

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2010

FILIÈRE PC

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est interdite** pour cette épreuve.
Pour les applications numériques, on se contentera d'un seul chiffre significatif.

La chaleur des planètes

Ce problème étudie quelques aspects de la formation des planètes et de leur refroidissement.

I. Genèse des planètes telluriques

Les planètes telluriques telles que Mars ou la Terre se sont formées par la condensation de nuages de poussières sous l'effet de l'interaction gravitationnelle, au cours d'un processus dit d'*accrétion*.

I.1. Accrétion de petits corps par une planète en formation

I.1.1. Une planète supposée ponctuelle et de masse M est immobile dans le vide à l'origine O d'un référentiel galiléen. Un point matériel de masse m arrive de l'infini avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , de norme v_0 . On définit $b = \|\vec{L}\|/mv_0$, où \vec{L} est le moment cinétique en O de la masse m . Donner l'interprétation géométrique de b à l'aide d'un schéma.

I.1.2. Les deux masses interagissent sous l'effet de la gravitation. On note G la constante newtonienne de gravitation. On suppose $m \ll M$, de telle sorte que la masse M reste pratiquement immobile. Quelle est la nature de la trajectoire de la masse m ? On note r_{\min} sa distance minimale d'approche à l'origine. Exprimer b en fonction de r_{\min} , v_0 , G et M .

I.1.3. On considère maintenant le cas où la planète de masse M n'est plus ponctuelle mais est assimilée à une sphère homogène de rayon R . Exprimer la vitesse de libération v_l en fonction de G , M et R . Montrer que la masse m arrivant de l'infini heurte la planète si

$$b^2 < R^2 \left(\frac{v_l^2}{v_0^2} + 1 \right).$$

I.1.4. On suppose que l'univers entourant la planète est constitué, à grande distance de celle-ci, d'un grand nombre de points matériels de masse m , répartis aléatoirement et ayant tous la même vitesse \vec{v}_0 . On note n la densité volumique de points matériels (nombre par unité de volume). Exprimer le nombre moyen de points matériels heurtant la surface de la planète par unité de temps en fonction de n , v_0 , R , G et M .

I.1.5. On suppose que les points matériels heurtant la planète s'y écrasent, augmentant ainsi sa masse M . On suppose également que la planète reste sphérique, de masse volumique ρ constante, de telle sorte que son rayon R augmente. Donner l'expression de la vitesse d'accrétion dR/dt en fonction de n , v_0 , G , ρ , m et R . Analyser l'évolution de R pour $v_0 \gg v_l$ puis $v_0 \ll v_l$. Expliquer pourquoi on parle, pour ce processus, de focalisation gravitationnelle ainsi que d'accrétion galopante.

I.1.6. On considère maintenant deux planètes immobiles de masses M_1 et M_2 , à grande distance l'une de l'autre, de même masse volumique ρ et subissant toutes deux le processus d'accrétion décrit ci-dessus. On suppose $M_1 > M_2$ initialement. Montrer que dans le cas de l'accrétion galopante, le rapport M_1/M_2 augmente au cours du temps. Commenter.

I.2. Chauffage par collision

I.2.1. L'hémisphère nord de Mars présente une vaste dépression, qui pourrait résulter d'une collision avec un gros astéroïde. Calculer l'élévation globale moyenne de température résultant de la collision avec un astéroïde de rayon $r = 1000$ km et de masse volumique $\rho = 3 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, arrivant de l'infini avec une vitesse initiale que l'on prendra nulle. La vitesse de libération de Mars est $v_l = 5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, sa masse $M = 6 \times 10^{23} \text{ kg}$. On supposera que la capacité thermique massique de Mars est constante, $C \simeq 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, et que toute l'énergie cinétique de l'astéroïde est absorbée par Mars lors de la collision.

I.2.2. Expliquer pourquoi l'accrétion étudiée dans la partie I.1 s'accompagne nécessairement d'une élévation de température importante. Quel mode de transfert thermique permet d'évacuer une partie de l'énergie interne ?

