t_e sont

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_i(t_e) \quad (11)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_i(t_e)(t - t_e) + \vec{r}_i(t_e). \quad (12)$$

Les candidats peuvent être guidés en leur demandant d'exprimer les résultat en fonction de \vec{r}_i , et ainsi les amener à écrire les deux équations précédentes.

On peut ne pas négliger la vitesse radiale initiale u_0 mais rapidement c'est compliqué même si ça reste toujours possible analytiquement. L'énoncé suggère donc de négliger u_0 . On a alors

simplement la vitesse initiale reliée à la position d'éjection par

$$\vec{v}_i(t_e) = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i(t_e). \quad (13)$$

En régime stationnaire la vitesse s'exprime en fonction de la vitesse dans le référentiel tournant $\vec{v}_{R'}$. Cette vitesse correspond à l'écoulement du fluide dans la direction de la fibre. En effet en régime stationnaire, et dans le référentiel tournant, la fibre ne bouge pas, mais le fluide se déplace à l'intérieur, comme dans un tuyau courbé mais fixe. La vitesse dans le référentiel Galiléen est reliée à celle dans le référentiel tournant par

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + \vec{v}_{R'}. \quad (14)$$

Il vient en utilisant (11) pour remplacer \vec{v} et \vec{r} (et le fait que \vec{r}_i est horizontal alors que $\vec{\Omega}$ est vertical)

$$\vec{v}_{R'}(t) = -\vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i(t_e)](t - t_e) = \Omega^2 \vec{r}_i(t_e) \tau, \quad (15)$$

où on a posé le temps de vol

$$\tau = t - t_e. \quad (16)$$

On peut discuter ce résultat pas très intuitif. En effet, on peut être surpris que la norme de la vitesse ne fasse qu'augmenter mais c'est essentiellement parce que c'est une vitesse relative, et plus le temps de vol est grand, plus on est éloigné du centre de rotation et donc plus la vitesse est grande par rapport au référentiel tournant, parce que justement la vitesse associée à cette rotation est Ωr et $r \rightarrow \Omega r_0 \tau$.

La norme de (15) nous donne la vitesse d'écoulement dans la fibre. Si s est une coordonnée curviligne (suggérer d'utiliser cette coordonnée?) décrivant la fibre ($s = 0$ sur la passoire) alors pour une particule émise à t_e

$$V \equiv |\vec{v}_{R'}| = \frac{ds}{dt} = \Omega^2 r_0 \tau \quad s = \frac{1}{2} \Omega^2 r_0 \tau^2. \quad (17)$$

On relie ainsi le temps de vol τ à la distance atteinte le long de la fibre s .

On peut ensuite inverser et trouver $\tau(s)$, c'est-à-dire le temps de vol en fonction de la distance le long de la fibre, et on trouve

$$\tau(s) = \sqrt{\frac{2s}{\Omega^2 r_0}}, \quad (18)$$

et donc ainsi avoir $V(s)$.

$$V(s) = \sqrt{2\Omega^2 r_0 s}. \quad (19)$$

En fait tout se passe comme si on avait une accélération constante $\Omega^2 r_0$ égale à l'accélération centrifuge initiale, mais dirigée toujours dans le sens de la fibre, qui elle prend une forme courbée !

On peut ensuite trouver la forme de cette fibre. On travaille donc à un instant donné et on veut la dépendance en s . Avant on travaillait en regardant une particule émise à t_e et on regardait son évolution. Là on va prendre un t fixe, par exemple $t = 0$. On peut alors relier le moment d'éjection t_e au temps de vol avec (16) et ainsi trouver le moment d'éjection d'une particule à une coordonnée curviligne s :

$$t_e(s) = -\tau(s). \quad (20)$$

On peut alors remplacer dans (12)

$$\vec{r}(s) = \tau(s) \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i(-\tau(s)) + \vec{r}_i(-\tau(s)) \quad (21)$$

On utilise la position d'éjection en fonction du moment d'éjection

$$\vec{r}_i(t_e) = r_0 \cos(\Omega t_e) \vec{e}_x + r_0 \sin(\Omega t_e) \vec{e}_y. \quad (22)$$

