Corrigé Maths EDHEC 2012 ECS

Exercice n°1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$.

1. (a) $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $A^3 = 2A$ et donc $X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur de A, donc est un polynôme annulateur de f.

   (b) Si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine du polynôme $X^3 - 2X$. On en déduit que les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 2.
   La matrice A est clairement de rang 2 (les deux dernières colonnes sont colinéaires et les deux premières ne le sont pas), donc A n'est pas inversible et 0 est une valeur propre de A (donc de f).
   $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est clairement de rang 2 (les deux premières colonnes sont colinéaires et les deux dernières ne le sont pas), donc $A - 2I_3$ n'est pas inversible, et 2 est donc valeur propre de f.

   On a finalement obtenu que les valeurs propres de f sont 0 et 2.

   (c) D'après les résultats précédents sur les rangs des matrices A et $A - 2I_3$, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 2 sont tous deux de dimension 2 (théorème du rang), nous avons donc $dimKer(f) + dimKer(f - 2Id) \neq dim\mathbf{R}^3$ et f n'est pas diagonalisable.

2. D'après les matrices A et $A - 2I_3$, on a immédiatement :

$$f(e_2 + e_3) = 0 \text{ et } f(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$$

   Posons $u = e_2 + e_3$ et $w = e_1 + e_2$, nous aurons $f(u) = 0$ et $f(w) = 2w$. Il reste à trouver un vecteur $v = ae_1 + be_2 + ce_3$ tel que $f(v) = u$ avec (u, v, w) libre pour que (u, v, w) soit une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f sera $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$f(v) = u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a + 3b - 3c = 1 \\ -2a + 2b - 2c = 1 \end{cases}$$

$$f(v) = u \Leftrightarrow \begin{cases} a = c - b \\ 4(b - c) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} + c \end{cases}$$

Choisissons $v = \dfrac{1}{4}(e_2 - e_1)$, on a alors $f(v) = u$, $f(u) = 0$ et $f(w) = 2w$.
De plus la famille (u, v, w) est libre :

$$au + bv + cw = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \frac{b}{4} = 0 \\ a + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

On en déduit que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. (a) On sait que $u \in Ker(f)$ et $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.
$f(v) = u$ donc $f^2(v) = f(u) = 0$. On a donc deux vecteurs u et v de $Ker(f^2)$.
$w \in Ker(f - 2id)$.
Il est clair que $Ker(f^2)$ et $Ker(f - 2Id)$ sont en somme directe, et (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$, donc

$$\mathbf{R}^3 = Vect(u, v) \oplus Vect(w) \subset Ker(f^2) \oplus Ker(f - 2Id) \subset \mathbf{R}^3$$

Finalement

$$\mathbf{R}^3 = Ker(f^2) \oplus Ker(f - 2Id)$$

(b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ tel que $g^2 = f$.
Pour cela on suppose qu'un tel endomorphisme existe.
Soit $x \in Ker(f^2)$, on aura $f^2(g(x)) = g^4(g(x)) = gog^4(x) = g(f^2(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) \in Ker(f^2)$. On a bien $Ker(f^2)$ stable par g.
Puisque u et v sont dans $Ker(f^2)$, il en est de même de $g(u)$ et $g(v)$. Dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ la matrice de g est donc de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

Puisque $g^2 = f$, on doit avoir avec leur matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$G^2 = T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a'b & a'a + b'b & aa'' + a'b'' + a''c'' \\ ab + bb' & a'b + b'^2 & ba'' + b'b'' + b''c'' \\ 0 & 0 & c''^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui entraine notamment : $b(a+b') = 0$ et $a^2 + a'b = 0$ et $a'(a+b') = 1$ et $a'b + b'^2 = 0$.
Les équations 1 et 3 entrainent $b = 0$, puis $a^2 = b'^2 = 0$ mais alors l'équation 3 n'est plus vérifiée. Il y a contradiction.
Il n'existe donc pas d'endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ tel que $g^2 = f$.

4. Etude d'un cas plus général. On note Id l'endomoprhisme identité de $\mathbf{R}^n$ et on désigne par α un réel non nul.