I.3. Différenciation planétaire

La Terre est constituée pour deux tiers de sa masse de matériaux légers tels que les silicates, de masse volumique ρ_1 , et pour le tiers restant de matériaux lourds tels que le fer, de masse volumique ρ_2 . On prendra pour les applications numériques les valeurs approchées $\rho_1 = 4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\rho_2 = 9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La température initiale de la Terre est élevée, et son intérieur est partiellement fondu.

I.3.1. On assimile pour le moment la Terre à une sphère homogène de rayon R et de masse volumique moyenne $1/\rho_m = (2/\rho_1 + 1/\rho_2)/3$. Exprimer l'intensité $g(r)$ du champ de gravitation à une distance $r \leq R$ du centre de la Terre en fonction de r , R et de sa valeur à la surface $g_0 = g(R)$.

I.3.2. On considère une petite bille de fer de volume V et de masse volumique ρ_2 à la distance r du centre de la Terre. La bille est immergée dans le liquide de masse volumique ρ_m . Calculer la résultante des forces s'exerçant sur la bille. En déduire la variation

d'énergie potentielle du système lorsqu'elle tombe depuis la surface jusqu'au centre de la Terre. La calculer numériquement pour une mole de fer de masse $M_{\text{Fe}} \simeq 60 \text{ g}$. On donne $R = 6000 \text{ km}$, $g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Comparer la variation d'énergie potentielle à l'ordre de grandeur caractéristique d'une enthalpie de réaction chimique.

I.3.3. Les matériaux les plus denses ont tendance à s'enfoncer vers le centre alors que les matériaux moins denses migrent vers la surface. Ce processus conduit à la différenciation du globe terrestre en un *manteau* externe, constitué des espèces les plus légères et recouvert d'une fine *écorce*, et un *noyau* interne, constitué des espèces plus lourdes. Calculer le rayon du noyau. Que peut-on dire, qualitativement, de la distribution de température dans le noyau à l'issue du processus de différenciation planétaire ?

II. Refroidissement par conduction

On suppose dans cette partie que le manteau terrestre est indéformable. Le seul mécanisme par lequel il peut évacuer son énergie interne est donc la diffusion thermique. On suppose pour simplifier que le manteau est homogène et que sa température au temps initial $t = 0$ est uniforme, de valeur $T_c = 4000 \text{ K}$ (valeur actuelle de la température à la limite entre le manteau et le noyau). On suppose également qu'un mécanisme externe maintient la température de surface T_s constante pour $t > 0$, avec $T_s \ll T_c$. On admet enfin (ce qu'on justifiera par la suite) que la courbure de la planète est négligeable. Sa surface est par conséquent assimilée au plan d'équation $z = 0$, où z est la profondeur comptée positivement à partir de la surface.

II.1. On suppose que la température T ne dépend que de la profondeur z et du temps t . Écrire l'équation aux dérivées partielles régissant l'évolution de la température $T(z, t)$ pour $z > 0$ et $t > 0$. Cette équation fait apparaître un coefficient κ , dit coefficient de diffusivité thermique, dont on donne la valeur numérique $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

II.2. On cherche une solution de cette équation de la forme $T(z, t) = f(\xi)$, où $\xi = z/(2\sqrt{\kappa t})$. Écrire l'équation différentielle que doit vérifier f . Vérifier que la solution générale de cette équation est

$$f(\xi) = A \int_0^\xi \exp(-s^2) ds + B,$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

II.3. On donne l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-s^2) ds = \sqrt{\pi}/2$. Déterminer les expressions de A et B en fonction de T_c et T_s .

II.4. Donner l'expression du gradient de température en $z = 0$, dit *gradient géothermique*, à l'instant t .

II.5. Les mesures actuelles de la température dans le sous-sol donnent un gradient géothermique de $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$. En déduire que l'approximation qui consiste à négliger la courbure de la Terre est justifiée. Estimer numériquement l'âge de la Terre, en années, suivant ce modèle. Une année vaut approximativement $3 \times 10^7 \text{ s}$. Le résultat obtenu vous paraît-il satisfaisant ?

