

# Corrigé Maths EML 2013 ECS

## PROBLÈME 1.

### Partie I.

1. Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . Soit  $g_x : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ .

$g_x$  est continue et positive sur  $[0; +\infty[$ .

De plus,  $t^2 g_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$  donc  $g_x(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

Par la règle de négligeabilité des intégrales de fonctions positives,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$  existe.

2. Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . Par positivité de  $g_x$ ,  $\int_1^{+\infty} g_x(t) dt \geq 0$ .

Comme par la relation de Chasles,  $f(x) = \int_0^1 g_x(t) dt + \int_1^{+\infty} g_x(t) dt$ , on a  $f(x) \geq \int_0^1 g_x(t) dt$ .

Comme :  $\forall t \in [0; 1[, e^{-t} \geq e^{-1}$ , on a :  $\forall t \in [0; 1[, \frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t}$ . Par croissance de l'intégrale,

$$f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt.$$

Or  $\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt = e^{-1} [\ln(x+t)]_0^1 = e^{-1} \ln \frac{x+1}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ . Par comparaison,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ .

3. Soit  $x \in ]0; +\infty[$ .

On a :  $\forall t \in ]0; +\infty[, 0 < g_x(t) < \frac{e^{-t}}{x}$ .

Or le cours affirme que  $\Gamma(1) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  existe et vaut  $0! = 1$ .

Par stricte croissance de l'intégrale,  $0 < f(x) < \frac{1}{x}$  Par encadrement,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ .

4. Le cours affirme que  $\Gamma(2) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$  existe et vaut  $1! = 1$ .

Soit  $x \in ]0; +\infty[$ .

On a :  $\forall t \in [0; +\infty[, \left| g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x} \right| = \left| \frac{e^{-t}(x-(x+t))}{(x+t)x} \right| = \frac{e^{-t}t}{(x+t)x} \leq \frac{te^{-t}}{x^2}$ , le majorant étant intégrable sur  $[0; +\infty[$ , d'intégrale valant  $\frac{1}{x^2}$ .

Or :  $\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| = \left| \int_0^{+\infty} g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| g_x(t) - \frac{e^{-t}}{x} \right| dt$ , par l'inégalité triangulaire.

$$\text{Donc } \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt \quad \left( = \frac{1}{x^2} \right).$$

On déduit de la majoration précédente :  $|xf(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$ , donc par encadrement  $xf(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ , équivalant à

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

### Partie II.

- 5.a) On établit, comme en I.1., la convergence de l'intégrale, l'intégrande étant à nouveau continue et positive sur  $[0; +\infty[$ , et négligeable devant  $t \mapsto 1/t^2$  en  $+\infty$ .

Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$  existe.

- b) Après réduction au même dénominateur, on a, pour  $x, h$  et  $t$  définis dans l'énoncé :

$$\left| \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \frac{|h|}{(x+t)^2 |x+h+t|}.$$

Or  $x+h+t > \frac{x}{2} > 0$  puisque  $h > -\frac{x}{2}$ ,  $t > 0$  et  $x > 0$ . Ceci fournit alors la majoration voulue :

$$\forall (x, h, t) \in ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}^* \times [0; +\infty[ \text{ tels que } h > -\frac{x}{2}, \quad \left| \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$$

c) On en déduit, toujours pour  $(x, h, t) \in ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}^* \times [0; +\infty[$  tels que  $h > -\frac{x}{2}$ ,

$$\left| \frac{1}{h} \left( \frac{e^{-t}}{x+h+t} - \frac{e^{-t}}{x+t} \right) - \frac{-e^{-t}}{(x+t)^2} \right| \leqslant \frac{2|h|e^{-t}}{x^3}.$$

Comme  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{h} \left( \frac{e^{-t}}{x+h+t} - \frac{e^{-t}}{x+t} \right) - \frac{-e^{-t}}{(x+t)^2} dt$  et comme  $\int_0^{+\infty} \frac{2|h|e^{-t}}{x^3} dt$  existe et vaut  $\frac{2|h|}{x^3}$  encore une fois grâce à  $\Gamma(1)$ , on a, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3} \text{ pour tout } (x, h) \in ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}^* \text{ tels que } h > -\frac{x}{2}.$$

6. Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . L'encadrement précédent est valable pour tout  $h$  dans le voisinage  $]-\frac{x}{2}; \frac{x}{2}[$  de  $x$ .