(a) On considère un endomorphisme h de $\mathbf{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Effectuons une démonstration par analyse-synthèse : Soit $x \in \mathbf{R}^3$
Supposons qu'il existe $(y,z) \in Ker(h-\alpha Id) \times Ker(h^{n-1})$ tel que $x = y+z$, alors

$$h^{n-1}(x) = h^{n-1}(y) + 0 = \alpha^{n-1}y$$

et donc y est unique donné par $y = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$. z est alors aussi unique donné par $z = x - y = x - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$.
Considérons maintenant $y = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$ et $z = x - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x) = x - y$.
D'après l'égalité $h^n = \alpha h^{n-1}$, on a : $h(y) = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^n(x) = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}.\alpha.h^{n-1}(x) = \alpha y$ et donc $y \in Ker(h-\alpha Id)$.
$z = x - y$ alors $h^{n-1}(z) = h^{n-1}(x) - h^{n-1}(y)$, mais $h(y) = \alpha y$ alors $h^{n-1}(y) = \alpha^{n-1}y$ et puisque $y = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$, on a finalement $h^{n-1}(z) = h^{n-1}(x) - h^{n-1}(x) = 0$, et donc $z \in Ker(h^{n-1})$.
On a finalement montré que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \exists!(y,z) \in Ker(h-\alpha Id) \times Ker(h^{n-1}) \quad , x = y+z$$

Ce qui signifie que : $\mathbf{R}^n = Ker(h-\alpha Id) \oplus Ker(h^{n-1})$.

(b) Réciproquement, on suppose que h est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui vérifie : $\mathbf{R}^n = Ker(h-\alpha Id) \oplus Ker(h^{n-1})$.
Soit $x \in \mathbf{R}^n$, il existe $(y,z) \in\in Ker(h-\alpha Id) \times Ker(h^{n-1})$ tel que $x = y+z$, alors $h^{n-1}(x) = h^{n-1}(y) + 0$ et $h(y) = \alpha y$ donc $h^{n-1}(y) = \alpha^{n-1}.y$ et finalement

$$h^n(x) = hoh^{n-1}(x) = h\left(\alpha^{n-1}.y\right) = \alpha^{n-1}h(y) = \alpha^n y = \alpha\left(\alpha^{n-1}y\right) = \alpha h^{n-1}(x)$$

Ce qui donne : $\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad h^n(x) = \alpha h^{n-1}(x)$, donc $h^n = \alpha.h^{n-1}$.

Exercice n°2

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. (a) Soit x un réel strictement positif. Notons $Y = -xX_0$; on peut considérer que $X_0(\Omega) \subset [0, +\infty[$ alors $Y(\Omega) \subset]-\infty, 0]$ et

$$\forall y \in \mathbf{R}_+^*, \quad [Y \leqslant y] = \oslash$$

$$\forall y \in]-\infty, 0], \quad [Y \leqslant y] = [X_0 \geqslant -\frac{y}{x}] \in \mathcal{A}$$

On en déduit que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qu'en notant F_Y sa fonction de répartition et F celle de X_0, on a :

$$\forall y \in \mathbf{R}_+^*, \quad F_Y(y) = 0$$

$$\forall y \in]-\infty, 0], \quad F_Y(y) = 1 - F\left(-\frac{y}{x}\right) = 1 - \left(1 - e^{\lambda\frac{y}{x}}\right) = e^{\lambda\frac{y}{x}}$$

On en déduit que $-xX_0$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction :

$$f : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x} e^{\lambda \frac{y}{x}} \text{ si } y \leqslant 0 \\ \\ 0 \qquad \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Le programme officiel stipule que les étudiants doivent savoir retrouver une densité de $aX + b$ avec $a \neq 0$ et X variable aléatoire à densité, il ne me semble donc pas possible d'utiliser directement la formule $x \mapsto \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ est une densité de $aX + B$ lorsque f est une densité de X.

(b) Notons $Z = X_1 - xX_0 = X_1 + Y$ avec $Y = -xX_0$. Les variables aléatoires X_1 et X_0 sont indépendantes, il en est donc de même de X_1 et Y. Une densité f_1 de X_1 est bornée (loi exponentielle) et X_1 et Y sont indépendantes alors on sait q'une densité de Z est le produit de convolution $h = f_1 * f$ (il y a convergence de l'intégrale définissant h) avec f une densité de Y.