Avec $\Omega t_e = -\Omega \tau(s) = -\sqrt{2s/r_0}$, on trouve alors

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= r_0 \left[\cos(\sqrt{2s/r_0}) + \sqrt{2s/r_0} \sin(\sqrt{2s/r_0}) \right] \vec{e}_x \\ &+ r_0 \left[-\sin(\sqrt{2s/r_0}) + \sqrt{2s/r_0} \cos(\sqrt{2s/r_0}) \right] \vec{e}_y \end{aligned} \quad (23)$$

ou en polaire (en reconnaissant $r_0 \cos(b-a)$ et $r_0 \sin(b-a)$ ci-dessus)

$$r(s) = r_0 \sqrt{1 + 2s/r_0} \quad (24)$$

$$\theta(s) = \arctan(\sqrt{2s/r_0}) - \sqrt{2s/r_0} \quad (25)$$

ce qui fait une jolie spirale. C'est surprenant, mais dans ce cadre d'approximation (pas de viscosité, pas de frottement de l'air), la forme de la spirale ne dépend pas de Ω .

En fait on réalise qu'on peut le voir si on fait une construction géométrique depuis le début. Il faut voir que les particules ont toujours la même vitesse avant et après l'éjection (en norme). Soit elles tournent car elles ne sont pas encore éjectées, soit elles vont tout droit une fois qu'elles ont été éjectées, mais c'est toujours avec la vitesse Ωr_0 . Finalement la forme de la courbe est la même que l'extrémité d'un fil autour d'une bobine que l'on déroule mais en maintenant toujours la partie déroulée tendue. Cette construction géométrique donne

$$\vec{r}(\tau) = \tau \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i(-\tau) + \vec{r}_i(-\tau) \quad (26)$$

où on utilise (22), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \vec{r}(\tau) &= r_0 [\cos(\Omega\tau) + \Omega\tau \sin(\Omega\tau)] \vec{e}_x \\ &+ r_0 [-\sin(\Omega\tau) + \Omega\tau \cos(\Omega\tau)] \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (27)$$

Ensuite on fait

$$ds/d\tau = |d\vec{r}/d\tau| = r_0 \Omega^2 \tau. \quad (28)$$

et on trouve $s(\tau)$ puis $\tau(s)$ comme précédemment. On remplace alors dans (27) et on retrouve (23). On a donc deux approches. Soit on calcule d'abord la vitesse dans le référentiel tournant pour trouver $ds/d\tau$ et on calcule ensuite la forme de la fibre, soit on calcule la forme de la fibre avec cet argument géométrique de la bobine qu'on déroule, et ensuite une fois $\vec{r}(\tau)$ connu, on en déduit la vitesse et donc $ds/d\tau$ puis $s(\tau)$ et enfin $\tau(s)$ pour avoir la trajectoire en fonction de la longueur de fibre.

Exercice 56 : onde EM entre 2 plans

On considère une onde électromagnétique (EM) plane harmonique qui se propage dans le vide suivant l'axe (x) avec un vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y)$ et polarisée linéairement suivant l'axe (z). Cette onde entre dans l'espace vide confiné entre 2 plans conducteurs d'équations: $y = 0$ et $y = a$. On admet que dans les conditions du montage, le champ électrique est nul au niveau des plans conducteurs et que, pour le champ magnétique, $B_y = 0$ au niveau des plans conducteurs.

Dans ces conditions, trouver quelle est la forme complète du champ électrique associé à l'onde entre les plans conducteurs. Montrer sur cet exemple que la vitesse de propagation de l'énergie EM est égale à la vitesse de groupe.

Eléments de solution

C'est un exercice proche du cours. La variation (ou la difficulté) est qu'il faut être précis dans les calculs.

