

Corrigé Maths EML 2013 ECS

PROBLÈME 1.

Partie I.

1. Soit $x \in]0; +\infty[$. Soit $g_x : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$.

g_x est **continue et positive** sur $[0; +\infty[$.

De plus, $t^2 g_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} te^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $g_x(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

Par la règle de négligeabilité des intégrales de fonctions positives, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ existe.

2. Soit $x \in]0; +\infty[$. Par positivité de g_x , $\int_1^{+\infty} g_x(t) dt \geq 0$.

Comme par la relation de Chasles, $f(x) = \int_0^1 g_x(t) dt + \int_1^{+\infty} g_x(t) dt$, on a $f(x) \geq \int_0^1 g_x(t) dt$.

Comme : $\forall t \in [0; 1[$, $e^{-t} \geq e^{-1}$, on a : $\forall t \in [0; 1[$, $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t}$. Par croissance de l'intégrale,

$$f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt.$$

$$\text{Or } \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt = e^{-1} [\ln(x+t)]_0^1 = e^{-1} \ln \frac{x+1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Par comparaison, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

3. Soit $x \in]0; +\infty[$.

On a : $\forall t \in]0; +\infty[$, $0 < g_x(t) < \frac{e^{-t}}{x}$.

Or le cours affirme que $\Gamma(1) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ existe et vaut $0! = 1$.

Par stricte croissance de l'intégrale, $0 < f(x) < \frac{1}{x}$

Par encadrement, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. Le cours affirme que $\Gamma(2) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ existe et vaut $1! = 1$.

Soit $x \in]0; +\infty[$.

On a : $\forall t \in [0; +\infty[$, $\left| g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x} \right| = \left| \frac{e^{-t}(x - (x+t))}{(x+t)x} \right| = \frac{e^{-t}t}{(x+t)x} \leq \frac{te^{-t}}{x^2}$, le majorant étant intégrable sur $[0; +\infty[$, d'intégrale valant $\frac{1}{x^2}$.

Or : $\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| = \left| \int_0^{+\infty} g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x} \right| dt$, par l'inégalité triangulaire.

$$\text{Donc } \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \quad \left(= \frac{1}{x^2} \right).$$

On déduit de la majoration précédente : $|xf(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$, donc par encadrement $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, équivalent à

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

Partie II.

- 5.a) On établit, comme en I.1., la convergence de l'intégrale, l'intégrande étant à nouveau continue et positive sur $[0; +\infty[$, et négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ existe.

- b) Après réduction au même dénominateur, on a, pour x, h et t définis dans l'énoncé :

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \frac{|h|}{(x+t)^2 |x+h+t|}.$$

Or $x+h+t > \frac{x}{2} > 0$ puisque $h > -\frac{x}{2}$, $t > 0$ et $x > 0$. Ceci fournit alors la majoration voulue :

$$\forall (x, h, t) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^* \times [0; +\infty[\text{ tels que } h > -\frac{x}{2}, \quad \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$$

c) On en déduit, toujours pour $(x, h, t) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^* \times [0; +\infty[$ tels que $h > -\frac{x}{2}$,

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{e^{-t}}{x+h+t} - \frac{e^{-t}}{x+t} \right) - \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|e^{-t}}{x^3}.$$

Comme $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{h} \left(\frac{e^{-t}}{x+h+t} - \frac{e^{-t}}{x+t} \right) - \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ et comme $\int_0^{+\infty} \frac{2|h|e^{-t}}{x^3} dt$ existe et vaut $\frac{2|h|}{x^3}$ encore une fois grâce à $\Gamma(1)$, on a, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3} \text{ pour tout } (x, h) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^* \text{ tels que } h > -\frac{x}{2}.$$

6. Soit $x \in]0; +\infty[$. L'encadrement précédent est valable pour tout h dans le voisinage $]-\frac{x}{2}; \frac{x}{2}[$ de 0.

Le théorème d'encadrement (gendarmes) assure que $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right|$ existe et vaut 0.

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe et vaut $-\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$.

$$f \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[, \text{ et } \forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

7. Soit $x \in]0; +\infty[$ et $(\varepsilon, A) \in]0; 1] \times [1; +\infty[$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{-1}{x+t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon; A]$, une intégration par parties donne

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

8. $\frac{e^{-A}}{x+A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$, $\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x}$, et les deux intégrales tendant respectivement vers $-f'(x)$ et $f(x)$ lorsque ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, en passant à la limite dans l'identité précédente, on obtient :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

9. Le membre de droite de cette dernière égalité étant dérivable, f est deux fois dérivable avec

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

Sur $]0; +\infty[$, f' étant dérivable donc continue, et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ étant continue, on en déduit que f'' est continue.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0; +\infty[, \text{ avec } \forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

10. g est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, donc est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x} \left(-f(x) - \frac{1}{x} + f(x) \right).$$

$$g \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ avec } \forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

11. Soit $x \in]0; +\infty[$. Soit $A \in [x; +\infty[$. On a :

$$\int_x^A \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^A -g'(u) du = [-g(u)]_x^A = -g(A) + g(x).$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) = 0$ d'après 3., donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} g(A) = 0$. Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_x^A \frac{e^{-u}}{u} du$ existe et vaut $g(x)$.