Le théorème d'encadrement (gendarmes) assure que  $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right|$  existe et vaut 0.

Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  existe et vaut  $-\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ .

$$f \text{ est dérivable sur } ]0; +\infty[, \text{ et } \forall x \in ]0; +\infty[, \quad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

7. Soit  $x \in ]0; +\infty[$  et  $(\varepsilon, A) \in ]0; 1] \times [1; +\infty[$ .

Les fonctions  $t \mapsto \frac{-1}{x+t}$  et  $t \mapsto e^{-t}$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\varepsilon; A]$ , une intégration par parties donne

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

8.  $\frac{e^{-A}}{x+A} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0$ ,  $\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \frac{1}{x}$ , et les deux intégrales tendant respectivement vers  $-f'(x)$  et  $f(x)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et  $A$  tend vers  $+\infty$ , en passant à la limite dans l'identité précédente, on obtient :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

9. Le membre de droite de cette dernière égalité étant dérivable,  $f$  est deux fois dérivable avec

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'$  étant dérivable donc continue, et  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  étant continue, on en déduit que  $f''$  est continue.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } ]0; +\infty[, \text{ avec } \forall x \in ]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

10.  $g$  est le produit de deux fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ , donc est dérivable sur  $]0; +\infty[$  avec

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x} \left( -f(x) - \frac{1}{x} + f(x) \right).$$

$$g \text{ est dérivable sur } ]0; +\infty[ \text{ avec } \forall x \in ]0; +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

11. Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . Soit  $A \in [x; +\infty[$ . On a :

$$\int_x^A \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^A -g'(u) du = [-g(u)]_x^A = -g(A) + g(x).$$

Or  $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A) = 0$  d'après 3., donc  $\lim_{A \rightarrow +\infty} g(A) = 0$ . Donc  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_x^A \frac{e^{-u}}{u} du$  existe et vaut  $g(x)$ .

Et comme  $f(x) = e^x g(x)$ , on a établi :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ existe et vaut } g(x), \text{ et } f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

12.

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x},$$

le premier équivalent étant franchement une égalité, le second provenant de 4.

13.  $n^2 \left( n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 e^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc le terme général de la série à étudier est positif et négligeable devant  $1/n^2$ , terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison,

la série  $\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  converge.

**Partie III.**

14. •  $h$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

•  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$  existe : c'est  $f(1)$ . Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$  existe et vaut  $\frac{1}{f(1)} \times f(1) = 1$ .

$$15. \text{ Pour } t \geq 0, th(t)f(1) = \frac{te^{-t}}{1+t} = \frac{(1+t)e^{-t}}{1+t} - \frac{e^{-t}}{1+t} = e^{-t} - \frac{e^{-t}}{1+t}. \quad \boxed{h \text{ est bien une densité.}}$$

Le premier terme de cette différence est intégrable sur  $[0; +\infty[$  : il vaut  $\Gamma(1) = 1$ .

Le second terme de cette différence est intégrable sur  $[0; +\infty[$  : il vaut  $f(1)$ .

Par conséquent,  $t \mapsto th(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  ( $h$  étant nulle sur  $]-\infty; 0]$ ),  $X$  possède une espérance valant  $\frac{1}{f(1)}(1 - f(1)) = \frac{1}{f(1)} - 1$ .

$$X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{f(1)} - 1.$$

**PROBLÈME 2.****Partie I.**

Dans ce corrigé, je note  $\text{SEP}(M, \lambda)$  (respectivement  $\text{SEP}(\varphi, \lambda)$ ) le sous-espace propre de la matrice  $M$  (respectivement de l'endomorphisme  $\varphi$ ) associé à la valeur propre  $\lambda$ .

D'autre part, je confonds l'espace  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$ .

**1. Première méthode.**

Soit  $\langle ., . \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ , défini par

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \langle X, Y \rangle = {}^t X Y.$$

On a immédiatement :

$$\dim(\text{Vect}(V_0))^\perp = 4 - 1 = 3 \text{ et } \forall W \in (\text{Vect}(V_0))^\perp, A_0 W = A_0 {}^t V_0 W = A_0 \langle V_0, W \rangle = 0,$$

ce qui prouve que 0 est valeur propre de  $A_0$  et  $(\text{Vect}(V_0))^\perp \subset \text{SEP}(A_0, 0)$ , et donc que  $\dim(\text{SEP}(A_0, 0)) \geq 3$ .