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f(z-t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} f(z-t) \mathrm{d}t$$

On pose $u = z - t = \varphi(t)$ avec φ de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$, qui réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, z]$, et puisqu'il y a convergence de l'intégrale précédente, par changement de variable on a :

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad h(z) = \int_{-\infty}^{z} \lambda e^{-\lambda(z-u)} f(u) \mathrm{d}u$$

On en déduit que :

$$\forall z < 0, \quad h(z) = \int_{-\infty}^{z} \lambda e^{-\lambda(z-u)} \frac{\lambda}{x} e^{\lambda \frac{u}{x}} \mathrm{d}u = \lambda e^{-\lambda z} \int_{-\infty}^{z} \frac{\lambda}{x} \exp\left(\lambda \frac{x+1}{x} u\right) \mathrm{d}u$$

$$\forall z < 0, \quad h(z) = \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} \lim_{a \to -\infty} \left[\exp\left(\lambda \frac{x+1}{x} u\right)\right]_a^z$$

$$\forall z < 0, \quad h(z) = \frac{\lambda}{x+1} e^{\lambda \frac{z}{x}}$$

Et aussi :

$$\forall z \geqslant 0, \quad h(z) = \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda(z-u)} \frac{\lambda}{x} e^{\lambda \frac{u}{x}} \mathrm{d}u$$

$$\forall z \geqslant 0, \quad h(z) = \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} \lim_{a \to -\infty} \left[\exp\left(\lambda \frac{x+1}{x} u\right)\right]_a^0$$

$$\forall z \geqslant 0, \quad h(z) = \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z}$$

Une densité de $Z = X_1 - xX_0$ est donc bien la fonction f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\lambda \frac{z}{x}} \text{ si } z < 0 \\ \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} \text{ si } z \geqslant 0 \end{cases}$$

Groupe Réussite

(c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$, on admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X_0 et X_1 suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on peut donc considérer que $X_0(\Omega) \subset]0, +\infty[$, de même pour $X_1(\Omega)$ et donc $T(\Omega) \subset]0, +\infty[$. En notant F_T sa fonction de répartition, on a :

$$\forall x \leqslant 0, \quad F_T(x) = 0$$

$$\forall x > 0, \quad F_T(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t \text{ avec } f \text{ densité trouvée à la question précédente}$$

$$\forall x > 0, \quad F_T(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x+1} \exp\left(\lambda \frac{t}{x}\right) \mathrm{d}t = \frac{x}{x+1} \lim_{a \to -\infty} \left[\exp(\lambda \frac{t}{x}\right]_a^0$$

$$\forall x > 0, \quad F_T(x) = \frac{x}{x+1}$$

La fonction de répartition de T est donc la fonction F_T définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$ où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $[X = n] = [\lfloor T \rfloor + 1 = n] = [n - 1 \leqslant T < n]$, et puisque T est une variable aléatoire à densité, on en déduit que

$$P(X = n) = P(n - 1 \leqslant T < n) = P(T < n) - P(T < n - 1) = F_T(n) - F_T(n - 1)$$

$$P(X = n) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = Sup(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) D'après le résultat de la question 1, une densité de $-X_0 = -xX_0$ avec $x = 1$ est la fonction f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} {}_l ame^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) Notons F la fonction de répartition de la variable aléatoire X_0 (loi exponentielle de paramètre λ). Par définition de Y_n, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left([X_1 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x]\right)$$

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_n(x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = (F(x))^n$$

avec $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geqslant 0$. On en déduit qu'une densité g_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x < 0, \quad g_n(x) = G_n'(x) = 0$$

$$\forall x > 0, \quad g_n(x) = G_n'(x) = nF'(x)\left(F(x)\right)^{n-1} = n\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1}$$

On peut poser $g_n(0) = 0$, g_n est alors de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

(c) Les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors les variables aléatoires Y_n et (X_0) le sont aussi. Une densité de $-X_0$ est bornée alors une densité h_n de $Y_n - X_0$ est donnée par le produit de convolution de g_n et de f_0, ce qui donne :

$$\forall x<0,\quad h_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)g_n(x-t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\lambda e^{\lambda t}g_n(x-t)\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u=x-t$ on obtient

$$\forall x<0,\quad h_n(x)=\int_{x}^{+\infty}\lambda e^{\lambda(x-u)}g_n(u)\mathrm{d}u=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{\lambda(x-u)}g_n(u)\mathrm{d}u=\lambda e^{\lambda x}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-\lambda u}g_n(u)\mathrm{d}u$$