Et comme $f(x) = e^x g(x)$, on a établi :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ existe et vaut } g(x), \text{ et } f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

12.

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x},$$

le premier équivalent étant franchement une égalité, le second provenant de 4.

13. $n^2 \left(n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc le terme général de la série à étudier est positif et négligeable devant $1/n^2$, terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison,

la série $\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge.

Partie III.

14. • h est positive sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R}^* .

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$ existe : c'est $f(1)$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ existe et vaut $\frac{1}{f(1)} \times f(1) = 1$.

h est bien une densité.

15. Pour $t \geq 0$, $th(t)f(1) = \frac{te^{-t}}{1+t} = \frac{(1+t)e^{-t}}{1+t} - \frac{e^{-t}}{1+t} = e^{-t} - \frac{e^{-t}}{1+t}$.

Le premier terme de cette différence est intégrable sur $[0; +\infty[$: il vaut $\Gamma(1) = 1$.

Le second terme de cette différence est intégrable sur $[0; +\infty[$: il vaut $f(1)$.

Par conséquent, $t \mapsto th(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} (h étant nulle sur $]-\infty; 0[$), X possède une espérance valant

$$\frac{1}{f(1)}(1 - f(1)) = \frac{1}{f(1)} - 1.$$

X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{f(1)} - 1$.

PROBLÈME 2.**Partie I.**

Dans ce corrigé, je note $\text{SEP}(M, \lambda)$ (respectivement $\text{SEP}(\varphi, \lambda)$) le sous-espace propre de la matrice M (respectivement de l'endomorphisme φ) associé à la valeur propre λ .

D'autre part, je confonds l'espace $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} .

1. *Première méthode.*

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, défini par

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \langle X, Y \rangle = {}^tXY.$$

On a immédiatement :

$\dim(\text{Vect}(V_0))^\perp = 4 - 1 = 3$ et $\forall W \in (\text{Vect}(V_0))^\perp, A_0 W = A_0 {}^tV_0 W = A_0 \langle V_0, W \rangle = 0$,
ce qui prouve que 0 est valeur propre de A_0 et $(\text{Vect}(V_0))^\perp \subset \text{SEP}(A_0, 0)$, et donc que $\dim(\text{SEP}(A_0, 0)) \geq 3$.
Comme $\dim(\text{SEP}(A_0, 0)) = 4 - \text{rg}(A_0) \leq 3$ puisque A_0 n'est pas nulle, on a exactement $\text{SEP}(A_0, 0) = (\text{Vect}(V_0))^\perp$.

$$(\text{Vect}(V_0))^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, V_0 \right\rangle = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / x - y + 2z - t = 0 \right\}$$

$$(\text{Vect}(V_0))^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} / x = y - 2z + t \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$0 \text{ est une valeur propre de } A_0 \text{ et } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{SEP}(A_0, 0).$$

- 2.a) Comme ${}^tV_0U_0 = 1$, on a : $A_0U_0 = 1 \times U_0 \dots$

- b) ... ce qui prouve que 1 est une valeur propre de A_0 . Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a nécessairement : $\dim \text{SEP}(A_0, 0) + \dim \text{SEP}(A_0, 1) \leq 4$, donc $\dim \text{SEP}(A_0, 1) \leq 1$. Donc $\dim \text{SEP}(A_0, 1) = 1$ et $\dim \text{SEP}(A_0, 0) + \dim \text{SEP}(A_0, 1) = 4$.

D'après le théorème de diagonalisabilité,

$$\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable, } \text{Sp}(A_0) = \{0; 1\}, \dim \text{SEP}(A_0, 0) = 3 \text{ et } \dim \text{SEP}(A_0, 1) = 1.}$$

- c) Le cours affirme qu'une matrice P de passage vers une base formée de vecteurs propres fera l'affaire. Par exemple :

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } A_0 = PDP^{-1}.$$

Partie II.

3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda A + B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B).$$

Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $C = AB$ et $D = BA$.

$$\bullet \quad \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}.$$

$$\bullet \quad \text{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n b_{k,\ell} a_{\ell,k} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} b_{k,\ell} a_{\ell,k}.$$

Et ces deux sommes sont égales (en posant $k = j$ et $\ell = i$, ces indices étant muets!).