Comme  $\dim(\text{SEP}(A_0, 0)) = 4 - \text{rg}(A_0) \leq 3$  puisque  $A_0$  n'est pas nulle, on a exactement  $\text{SEP}(A_0, 0) = (\text{Vect}(V_0))^\perp$ .

$$(\text{Vect}(V_0))^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, V_0 \right\rangle \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / x - y + 2z - t = 0 \right\}$$

$$(\text{Vect}(V_0))^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} / x = y - 2z + t \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

0 est une valeur propre de  $A_0$  et  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\text{SEP}(A_0, 0)$ .

**2.a)** Comme  ${}^t V_0 U_0 = 1$ , on a :  $\boxed{A_0 U_0 = 1 \times U_0 \dots}$

**b)** ... ce qui prouve que 1 est une valeur propre de  $A_0$ . Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a nécessairement :  $\dim \text{SEP}(A_0, 0) + \dim \text{SEP}(A_0, 1) \leq 4$ , donc  $\dim \text{SEP}(A_0, 1) \leq 1$ . Donc  $\dim \text{SEP}(A_0, 1) = 1$  et  $\dim \text{SEP}(A_0, 0) + \dim \text{SEP}(A_0, 1) = 4$ .

D'après le théorème de diagonalisabilité,

$$\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable, } \text{Sp}(A_0) = \{0; 1\}, \dim \text{SEP}(A_0, 0) = 3 \text{ et } \dim \text{SEP}(A_0, 1) = 1.}$$

**c)** Le cours affirme qu'une matrice  $P$  de passage vers une base formée de vecteurs propres fera l'affaire. Par exemple :

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } A_0 = PDP^{-1}.$$

**Partie II.**

3. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda A + B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B).$$

Tr est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

4. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $C = AB$  et  $D = BA$ .

- $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}$ .
- $\text{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n b_{k,\ell} a_{\ell,k} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} b_{k,\ell} a_{\ell,k}$ .

Et ces deux sommes sont égales (en posant  $k = j$  et  $\ell = i$ , ces indices étant muets!).

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

5. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Reprenons le calcul précédent de  $\text{Tr}(BA)$  avec  $B = {}^t A$  :

$$\text{Tr}({}^t A A) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} b_{k,\ell} a_{\ell,k} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{\ell,k} a_{\ell,k}, \text{ d'où}$$

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$ .

Toute cette partie est à savoir faire instantanément !

**Partie III.**

- 6.a) Par définition du produit matriciel,

$U^t V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (i, j) \in [[1 ; n]]^2, \quad (U^t V)_{i,j} = u_i v_j$ .

b)  $\text{Tr}(U^t V) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \dots \text{ accessoirement } \dots = \langle U, V \rangle = {}^t U V$ .

- c) •  $U^t V$  n'est pas nulle, car il existe  $i_0 \in [[1 ; n]]$  tel que  $u_{i_0} \neq 0$  puisque  $U$  n'est pas nulle, et il existe  $j_0 \in [[1 ; n]]$  tel que  $v_{j_0} \neq 0$  puisque  $V$  n'est pas nulle. Ainsi le coefficient d'indice  $(i_0, j_0)$  de  $U^t V$  n'est pas nul. Donc  $\text{rg}(U^t V) \geq 1$ .

- Par la formule du rang,  $\dim \text{Ker}(U^t V) \leq n - 1$ .

De plus, pour tout  $W \in (\text{Vect}(V))^\perp$ ,  $U^t V W = \langle V, W \rangle U = 0$ , donc  $(\text{Vect}(V))^\perp \subset \text{Ker}(U^t V)$ .

Et comme  $\dim(\text{Vect}(V))^\perp = n - 1$ , on a  $\dim \text{Ker}(U^t V) = n - 1$ . Et toujours la formule du rang :

$\text{rg}(U^t V) = 1$ .

Ce que la première méthode de la question initiale démontrait quasiment ...