Pour le début de la question, il faut savoir que le champ électrique d'une onde EM dans le vide, de vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y)$ et polarisée linéairement suivant l'axe (z), s'écrit en notations complexes:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] \vec{e}_z.$$

Avec $k = \omega/c$. Entre les 2 plans $y = 0$ et $y = a$, il y a une onde de cette forme de vecteur d'onde (k_x, k_y) et une onde réfléchie de vecteur d'onde $(k_x, -k_y)$. Le champ électrique entre les 2 plans devient donc:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = (A \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] + B \exp[i(k_x x - k_y y - \omega t)]) \vec{e}_z.$$

Avec A et B des constantes (complexes) à déterminer à partir des conditions aux limites, ici le champ électrique est nul au niveau des plans conducteurs. On trouve alors:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = 2iA \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp[i(k_x x - \omega t)] \vec{e}_z.$$

Le champ magnétique se trouve alors avec la relation de Maxwell-Faraday.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 2iA \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp[i(k_x x - \omega t)] = i\omega B_x.$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = 2Ak_x \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp[i(k_x x - \omega t)] = i\omega B_y.$$

Soit:

$$(B_x, B_y) = \left(2A \frac{\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp[i(k_x x - \omega t)], 2A \frac{k_x}{i\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp[i(k_x x - \omega t)]\right).$$

Ce qui conclut pour le début de la question. On observe bien que $B_y = 0$ au niveau des plans conducteurs, comme indiqué dans l'énoncé. On ne demande bien évidemment pas de commenter le fait que B_x ne soit pas nul (hors programme).

Pour répondre à la fin de la question, on doit déjà trouver la vitesse de groupe. Avec la forme du champ EM entre les plans, on obtient la relation de dispersion:

$$\frac{\pi^2}{a^2} + k_x^2 = \omega^2/c^2.$$

Soit, une vitesse de groupe:

$$v_g = d\omega/dk_x = c\sqrt{1 - \frac{(\pi c/a)^2}{\omega^2}}$$

Ensuite, pour étudier la vitesse de propagation de l'énergie EM, on doit calculer la valeur moyenne dans le temps (sur une période $T = 2\pi/\omega$) du vecteur de Poynting, soit (attention à la notation complexe):

$$\langle \vec{P} \rangle_T = \langle \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{B}^*/\mu_0] \rangle_T.$$

Et la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie EM (attention à la notation complexe):

$$\langle u \rangle_T = \langle \frac{1}{2} \text{Re}[\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^*/2 + \vec{B} \cdot \vec{B}^*/(2\mu_0)] \rangle_T.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P} \rangle_T &= 2 \frac{|A|^2}{\mu_0 \omega} k_x \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_x. \\ \langle u \rangle_T &= \epsilon_0 |A|^2 \left[\left(1 + \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{\pi^2 c^2/a^2}{\omega^2} \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

En suivant ce qui est appris dans le cours, on sait alors que l'énergie EM qui traverse une surface S perpendiculaire au plans $y = 0$ et $y = a$ (et de longueur L arbitraire suivant (z)) et pendant T vaut:

$$T \int_S \langle \vec{P} \rangle_T dS \vec{e}_x.$$

Si l'énergie EM se propage à la vitesse v , cette quantité peut aussi s'écrire comme:

$$vT \int_S \langle u \rangle_T dS.$$

Pour trouver v , on doit ensuite écrire l'égalité entre ces 2 expressions. Soit:

$$vT \int_S \langle u \rangle_T dS = T \int_S \langle \vec{P} \rangle_T dS \vec{e}_x.$$

Les calculs sont simples, on trouve que $v = v_g$, ce qui conclut.

Un calcul du même type est fait en cours dans le cas d'une onde plane progressive harmonique dans le vide, auquel cas: $v = v_g = c$.

Exercice 57 : tube capillaire

De l'eau se trouve dans un très grand bac. Un tube cylindrique, d'axe vertical, en verre fin, de rayon intérieur R , et ouvert aux deux bouts, se trouve avec l'un de ses bouts juste au dessus de la surface de l'eau. A $t = 0$ on enfonce rapidement (mais sans faire de vagues) le bout du tube cylindrique de $h_0 = 0,1$ mm dans l'eau. On observe que l'eau monte à l'intérieur du tube cylindrique d'une certaine hauteur $h(t)$ (mesurée à partir du bout du tube). La hauteur atteinte à l'équilibre et la façon dont cette hauteur est atteinte dépendent du rayon intérieur R du tube. La figure montre $h(t)$ pour différentes valeurs de R allant de 0,2 mm à 0,5 mm.

Expliquer qualitativement ce qui se passe, puis décrire quantitativement le phénomène.