On effectue une intégration par parties, puisque g_n est de classe C^1 sur $[0,a]$, $a>0$ ainsi que $u\mapsto e^{-\lambda u}$, on obtient alors :

$$\forall x<0,\quad h_n(x)=\lambda e^{\lambda x}\lim_{a\to+\infty}\left(\left[e^{-\lambda u}G_n(u)\right]_0^a-\int_0^a -\lambda e^{-\lambda u}G_n(u)\mathrm{d}u\right)$$

Or $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-\lambda a}G_n(a)=0$, donc

$$\forall x<0,\quad h_n(x)=\lim_{a\to+\infty}\lambda e^{\lambda x}\int_0^a\lambda e^{-\lambda u}(1-e^{-\lambda u})^n\mathrm{d}u=\lambda e^{\lambda x}\lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{n+1}(1-e^{-\lambda u})^{n+1}\right]_0^a$$

$$\forall x<0,\quad h_n(x)=\frac{\lambda}{n+1}e^{-\lambda x}$$

4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z=Inf\left\{k\in\mathbb{N}^*, X_k>X_0\right\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z=0$ si cet ensemble est vide.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, d'après la définition de Z, on a :

$$\omega\in[Z>n]\Leftrightarrow\forall k\in\{1,\dots,n\}\quad X_k(\omega)\leqslant X_0(\omega)\Leftrightarrow Y_n(\omega)\leqslant X_0(\omega)$$

$$\omega\in[Z=0]\Leftrightarrow\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad X_k(\omega)\leqslant X_0(\omega)$$

   On a donc $[Z=0]\subset[Z>n]$ et donc $[Z>n]\cup[Z=0]=[Z>n]=[Y_n\leqslant X_0]$.

   (b) On a déjà vu que : $[Z=0]=\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}[X_k\leqslant X_0]$, or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $[Y_n\leqslant X_0]=\bigcap\limits_{k=1}^{n}[X_k\leqslant X_0]$, alors finalement :

$$[Z=0]=\bigcap_{k=1}^{+\infty}[Y_k\leqslant X_0]$$

   $\forall k\in\mathbb{N}^*$, on a : $[Y_{k+1}\leqslant X_0]\subset[Y_k\leqslant X_0]$, la suite d'éveènements $([Y_k\leqslant X_0])$ est donc une suite décroissante, par théorème de la limite monotone, on sait que

$$P(Z=0)=\lim_{n\to+\infty}P(Y_n\leqslant X_0)=\lim_{n\to+\infty}P(Y_n-X_0\leqslant 0)=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{0}h_n(x)\mathrm{d}x$$

$$P(Z=0)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{0}\lambda e^{\lambda x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

   (c) On rappelle que $X=\lfloor T\rfloor+1$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$.
   $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Z=n)=P(Z>n-1)-P(Z>n)$ et
   $P(Y_n\leqslant X_0)=P([Z>n)\cup[Z=0])=P(Z>n)+P(Z=0)=P(Z>n)$ (par incompatibilité de $[Z>n]$ et $[Z=0]$, on aura donc :

$$\forall n\in\geqslant 2,\quad P(Z=n)=P(Y_{n-1}\leqslant X_0)-P(Y_n\leqslant X_0)={}_int_{-\infty}^{0}h_{n-1}(x)\mathrm{d}x-{}_i\,nt_{-\infty}^{0}h_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\forall n \in \geqslant 2, \quad P(Z=n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = P(X=n)$$

Pour $n=1$, on a : $P(Z=1) = P(X_1 \leqslant X_0) = P(X_1 - X_0 \leqslant 0)$ et d'après le résultat de la question 1b) avec $x=1$, on obtient :

$$P(Z=1) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda z} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ avec } n=1$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z=n) = \dfrac{1}{n(n+1)} = P(X=n)$.
De plus $Z(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc X et Z ont même loi.

5. Informatique :

(a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que V est une variable aléatoire. Notons F_V la fonction de répartition de V et F_U celle de U.
Puisque $U(\Omega) \subset [0,1[$ et $\lambda > 0$, on aura $V(\Omega) \subset \mathbf{R}_+^*$, donc :

$$\forall x \leqslant 0, \quad F_V(x) = P(V \leqslant x) = 0$$

$$\forall x > 0, \quad F_V(x) = P(V \leqslant x) = P\left(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x\right) = P(1-U \geqslant e^{-\lambda x})$$

$$\forall x > 0, \quad F_V(x) = P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda x}) = F_U(1 - e^{-\lambda x})$$

or $\forall t \in [0,1[, \quad F_U(t) = t$ et $x > 0 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda x} \in [0,1[$, donc

$$\forall x > 0, \quad F_V(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

La fonction F_V est donc définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ, donc V suit la loi exponentielle de paramètre λ.