- 7.a) Puisque  $A$  est de rang 1,  $A$  possède au moins une colonne non nulle. Soit  $j_0$  l'indice d'une colonne non nulle de  $A$ .

Alors toutes les autres colonnes de  $A$  sont proportionnelles à  $C_{j_0}(A)$ , sinon  $A$  serait au moins de rang 2.

$\exists j_0 \in [[1 ; n]], \quad \forall j \in [[1 ; n]], \quad \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$ .

- b) Soit  $U = C_{j_0}(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $V = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Alors  $U$  est non nulle par définition de  $j_0$  et  $V$  est non nulle car  $\alpha_{j_0} = 1$ , puisque  $C_{j_0}(A) = \alpha_{j_0} C_{j_0}(A)$ .

On a alors :  $(U^t V)_{i,j} = u_i v_j = a_{i,j_0} \alpha_j = a_{i,j}$  d'après la relation  $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$ .

$\exists (U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2, \quad A = U^t V$ .

8. La synthèse des deux questions précédentes montre que :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de rang 1 si, et seulement si, il existe  $(U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$  telles que  $A = U^t V$ .

**Partie IV.**

9. Pour tout  $(i, j)$  de  $[[1 ; n]]^2$ ,  $(U_X {}^t U_Y)_{i,j} = \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = m_{i,j}$  par indépendance de  $X$  et  $Y$ . De plus,  $U_X$  et  $U_Y$  sont non nulles puisque  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U_X = i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U_Y = i) = 1$ . Par la caractérisation précédente,

$U_X {}^t U_Y = M$  et  $M$  est de rang 1.

- 10.a) Soit  $i \in [[1 ; n]]$ .

Comme le  $i^{\text{ème}}$  coefficient de  $C_j(M)$  est  $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$ , le  $i^{\text{ème}}$  coefficient de  $C_1(M) + \dots + C_n(M)$  est  $\sum_{j=1}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$ . D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([Y = j])_{1 \leq j \leq n}$ , cette somme vaut  $\mathbb{P}(X = i)$ , qui est bien le  $i^{\text{ème}}$  coefficient de  $U_X$ .

$\text{Ainsi } C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$ .

- b) Comme  $M$  est de rang 1, ses colonnes sont toutes proportionnelles à l'une de ses colonnes non nulles. Soit  $j_0 \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  tel que  $C_{j_0}(M) \neq 0$ . Il existe  $n$  coefficients réels positifs ou nuls ( $\alpha_j$ ) tels que, pour tout  $j$  de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M)$ . Ces coefficients sont positifs ou nuls car tous les coefficients de  $M$  sont des probabilités, donc sont positifs.

La relation précédente donne alors  $\left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \right) C_{j_0}(M) = U_X$ . De plus,  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \geq 1$  puisque  $\alpha_{j_0} = 1$  et les autres coefficients sont positifs.

Posons, pour tout  $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k}$ .

Alors, pour tout  $j$  de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M) = \frac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k} U_X = \beta_j U_X$ .

$$\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \exists \beta_j \in \mathbb{R}^+, C_j(M) = \beta_j U_X.$$

- c) Soit  $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ .  $C_j(M) = \beta_j U_X$  entraîne, en sommant tous les coefficients de chaque membre,

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} = \beta_j \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i), \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \beta_j,$$

puisque  $([X = i])_{1 \leq i \leq n}$  est un système complet d'événements. De plus, d'après la formule des probabilités totales

avec ce système complet d'événements,  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(Y = j)$ .

$$\text{Ainsi : } \forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \beta_j = \mathbb{P}(Y = j).$$

- d) Pour tout  $(i, j)$  de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ , la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la relation  $C_j(M) = \beta_j U_X$  donne exactement

$$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(Y = j)\mathbb{P}(X = i).$$

Donc les v.a.r.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

## Partie V.

11. Comme  $\text{rg}(A) = 1$ , la formule du rang assure que  $\dim \text{Ker}(A) = n - 1$ , ce qui prouve que

0 est une valeur propre de  $A$  et le sous-espace propre associé  $\text{SEP}(A, 0) = \text{Ker}(A)$  est de dimension  $n - 1$ .