III. Refroidissement par convection

Le modèle de la partie précédente est incomplet pour deux raisons. D'une part, le manteau terrestre se comporte comme un fluide très visqueux, qui peut évacuer la chaleur par convection. D'autre part, la radioactivité constitue une source importante d'énergie, qui ne peut être négligée.

Dans cette partie, on se propose de modéliser le phénomène de convection dans le manteau terrestre. On modélise celui-ci comme un fluide contenu entre les plans $z = 0$ et $z = a$. Comme dans la partie précédente, z désigne la profondeur comptée à partir de la surface. Le champ de vitesses eulérien du fluide $\vec{v}(\vec{r}, t)$ satisfait l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v},$$

où D/Dt désigne la dérivée particulaire, ρ la masse volumique du fluide, supposée ne dépendre que de la température, P sa pression, \vec{g} le champ de gravitation, supposé constant et uniforme, ν la viscosité cinématique du fluide, et Δ l'opérateur laplacien.

On admet que l'équation d'évolution de la température $T(\vec{r}, t)$ dans le fluide est donnée par l'équation de la diffusion thermique, dans laquelle on remplace la dérivée $\partial T/\partial t$ par la dérivée particulaire DT/Dt . Comme dans la partie II, on note κ le coefficient de diffusivité thermique, supposé constant et uniforme.

III.1. Chauffage par le bas

On modélise dans un premier temps le chauffage du manteau terrestre par le noyau. On note T_s la température en $z = 0$ et T_c la température en $z = a$, supposées constantes, avec $T_c > T_s$.

III.1.1. Montrer que ces équations admettent une solution statique avec $\vec{v} = \vec{0}$. On notera $P_0(z)$, $\rho_0(z)$ et $T_0(z)$ les valeurs de P , ρ et T pour cette solution. Déterminer $T_0(z)$ et dessiner le profil de température.

III.1.2. Pour déterminer si la solution statique est stable, on étudie l'évolution au cours du temps d'une petite perturbation. On pose $P(\vec{r}, t) = P_0(z) + P_1(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(z) + \rho_1(\vec{r}, t)$, $T(\vec{r}, t) = T_0(z) + T_1(\vec{r}, t)$, et on traite P_1 , ρ_1 , T_1 et la vitesse du fluide \vec{v} comme des perturbations du premier ordre. On suppose que la masse volumique ρ ne dépend que de la température, et on note $\alpha = -(1/\rho)(d\rho/dT)$ le coefficient de dilatation thermique, supposé indépendant de T dans la gamme de température considérée. Linéariser l'équation de Navier-Stokes et l'équation de la diffusion thermique. Vérifier qu'elles se mettent sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0(z)} \overrightarrow{\text{grad}}P_1 - \alpha \vec{g} T_1 + \nu \Delta \vec{v} \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} &= -\beta v_z + \kappa \Delta T_1, \end{aligned}$$

où β est une constante dont on donnera l'expression. Expliquer quels sont, dans le membre de droite de ces équations, les termes qui favorisent la convection et ceux qui s'y opposent.

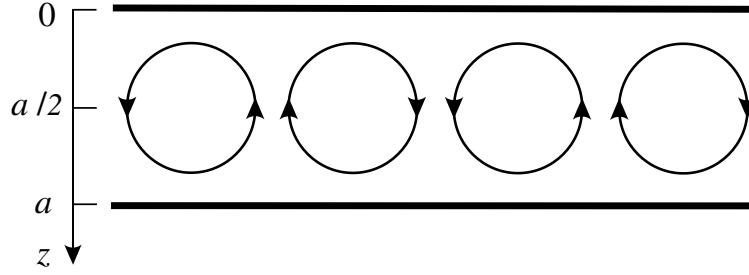


Figure 1. Cellules de convection.