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Reprenons le calcul précédent de $\text{Tr}(BA)$ avec $B = {}^t A$:

$$\text{Tr}({}^t A A) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} b_{k,\ell} a_{\ell,k} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{\ell,k} a_{\ell,k}, \text{ d'où}$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

Toute cette partie est à savoir faire instantanément!

Partie III.

- 6.a) Par définition du produit matriciel,

$$U^t V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad (U^t V)_{i,j} = u_i v_j.$$

- b)

$$\text{Tr}(U^t V) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \dots \text{accessoirement } \dots = \langle U, V \rangle = {}^t U V.$$

- c) • $U^t V$ n'est pas nulle, car il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $u_{i_0} \neq 0$ puisque U n'est pas nulle, et il existe $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $v_{j_0} \neq 0$ puisque V n'est pas nulle. Ainsi le coefficient d'indice (i_0, j_0) de $U^t V$ n'est pas nul. Donc $\text{rg}(U^t V) \geq 1$.

- Par la formule du rang, $\dim \text{Ker}(U^t V) \leq n - 1$.

De plus, pour tout $W \in (\text{Vect}(V))^\perp$, $U^t V W = \langle V, W \rangle U = 0$, donc $(\text{Vect}(V))^\perp \subset \text{Ker}(U^t V)$.

Et comme $\dim(\text{Vect}(V))^\perp = n - 1$, on a $\dim \text{Ker}(U^t V) = n - 1$. Et toujours la formule du rang :

$$\text{rg}(U^t V) = 1.$$

Ce que la première méthode de la question initiale démontrait quasiment ...

- 7.a) Puisque A est de rang 1, A possède au moins une colonne non nulle. Soit j_0 l'indice d'une colonne non nulle de A .

Alors toutes les autres colonnes de A sont proportionnelles à $C_{j_0}(A)$, sinon A serait au moins de rang 2.

$$\exists j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

- b) Soit $U = C_{j_0}(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors U est non nulle par définition de j_0 et V est non nulle car $\alpha_{j_0} = 1$, puisque $C_{j_0}(A) = \alpha_{j_0} C_{j_0}(A)$.

On a alors : $(U^t V)_{i,j} = u_i v_j = a_{i,j_0} \alpha_j = a_{i,j}$ d'après la relation $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

$$\exists (U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2, \quad A = U^t V.$$

8. La synthèse des deux questions précédentes montre que :

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1 si, et seulement si, il existe } (U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2 \text{ telles que } A = U^t V.$$

Partie IV.

9. Pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, $(U_X {}^t U_Y)_{i,j} = \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = m_{i,j}$ par indépendance de X et Y . De plus, U_X et U_Y sont non nulles puisque $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U_X = i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U_Y = i) = 1$. Par la caractérisation précédente,

$$U_X {}^t U_Y = M \text{ et } M \text{ est de rang 1.}$$

- 10.a) Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Comme le $i^{\text{ème}}$ coefficient de $C_j(M)$ est $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$, le $i^{\text{ème}}$ coefficient de $C_1(M) + \dots + C_n(M)$ est $\sum_{j=1}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$. D'après la formule des probabilités totales avec les système complet d'événements $\{[Y = j]\}_{1 \leq j \leq n}$, cette somme vaut $\mathbb{P}(X = i)$, qui est bien le $i^{\text{ème}}$ coefficient de U_X .

$$\text{Ainsi } C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X.$$

- b) Comme M est de rang 1, ses colonnes sont toutes proportionnelles à l'une de ses colonnes non nulles. Soit $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $C_{j_0}(M) \neq 0$. Il existe n coefficients réels positifs ou nuls (α_j) tels que, pour tout j de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M)$. Ces coefficients sont positifs ou nuls car tous les coefficients de M sont des probabilités, donc sont positifs.

La relation précédente donne alors $\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) C_{j_0}(M) = U_X$. De plus, $\sum_{j=1}^n \alpha_j \geq 1$ puisque $\alpha_{j_0} = 1$ et les autres coefficients sont positifs.

Posons, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k}$.

Alors, pour tout j de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M) = \frac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k} U_X = \beta_j U_X$.

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \exists \beta_j \in \mathbb{R}^+, C_j(M) = \beta_j U_X.}$$

- c) Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. $C_j(M) = \beta_j U_X$ entraîne, en sommant tous les coefficients de chaque membre,

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} = \beta_j \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X=i), \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \beta_j,$$

puisque $([X=i])_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements. De plus, d'après la formule des probabilités totales

avec ce système complet d'événements, $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathbb{P}(Y=j)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \beta_j = \mathbb{P}(Y=j).}$$

- d) Pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de la relation $C_j(M) = \beta_j U_X$ donne exactement

$$\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathbb{P}(Y=j) \mathbb{P}(X=i).$$

$\boxed{\text{Donc les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

Partie V.