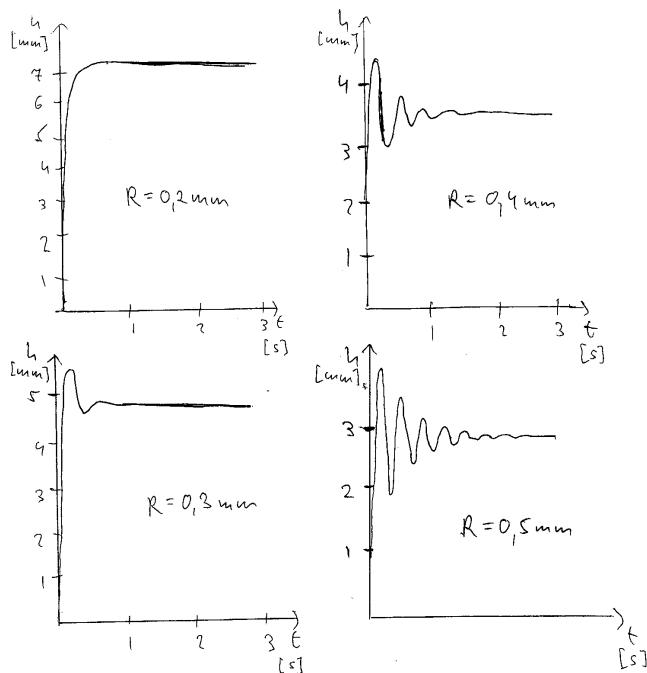
Eléments de solution

Equilibre statique à $t = \infty$: Il y a une tension de surface A entre l'eau et le verre qui résulte en un gain d'énergie proportionnel à la surface de contact, soit $\Delta E = -2\pi R h A$. Si cette notion n'est pas familière on donnera ce résultat. On a donc une force $\vec{F}_A = -\vec{\nabla}(\Delta E) = 2\pi R A \vec{u}_z$ dirigée vers le haut. Il y a le poids de l'eau qui est montée, proportionnel au volume, soit $\pi R^2(h - h_0)$, et dirigée vers le bas. A l'équilibre cela donne ($h \rightarrow h_\infty$), avec ρ la masse volumique de l'eau,

$$2\pi R A = \pi R^2(h_\infty - h_0)\rho g \quad \Rightarrow \quad h_\infty - h_0 = \frac{2A}{\rho g R}. \quad (1)$$

Regardons comment on pourrait obtenir cela à partir de Navier-Stokes. A l'équilibre on a $\vec{v} = 0$ et on a seulement

$$0 = -\vec{\nabla}p - \rho g \vec{u}_z + \dots, \quad (2)$$



où $+$... représente d'autres forces. Ici on a la force due à la tension de surface, mais elle n'est pas volumique, ni même proportionnelle à la surface de contact. En effet, c'est l'énergie qui est proportionnelle à la surface de contact, et la force qui en est moins le gradient est seulement proportionnelle à la circonférence du cylindre. Il faut alors intégrer (2) sur le volume de la colonne d'eau et ajouter la force $\vec{F}_A = 2\pi RA\vec{u}_z$, ce qui donne (avec $p(h) = p_{\text{atm}}$ et $p(0) = p_{\text{atm}} + \rho gh_0$)

$$0 = \pi R^2 \left(-p(h) + p(h_0) - \rho gh \right) + 2\pi RA = \pi R^2 \left(\rho g(h_0 - h) + \frac{2A}{R} \right), \quad (3)$$

où $h = h_\infty$, et on retrouve (1).

Comme $h_0 \ll h_\infty$ on pourra négliger h_0 et on obtient en bonne approximation

$$h_\infty \simeq \frac{2A}{\rho g R}, \quad (4)$$

soit $h_\infty R = \frac{2A}{\rho g}$ est constant. On voit assez bien sur les figures que c'est bien le cas: on a (en mm) $(R, h_\infty) = (0.2, 7.2)$, $(0.3, 4.8)$, $(0.4, 3.6)$ et $(0.5, 2.8)$, soit pour les produits Rh_∞ : $14,4 \text{ mm}^2$ à chaque fois. Avec $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ on trouve $A \simeq 0.7 \text{ kg m}^{-1}$.