III.1.3. La résolution complète de ces équations linéarisées, auxquelles il faudrait ajouter la conservation de la masse, est complexe et montre que des rouleaux de convection, représentés sur la figure 1, peuvent apparaître sous certaines conditions. Nous allons nous contenter d'une solution simplifiée qui est correcte au milieu du manteau, au voisinage de $z = a/2$. On admet que le champ de vitesses y est principalement vertical, $v_x = v_y = 0$, et on cherche une solution ne dépendant que de x et t de la forme, en notation complexe

$$\begin{aligned} v_z(x, t) &= \operatorname{Re} [A \exp(\lambda t + ikx)] \\ T_1(x, t) &= \operatorname{Re} [B \exp(\lambda t + ikx)] \\ P_1(x, t) &= \operatorname{Re} [C \exp(\lambda t + ikx)], \end{aligned}$$

où A , B et C sont des amplitudes complexes, et λ et k sont réels. En insérant les trois relations ci-dessus dans les équations obtenues à la question **III.1.2**, obtenir la relation entre λ et k pour que le système ait des solutions non nulles.

III.1.4. On cherche la condition sous laquelle peuvent apparaître des rouleaux de convection cylindriques (voir figure 1), qui correspondent à la valeur $k = \pi/a$. Montrer que pour cette valeur de k , la solution statique est instable si le nombre de Rayleigh, défini par $Ra = \alpha\beta ga^4/\nu\kappa$, est supérieur à un seuil qu'on précisera.

III.1.5. On donne les valeurs numériques $a = 3000$ km, $T_c - T_s = 2000$ K, $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ K $^{-1}$, $g = 10$ m \cdot s $^{-2}$, $\kappa = 10^{-6}$ m 2 \cdot s $^{-1}$, $\nu = 10^{17}$ m 2 \cdot s $^{-1}$. Comparer la valeur de ν à son ordre de grandeur pour un liquide ordinaire. Calculer le nombre de Rayleigh et montrer que la convection dans le manteau est possible. Quelle caractéristique de ce système compense sa grande viscosité ?

III.2. Chauffage interne

On étudie maintenant le chauffage du manteau terrestre par la radioactivité interne. On note H la puissance par unité de masse dégagée par les désintégrations radioactives dans le manteau terrestre, supposée constante et uniforme. On néglige le chauffage par le noyau, et on considère par conséquent qu'il n'y a pas de transfert thermique à travers le plan $z = a$. Comme précédemment, on note T_s la température en $z = 0$, supposée constante.

III.2.1. Comment est modifiée l'équation de la diffusion thermique en présence de la source de chaleur ? On notera C la capacité thermique massique, supposée constante. Déterminer la solution statique $T_0(z)$ de cette équation en tenant compte des nouvelles conditions aux limites. Dessiner le profil de température.

III.2.2. Comme dans la partie **III.1.**, on étudie l'évolution d'une petite perturbation autour de cette solution statique. Montrer que les équations obtenues à la question **III.1.2.** sont toujours valables, à ceci près que β est une fonction de z . Exprimer la valeur de β au milieu du manteau ($z = a/2$) en fonction de H , C , κ et a .

III.2.3. Calculer numériquement le nombre de Rayleigh associé au chauffage interne. On donne $H = 8 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $C = 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Le chauffage interne suffit-il à produire de la convection ?

III.2.4. La réaction radioactive la plus importante est la désintégration β du noyau ^{40}K , qui a une demi-vie d'environ 10^9 années. Que peut-on en conclure sur l'importance de la convection au début de l'histoire du globe terrestre ?

III.3. Épilogue

III.3.1. Des deux mécanismes de chauffage étudiés, lequel vous semble le plus important ?

III.3.2. La convection dans le manteau transporte l'énergie thermique depuis le noyau vers les couches supérieures du manteau, à des profondeurs d'environ 30 km, où la température est voisine de 1000 K. La convection conduit-elle à un gradient géothermique plus grand ou plus petit que la conduction thermique seule, étudiée dans la partie **II** ?

* *
*