(b) Les variables aléatoires Z et X suivent la même loi, on peut donc choisir de simuler la loi de X.
$X = \lfloor T \rfloor + 1 = \left\lfloor \dfrac{X_1}{X_0} \right\rfloor + 1$.
D'après le résultat de la question précédente on peut simuler deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_0 de même loi exponentielle de paramètre λ à partir de deux variables aléatoires U et W de loi uniforme sur $[0,1[$ et dans ce cas : $\dfrac{X_1}{X_0} = \dfrac{\ln(1-W)}{\ln(1-U)}$ ne fait pas apparaître la valeur du paramètre λ de la loi exponentielle (variable qui n'est pas donnée dans la fonction demandée).

```
function z :real ;
var U,W,T :real ;
begin
U :=random ; W :=random ;
T :=ln(1 - W)/ln(1 - U) ;
z := Trunc(T) ;
end.
```

Exercice n°3

On note $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$ et $E = \mathbf{R}_2[X]$. On rappelle que $(\mathcal{B} = e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
On considère f l'application f qui à tout polynôme P de E associe le reste dans la divisioon euclidienne par $1+X^3$ du polynôme $(1-X+X^2)P$. Ainsi il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1-X+X^2)P = (1+X^3)Q + f(P) \text{ avec } deg(f(P)) \leqslant 2$$

1. Soit P_1 et P_2 deux éléments de E, d'après ce qui précède, il existera deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que :

$$(1-X+X^2)P_1 = (1+X^3)Q_1 + f(P_1) \text{ avec } deg(f(P_1)) \leqslant 2$$

$$(1-X+X^2)P_2 = (1+X^3)Q_2 + f(P_2) \text{ avec } deg(f(P_2)) \leqslant 2$$

on en déduit que pour tout réel λ, on a :
$(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2) = (1+X^3)(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda f(P_1) + f(P_2)$ avec
$deg(\lambda f(P_1) + f(P_2)) \leqslant Max(\lambda f(P_1), f(P_2)) \leqslant 2$.
On en conclut par unicité du reste dans une division euclidienne que $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.
De plus on a déjà écrit que si $P \in E$ alors $deg(f(P)) \leqslant 2$ donc finalement f est bien un endomorphisme de E.

2. (a) $(1-X+X^2).1 = (1+X^3).0 + (1-X+X^2)$ alors $f(e_0) = 1-X+X^2$.
$(1-X+X^2).X = X^3 - X^2 + X = (1+X^3) + (X-1-X^2)$ alors $f(e_1) = -X^2+X-1$.
$(1-X+X^2).X^2 = X^4 - X^3 + X^2 = X^3(X-1) + X^2 = (1+X^3)(X-1) + X - 1 + X^2$
donc $f(e_2) = X^2 - X + 1$.
On a bien : $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.

   (b) Puisque (e_0, e_1, e_2) est une base de E et d'après la remarque faite précédemment, on a :

$$Im(f) = Vect(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = Vect(f(e_0)) = Vect(X^2 - X + 1)$$

Le polynôme $X^2 - X + 1$, qui n'est pas nul, forme donc une base de $Im(f)$.

   (c) D'aoprès le théorème du rang appliqué à f, on a :

$$dimKer(f) = dimE - dimIm(f) = 3 - 1 = 2$$

De plus $f(e_0 + e_1) = 0 = f(e_0 - e_2)$ et la famille $(e_0 + e_1, e_0 - e_2)$ est une famille libre ((e_0, e_1, e_2) base de E), on en déduit que $(e_0 + e_1, e_0 - e_2)$ forme une base de $Ker(f)$.