Approche de l'équilibre aux petits t : Au début, la force résultante est non-nulle et accélère l'eau vers le haut. A cause de son inertie elle va monter plus haut que la position d'équilibre, puis redescendre et osciller autour de la hauteur h_∞ . Ces oscillations sont amorties par les forces de viscosité. Ces dernières sont proportionnelles à la surface de contact avec le verre ($\sim R$), alors que l'inertie est proportionnelle au volume ($\sim R^2$). Les oscillations seront donc plus amorties pour des petites valeurs de R , ce qui est effectivement ce qu'on observe.

Essayons d'être plus quantitatif. Lorsque l'eau monte dans le tube, on pourrait essayer de décrire le champ des vitesses dans le tube. A cause de la viscosité la vitesse sera plus grande au centre et diminue vers le bord, ce qui impliquera que l'eau qui monte plus vite au milieu, une fois arrivée en surface, s'étale sur toute la section du tube. Mais "loin" de la surface on a $\vec{v} = v(t, r)\vec{u}_z$ avec $v(t, r)$ indépendant de z à cause de l'incompressibilité qui donne $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, donc $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$. Le flux à travers une section πR^2 est donc $2\pi \int_0^R dr r v(r, t)$ ce qui sera égal à $\pi R^2 \dot{h}(t)$:

$$\dot{h}(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R dr r v(r, t) . \quad (5)$$

Evidemment, pour v indépendant de r on trouve simplement $\dot{h} = v$.

Si on ne tient pas compte des forces de tension de surface, l'équation de Navier-Stokes projetée sur \vec{u}_z est

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v . \quad (6)$$

Comme avant, les forces de tension de surface ne sont pas localisables et le plus simple est d'intégrer l'équation (6) sur tout le volume de l'eau dans le tube et d'y ajouter la force due à la tension de surface qui est $2\pi R A$ selon \vec{u}_z . On utilisant aussi (5) on obtient:

$$\rho \pi h R^2 \ddot{h} = -\pi h R^2 \rho g - \pi R^2 (p(h) - p(0)) + \eta 2\pi h \int_0^R dr r \Delta v + 2\pi R A . \quad (7)$$

En utilisant comme avant $p(h) - p(h_0) = -\rho g h_0$ et en simplifiant par πR^2 on a

$$\rho h \ddot{h} = g\rho(h_0 - h) + \frac{2A}{R} + \eta \frac{2h}{R^2} \int_0^R dr r \Delta v . \quad (8)$$

Pour $v = \dot{h} = 0$ on retrouve évidemment (3) et (1). Le Laplacien en coordonnées polaires est

$\Delta v(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial v}{\partial r})$ et donc

$$\int_0^R dr r \Delta v = \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_0^R = R \frac{\partial v}{\partial r}(R) . \quad (9)$$

(C'est normal que l'intégrale du Laplacien sur le volume donne un terme de bord: c'est le théorème de Gauss qui relie $\int d^3x \Delta v$ au flux de $\frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_r$ à travers le cylindre.) On a donc

$$\rho h \ddot{h} = g\rho(h_0 - h) + \frac{2A}{R} + \eta \frac{2h}{R} \frac{\partial v}{\partial r}(R) . \quad (10)$$

Que vaut $\frac{\partial v}{\partial r}(R)$? Avec un flux régulier dans un tube on aurait un profil des vitesses $v(r) = v(0)(1 - \frac{r^2}{R^2})$ et donc $\frac{\partial v}{\partial r}(R) = -\frac{2v(0)}{R}$. On relie $v(0)$ à \dot{h} en évaluant (5) pour ce profil de vitesses et on obtient $\dot{h} = \frac{v(0)}{2}$. Donc $\frac{\partial v}{\partial r}(R) = -\frac{4\dot{h}}{R}$. En insérant cette valeur dans (10) on a finalement l'équation différentielle pour h :

$$\rho h \ddot{h} = g\rho(h_0 - h) + \frac{2A}{R} - \eta \frac{8h\dot{h}}{R^2} . \quad (11)$$