11. Comme $\text{rg}(A) = 1$, la formule du rang assure que $\dim \text{Ker}(A) = n - 1$, ce qui prouve que

0 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé $\text{SEP}(A, 0) = \text{Ker}(A)$ est de dimension $n - 1$.

On se souvient que depuis le début, $n \geq 2$, donc tout va bien...

12. ${}^t V U = \sum_{i=1}^n v_i u_i$ et $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ par III.6.a (i.e. par définition du produit matriciel).

De plus, $A^2 = (U {}^t V)(U {}^t V) = U ({}^t V U) {}^t V = a(U {}^t V) = aA^2$.

$$\boxed{{}^t V U = (a) \text{ et } A^2 = aA.}$$

13. $X^2 - aX = X(X - a)$ est un polynôme annulateur de A , dont les racines sont 0 et a . Si $a = 0$, l'unique racine de ce polynôme est 0 , donc la seule valeur propre de A est 0 (on sait déjà que 0 est une valeur propre de A). Comme $\dim \text{SEP}(A, 0) = n - 1 < n$, A n'est pas diagonalisable.

$\boxed{\text{Si } a = 0, \text{ alors } A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

14. Supposons $a \neq 0$. $AU = U {}^t V U = U(a) = aU$, avec $U \neq 0$. Donc a est effectivement une valeur propre de A . D'une part, $\text{SEP}(A, a)$ est au moins de dimension 1, d'autre part, $\text{SEP}(A, 0)$ et $\text{SEP}(A, a)$ étant en somme directe avec $\dim(\text{SEP}(A, 0)) = n - 1$, $\text{SEP}(A, a)$ est au plus de dimension 1. Donc $\dim(\text{SEP}(A, a)) = 1$.

$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ Sp}(A) = \{0, a\} \text{ et } \dim(\text{SEP}(A, 0)) + \dim(\text{SEP}(A, a)) = n, \text{ donc } A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

15. 13 et 14 induisent la condition nécessaire et suffisante suivante.

$\boxed{\text{Une matrice de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.}}$

Partie VI.

16. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive grâce à la partie II.

- Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda A + B, C \rangle = \text{Tr}({}^t(\lambda A + B)C) = \text{Tr}(\lambda {}^t A C + {}^t B C) = \lambda \text{Tr}({}^t A C) + \text{Tr}({}^t B C) = \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle.$$

$$\langle B, A \rangle = \text{Tr}({}^t B A) = \text{Tr}({}^t ({}^t B A)) = \text{Tr}({}^t A B) = \langle A, B \rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire symétrique.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}({}^t A A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \text{ donc } \langle A, A \rangle \geq 0, \text{ et, puisque } \langle A, A \rangle \text{ est une somme de termes tous positifs, elle}$$

ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, donc $\langle A, A \rangle = 0$ entraîne $A = O$.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \text{Tr}({}^t M N) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

17. ${}^tS = {}^t(V^tV) = V^tV = S$ donc S est symétrique.

$$S^2 = (V^tV)(V^tV) = V({}^tVV){}^tV = V^tV = S \text{ car } {}^tVV = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1.$$

S est symétrique et vérifie $S^2 = S$.

18.a) Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $\Phi(M) = SM$, $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus : $\Phi(\lambda M + N) = S(\lambda M + N) = \lambda SM + SN = \lambda \Phi(M) + \Phi(N)$.

• Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Puisque S est symétrique, on a :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = {}^t(SM)N = {}^tM^tSN = {}^tM(SN) = \langle M, \Phi(N) \rangle.$$

Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\Phi^2(M) = S(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$.

$\Phi^2 = \Phi$, donc Φ est un projecteur.

Comme $\Phi(I_n) = S$, Φ n'est pas l'endomorphisme nul et n'est pas l'identité. En effet, $\text{rg}(S) = 1$ donc S n'est ni nulle ni égale à I_n .

Ainsi, $\text{Sp}(\Phi) = \{0, 1\}$.

c) Comme $\text{Ker}\Phi = \text{SEP}(\Phi, 0)$ et $\text{Ker}(\Phi - e) = \text{SEP}(\Phi, 1) = \text{Im}\Phi$, on a :

- $\text{Ker}\Phi$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires car Φ est un projecteur ;
- $\text{Ker}\Phi$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont orthogonaux car les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont orthogonaux.

$\text{Ker}\Phi$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.