3. (a) Soit $P \in Im(f)$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $P = \alpha(X^2 - X + 1)$, alors

$$f(P) = \alpha\left(f(e_2) - f(e_1) + f(e_0)\right) = 3\alpha(X^2 - X + 1) = 3P$$

On en déduit que 3 est une valeur propre de f et que $Im(f) \subset Ker(f - 3Id)$.
Il est clair que $Ker(f)$ et $Ker(f-3Id)$ sont en somme directe (ce sont deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes), donc :

$$3 = dimKer(f) + dimIm(f) \leqslant dimKer(f) + dimKer(f-3Id) = dim(Kerf \oplus Ker(f-3Id)) \leqslant 3$$

Donc finalement $dimKer(f - 3Id) = 1 = dimIm(f)$ et donc $Im(f) = Ker(f - 3Id)$.

   (b) D'après ce qui précède, 0 et 3 sotn deux valeurs propres de f et $dimE = dimKer(f) + dimKer(f-3Id)$ alors f est diagonalisable et les seules valeurs propres de f sont 0 et 3.

Groupe Réussite

4. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ qui à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel

$$\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i \text{ avec } P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \quad Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$$

   (a) φ est bien définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.
   φ est clairement symétrique : $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$.
   On montre facilement que φ est linéaire à droite : $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \varphi(P, Q + \lambda T) = \varphi(P,Q) + \lambda\varphi(P,T)$, donc finalement φ est un eforme bilinéaire symétrique sur E.
   $\varphi(P,P) = \sum_{i=0}^{2} a_i^2 \geqslant 0$ (somme de réels positifs) et si $\varphi(P,P) = 0$ alors $a_0^2 = a_1^2 = a_2^2 = 0$ (somme nulle de réels positifs), donc $\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0$.
   φ est donc une forme bilinéaire symétrique définie-positive sur E : c'est un produit scalaire sur E.

   (b) D'après la question 3), on sait que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$, $Ker(f) = Vect(P_1, P_2)$, $Im(f) = Vect(P_3)$ avec $P_1 = X + 1$, $P_2 = 1 - X^2$ et $P_3 = X^2 - X + 1$. Par calculs on a :

$$\varphi(P_1, P_3) = 0 = \varphi(P_2, P_3)$$

   alors par bilinéarité et symétrie du produit scalaire φ, on a :

$$\forall (P,Q) \in Ker(f) \times Im(f), \quad \varphi(P,Q) = 0$$

   $ker(f)$ et $Im(f)$ sont donc orthogonaux et supplémentaires dans E, on en déduit que $Ker(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $Im(f)$ dans E pour ce produit scalaire.

5. (a) Par calculs, on a aussi immédiatement :

$$\varphi(e_0, e_1) = 0 = \varphi(e_0, e_2) = \varphi(e_1, e_2)$$

$$\varphi(e_0, e_0) = 1 = \varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2)$$

   donc $\mathcal{B} = (e_0, e_, e_2)$ est une base orthonormale de E pour le produit scalaire φ.

   (b) On a déjà vu que :

$$f(e_0) = X^2 - X + 1 = e_2 - e_1 + e_0 = -f(e_1) = f(e_2)$$

   donc la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que f est de rang 1, avec $Im(f) = Vect(X^2 - X + 1)$. De plus $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in Ker(f)$ si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 = 0$. On a donc :

$$Ker(f) = \left\{P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, a_0 - a_1 + a_2 = 0\right\} = \left\{P \in E, \varphi(P, X^2 - X + 1) = 0\right\}$$

$$Ker(f) = \left(Vect(X^2 - X + 1)\right)^{\perp} = (Im(f))^{\perp}$$

   $Ker(f)$ est bien le supplémentaire orthogonal de $Im(f)$ dans E pour le produit scalaire φ.

Groupe Réussite

Problème :

On admet que si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers l alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = l$.

On considère une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel no nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} ix_i$$

1. (a) $_forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k(k+1)}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{ix_i}{k(k+1)}$$

On peut remarquer que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n}\left(ix_i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(ix_i\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n} ix_i\frac{n+1-i}{i(n+1)} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i$$

On a aussi :

$$T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} x_i$$

$$T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)x_i = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

(b) La série de terme général x_n converge, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel L, et par le résultat admis en début d'énoncé, on sait que la suite $(\dfrac{n+1}{n}T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ce réel L. On en déduit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers L et on obtient la convergence de la série de terme général y_n (égalité précédente entre T_n et $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k$) avec :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = L = \lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \sum_{k=1}^{+\infty} y_n$$