On voit déjà l'essentiel: plus R est petit, plus le terme de viscosité est important, en accord avec notre discussion qualitative ci-dessus et en accord avec les figures. Cette équation différentielle est non-linéaire, mais à l'approche de la solution d'équilibre on peut la linéariser en posant $h(t) = h_\infty + \epsilon(t)$, où h_∞ est solution de (1). On obtient:

$$\ddot{\epsilon} + \frac{2}{\tau} \dot{\epsilon} + \omega^2 \epsilon = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{g}{h_\infty} \quad , \quad \tau = \frac{\rho R^2}{4\eta} . \quad (12)$$

On a bien un oscillateur amorti avec fréquence ω et temps d'amortissement τ . Sur la figure pour $R = 0.5$ mm on estime $7T \simeq 2$ s, soit $\omega \simeq 20$ s⁻¹ (alors que $\omega^2 = \frac{g}{h_\infty}$ donne $\omega \simeq 55$ s⁻¹ – où est l'erreur ???) et $\tau \simeq 0.8$ s pour $R = 0.5$ mm, ce qui donne une estimation de la viscosité de l'eau à $\eta \simeq 0.3 \times 10^{-3}$ N sm⁻², alors que η à température ambiante vaut 10^{-3} N sm⁻², soit encore une erreur par un facteur 3.

Exercice 58 : transfert thermique cercle

On considère un solide en forme de tore, c'est à dire en forme de bouée et dont les sections ont une aire S . On suppose que le rayon des sections de ce tore est négligeable devant le rayon

principal du tore et on décrira ce solide par un cercle de rayon R . La capacité thermique est notée c , la conductivité thermique est notée λ et la masse volumique ρ .

1) Etablir l'équation du transfert de la chaleur en fonction de θ en coordonnées polaires.

2) Vérifier que $T(\theta, t) = \frac{T_0 \ell}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-R^2 \theta^2 / (4Dt)}$ avec $D = \lambda / \rho c$ est solution de cette équation. Pourquoi ne peut-on pas l'utiliser ?

3) On cherche une solution sous la forme $T(\theta, t) = g(t)f(\theta)$. Déterminer les fonctions f et g .

4) Initialement une moitié de cercle est à la température T_0 tandis que l'autre moitié est à température nulle. Trouver une solution pour l'évolution de la température. Quelle est son évolution asymptotique au temps longs ?

5) On part d'une température nulle dans tout le tore, et on injecte une quantité d'énergie Q en un point donné. Quelle est l'évolution de la température et son profil asymptotique ?

La fonction $f_a(\theta)$ définie sur $[-\pi, \pi]$ et ayant pour valeur π/a sur $-a/2 \leq \theta \leq a/2$ et 0 ailleurs est égale à la série

$$f_a(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an/2)}{an/2} \cos(n\theta) \quad (1)$$

Eléments de solution

1) On peut faire une mise en équation par bilan. Il faut juste voir que si on prend une coordonnée s sur le cercle $\partial_s = 1/R \partial_\theta$. Ou alors on connaît le gradient et la divergence en polaire en voyant que l'hypothèse de sections très petites implique un gradient de température orthoradial. On trouve

$$\rho c \partial_t T = \lambda \partial_{ss} T = \frac{\lambda}{R^2} \partial_{\theta\theta} T. \quad (2)$$

On introduit un coefficient de diffusion $D = \lambda / \rho c$.

2) On vérifie sans problème que c'est solution de l'équation en dérivant. Mais cela n'est pas

compatible avec la topologie du problème. Pourtant on a bien $T(-\pi, t) = T(\pi, t)$! Mais c'est au niveau des flux que ça va pas. Il ne sont pas continus en $-\pi$ et en π vu qu'ils s'éloignent tout deux de la valeur $\theta = 0$.

3) Il faut donc passer à autre chose. On passe par une méthode de séparation des variables. Si on cherche $T(\theta, t) = f(\theta)g(t)$, alors

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{D}{R^2} \frac{f''(\theta)}{f(\theta)}. \quad (3)$$

Ces combinaisons doivent être des constantes. On a donc

$$\frac{f''(\theta)}{f(\theta)} = \text{Cte}. \quad (4)$$

Les solutions sont des cos et sin (on élimine les cosh et sinh) mais les conditions périodiques imposent $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. On a alors

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{n^2 D}{R^2} \quad (5)$$

donc

$$g(t) \propto e^{-n^2 D t / R^2}. \quad (6)$$

On trouve donc les solutions de type

$$e^{-n^2 D t / R^2} \cos(n\theta) \quad e^{-n^2 D t / R^2} \sin(n\theta) \quad (7)$$

4) Par superposition une somme de telles solutions est une solution. La condition initiale suggérée est la fonction de l'aide évaluée en $a = \pi$ et multipliée par T_0 et c'est donc

$$T(\theta, 0) = \frac{T_0}{2} + T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \cos(n\theta) \quad (8)$$

$$= \frac{T_0}{2} + \frac{2T_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} \cos[(2p+1)\theta] \quad (9)$$

et la solution générale à tous temps est

$$T(\theta, t) = \frac{T_0}{2} + \frac{2T_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} \cos[(2p+1)\theta] e^{-(2p+1)^2 D t / R^2}. \quad (10)$$

C'est le terme $p = 1$ qui a la décroissance la moins rapide. C'est logique car ce mode a les gradients les plus petits (et les distances entre les points hauts et bas sont les plus grands).

5) On peut refaire le raisonnement précédent mais $a < \pi$ c'est à dire avec une zone chaude plus petite que la zone froide initiale. La fonction donnée dans l'aide à la même intégrale même si on varie a . Quand on avait $a = \pi$ on avait injecté $Q = R\pi\rho cST_0$. Si on injecte cette même énergie sur une longueur Ra au lieu de $R\pi$ on a la condition initiale

$$T(\theta, 0) = \frac{T_0}{2} + T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an/2)}{an/2} \cos(n\theta) \quad (11)$$

avec

$$T_0 = \frac{Q}{R\pi\rho cS}. \quad (12)$$

Dans la limite d'une injection d'énergie en un seul point du cercle $a \rightarrow 1$ (et on utilise $\text{sinc}(a) \rightarrow 1$) alors la solution générale est (en rajoutant les facteurs d'évolution temporelle)

$$T(\theta, 0) = \frac{T_0}{2} + T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta) e^{-n^2Dt/R^2} \quad (13)$$

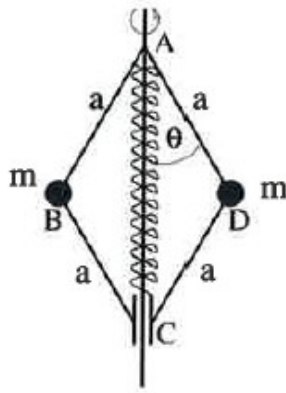
Pareil c'est le mode le plus bas $n = 1$ qui guide la forme asymptotique. Pour $\sqrt{Dt} > R$, donc quand la longueur de diffusion a dépassé le rayon du cercle, alors on entre dans ce régime asymptotique.

Exercice 59 : système mécanique tournant

On considère le montage suivant: un losange $ABCD$ peut tourner autour d'un axe vertical (z) tel que le point A est fixé sur l'axe et le point C peut se déplacer le long de l'axe. Deux masses m sont situées en B et D et un ressort de raideur k et de longueur au repos nulle relie les points A et C . Voir figure.

Les tiges et le ressort sont de masse négligeable. De plus, on suppose que le système tourne très vite autour de (z).

Déterminer les positions (trajectoire) d'équilibre du montage et les petits mouvements autour de ces positions (s'ils sont possibles).



Indication: on pourra utiliser comme système [le losange (tiges et masses)].

Eléments de solution

On prend comme système le losange (tiges et masses) (énoncé). Les forces extérieures qui s'exercent sur lui sont: les poids de chaque masse m et la force de rappel du ressort. On peut remarquer que le moment suivant (z) de chacune de ces forces est nul. Donc, le moment cinétique suivant (z) pour le système (losange) est conservé, de même que son énergie mécanique. On obtient facilement:

$$L_z = 2ma^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = cte = L.$$

Avec $\dot{\phi}$ la vitesse angulaire de rotation autour de (z). Puis:

$$E = ma^2[\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2] + 2mga(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}k[2a \cos \theta]^2 = cte.$$

Le premier terme est le terme d'énergie cinétique et les 2 derniers représentent l'énergie potentielle. Il faut faire attention ici car ce qui compte pour l'équilibre, c'est l'énergie potentielle effective (comme dans le cas des systèmes gravitationnels), c'est pourquoi on va procéder comme suit.