2. Dans cette question, on pose : $z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

   (a) On admet que si f est une fonction concave sur un intervalle I alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a_1, \ldots, a_n) \in I^n, \quad f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

   On sait que la fonction ln est concave sur $\mathbf{R}_+^*$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (a_1, \ldots, a_n) \in]0, +\infty[^n, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

   Pour $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ alors :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

   ou encore :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

   La fonction exp étant la bijection réciproque de la fonction ln et étant croissante sur $\mathbf{R}$, on obtient :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} i.\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$z_n = \left(\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} i x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\left(\prod_{i=1}^{n} i x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a z_k = k x_k$ et on utilise le résultat de la question précédente poiur obtenir :

$$z_n \leqslant \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k x_k$$

   ce qui donne :

$$z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} y_n$$

   (c) La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $[0, +\infty[$, donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes, particulièrement celle en $x = 0$, ce qui donne :

$$\ln(x+1) \leqslant x$$

   (d) En utilisant l'inégalité précédente avec $x = \frac{1}{n}$, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

Groupe Réussite

ou encore :

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$$

c'est-à-dire

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1$$

et par utilisation de la fonction croissante exp, on obtient :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1}k^{k-1}}{\prod_{k=2}^{n}k^k}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1}k}.\frac{\prod_{k=2}^{n+1}k^k}{\prod_{k=2}^{n}k^k} = \frac{1}{(n+1)!}.(n+1)^{n+1}$$

Et finalement on obtient : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

On sait que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 < \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e^1$ alors $\displaystyle\frac{(n+1)^n}{n!} \leqslant \prod_{k=1}^{n} e$ et donc

$$0 < \frac{(n+1)^n}{n!} \leqslant e^n \text{ ou encore } \frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \leqslant e$$

On a vu aussi que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < z_n \leqslant \dfrac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} y_n$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < z_n \leqslant e y_n$$

La série de terme générale y_n converge, il en est donc de même, par théorème de comparaison, de la série de terme général positif z_n et on aura :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

Ce qui donne avec le résultat de la question 1b) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

3. (a) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [1, n-1]$, la fonction ln est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$ donc sur $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, on en déduit que :

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad \ln\frac{k}{n} \leqslant \ln(x) \leqslant \ln\frac{k+1}{n}$$

et par intégration sur le segment $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n} \qquad (*)$$

(b) Une primitive de la fonction ln sur $\mathbf{R}_+^*$ est la fonction $x \mapsto x\ln x - x$, on en déduit que

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_{\frac{1}{n}}^{1} = -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$$

Par somme dans l'encadrement $(*)$ pour $k = 1$ à $n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{n}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{n}$$

et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n} \leqslant -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{n}$$

ou encore puisque $\ln(1) = 0$ et $-\ln\frac{1}{n} = \ln n$

$$-1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} \leqslant -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}$$

(c) Par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} = -1$ ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right) = -1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = -1$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-1}$$

et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{e}{n}$.

Groupe Réussite

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent alors leur somme partielle d'ordre m sont équivalentes lorsque m tend vers $+\infty$.
   Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière notée $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [1, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   On lui associe comme dans la question 2, la suite $z_n(N)$.
   (a) D'après la définition de la suite $(x_n(N)$, nous avons :
   $$\forall k > N, \quad \sum_{n=1}^{k} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$
   on en déduit que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.
   Par définition de $z_n(N)$ et $x_n(N)$, on obtient :
   $$z_n(N) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } n \in [1, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Ce qui donne : $z_n(N) = \dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ si $n \in \{1, \ldots, N\}$ et $z_n(N) = 0$ si $n > N$. On en déduit que la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ est une somme finie et
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$
   (b) On sait que $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \sim e$ lorsque n tend vers $+\infty$ et que la série de terme général $\dfrac{e}{n}$ diverge alors par le résultat admis dans cette question, on a :
   $$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \sim e \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \text{ quand N tend vers } +\infty$$
   Ce qui donne finalement :
   $$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$$

5. On a vu que pour tout suite (x_n) de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge, on avait :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

Soit λ une constante telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ pour toute suite (x_n), ce sera particulièrement le cas pour les suites $(x_n(N))$ avec N quelconque dans $\mathbb{N}^*$. On aura donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$$

d'où par quotient :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} \leqslant \lambda$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$e \leqslant \lambda$$

Ce qui montre que e est la plus petite valeur λ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Groupe Réussite