On doit déjà trouver une équation pour la variable θ seule. On remplace $\dot{\phi}$ dans la conservation de l'énergie par sa valeur tirée de la conservation de L_z et on dérive par rapport au temps.

On obtient une équation différentielle (équation du mouvement) pour θ de la forme:

$$\ddot{\theta} + F(\theta) = 0.$$

On cherche alors les positions (trajectoire) d'équilibre. On obtient ces positions avec la condition: $\ddot{\theta} = 0$ à l'équilibre, soit $F(\theta = \theta_{equil}) = 0$. Par ailleurs, on suppose (énoncé) que le système tourne très vite, donc la position d'équilibre doit être proche de $\theta = \pi/2$. On cherche donc une valeur de θ telle que $\theta = \pi/2 - \gamma$ avec γ petit, telle que: $F(\theta) = 0$.

Après calculs simples, on trouve:

$$\gamma_{equil} = \frac{2mga}{L^2/(2ma^2) + 4ka^2}.$$

Comme le système tourne vite, $L^2/(ma^2) \gg ka^2$ et on a bien $\gamma_{equil} \ll 1$ et:

$$\theta_{equil} = \pi/2 - \frac{2mga}{L^2/(2ma^2) + 4ka^2}.$$

Cela veut dire que la trajectoire: $\theta = \theta_{equil}$ donne l'équilibre du système tournant (vite).

On cherche alors les petites variations $\delta\theta$ (telles que $\theta = \theta_{equil} - \gamma_{equil} - \delta\theta$) autour de l'équilibre, on obtient:

$$\delta\ddot{\theta} + \frac{L^2/(2ma^2) + 4ka^2}{2ma^2} \delta\theta = 0.$$

Donc, des petits mouvements sont possibles avec: $\omega^2 = \frac{L^2/(2ma^2) + 4ka^2}{2ma^2} > 0$. Cet équilibre est donc stable.

Exercice 60 : cavité optique et lasers

Une cavité Fabry-Pérot est constituée de deux miroirs de coefficient de réflexion élevé, séparés par une distance L .

1) A quelle condition une onde électromagnétique peut-elle se propager dans la cavité ? On dit alors que l'onde est résonante avec la cavité. Dans un premier temps on suppose qu'on a fait le vide dans la cavité.

2) On souhaite maintenir un laser de fréquence fixe f_1 à résonance avec la cavité. Pour réaliser cet objectif, de combien est-il nécessaire de pouvoir faire varier la longueur de la cavité ?

3) Une fois l'objectif du 2) atteint, expliquer comment procéder pour réaliser un asservissement en fréquence d'un laser de fréquence f_2 , en utilisant un modulateur qui permet de décaler la fréquence d'un laser d'une largeur Δf .

Eléments de solution

1) Il faut que sur un aller-retour dans la cavité l'onde soit déphasée d'un multiple de 2π pour qu'il y ait interférence constructive entre les différentes ondes ayant subies des réflexions sur les miroirs.

2) La condition de la question 1) donne immédiatement: $f = mc/(2L)$. Il faut avoir une résonance, et donc pouvoir balayer la longueur de la cavité d'au moins $\lambda/2$ qui est la longueur séparant deux résonances successives.

3) C'est la question difficile de l'exercice. Les deux longueurs d'onde étant différentes, une résonance pour un laser ne correspond pas à une résonance pour l'autre. Si la condition du 2) est atteinte, la cavité a une longueur fixe, donc en maintenant un autre laser à résonance avec la cavité on s'assure que sa fréquence est fixe. Pour faire cela, la solution c'est de prélever une partie du laser 2, et de décaler ce faisceau prélevé avec le modulateur, avec $\Delta f > c/(2L)$ pour assurer qu'on puisse trouver une résonance.

Pour aller plus loin avec ce type de montage, on peut par exemple considérer que l'on a de l'air à une certaine pression dans la cavité. Avec les deux lasers de longueur d'onde λ_1 et λ_2 dans la cavité et les objectifs des questions 2) et 3) réalisés. On suppose ensuite qu'il y a une remontée en pression et on peut se demander de combien doit changer Δf (question 3)). C'est un problème un peu plus compliqué que précédemment mais qui se traite avec les mêmes principes.