*On se souvient que depuis le début,  $n \geq 2$ , donc tout va bien...*

12.  ${}^t VU = \sum_{i=1}^n v_i u_i$  et  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$  par III.6.a (i.e. par définition du produit matriciel).

De plus,  $A^2 = (U {}^t V)(U {}^t V) = U({}^t VU) {}^t V = a(U {}^t V) = aA^2$ .

$${}^t VU = (a) \text{ et } A^2 = aA.$$

13.  $X^2 - aX = X(X - a)$  est un polynôme annulateur de  $A$ , dont les racines sont 0 et  $a$ . Si  $a = 0$ , l'unique racine de ce polynôme est 0, donc la seule valeur propre de  $A$  est 0 (on sait déjà que 0 est une valeur propre de  $A$ ). Comme  $\dim \text{SEP}(A, 0) = n - 1 < n$ ,  $A$  n'est pas diagonalisable.

*Si  $a = 0$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .*

14. Supposons  $a \neq 0$ .  $AU = U {}^t VU = U(a) = aU$ , avec  $U \neq 0$ . Donc  $a$  est effectivement une valeur propre de  $A$ . D'une part,  $\text{SEP}(A, a)$  est au moins de dimension 1, d'autre part,  $\text{SEP}(A, 0)$  et  $\text{SEP}(A, a)$  étant en somme directe avec  $\dim(\text{SEP}(A, 0)) = n - 1$ ,  $\text{SEP}(A, a)$  est au plus de dimension 1. Donc  $\dim(\text{SEP}(A, a)) = 1$ .

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{Sp}(A) = \{0, a\}$  et  $\dim(\text{SEP}(A, 0)) + \dim(\text{SEP}(A, a)) = n$ , donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

15. 13 et 14 induisent la condition nécessaire et suffisante suivante.

*Une matrice de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.*

## Partie VI.

16. Montrons que  $\langle ., . \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive grâce à la partie II.

- Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\langle \lambda A + B, C \rangle = \text{Tr}({}^t (\lambda A + B)C) = \text{Tr}(\lambda {}^t AC + {}^t BC) = \lambda \text{Tr}({}^t AC) + \text{Tr}({}^t BC) = \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle.$$

$$\langle B, A \rangle = \text{Tr}({}^t BA) = \text{Tr}({}^t ({}^t BA)) = \text{Tr}({}^t AB) = \langle A, B \rangle.$$

Donc  $\langle ., . \rangle$  est bilinéaire symétrique.

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}({}^t AA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \text{ donc } \langle A, A \rangle \geq 0, \text{ et, puisque } \langle A, A \rangle \text{ est une somme de termes tous positifs, elle}$$

ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, donc  $\langle A, A \rangle = 0$  entraîne  $A = O$ .

Donc  $\langle ., . \rangle$  est définie positive.

$$\langle ., . \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \text{Tr}({}^t MN) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**17.**  ${}^t S = {}^t(V^t V) = V^t V = S$  donc  $S$  est symétrique.

$$S^2 = (V^t V)(V^t V) = V({}^t V V)^t V = V^t V = S \text{ car } {}^t V V = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1.$$

S est symétrique et vérifie  $S^2 = S$ .

**18.a)** Soit  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\Phi(M) = SM$ ,  $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

De plus :  $\Phi(\lambda M + N) = S(\lambda M + N) = \lambda SM + SN = \lambda\Phi(M) + \Phi(N)$ .

- Soit  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . Puisque  $S$  est symétrique, on a :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = {}^t(SM)N = {}^tM^tSN = {}^tM(SN) = \langle M, \Phi(N) \rangle.$$

$\Phi$  est un endomorphisme symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**b)** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $\Phi^2(M) = S(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$ .

$\Phi^2 = \Phi$ , donc  $\Phi$  est un projecteur.

Comme  $\Phi(I_n) = S$ ,  $\Phi$  n'est pas l'endomorphisme nul et n'est pas l'identité. En effet,  $\text{rg}(S) = 1$  donc  $S$  n'est ni nulle ni égale à  $I_n$ .

Ainsi,  $\text{Sp}(\Phi) = \{0, 1\}$ .

**c)** Comme  $\text{Ker}\Phi = \text{SEP}(\Phi, 0)$  et  $\text{Ker}(\Phi - e) = \text{SEP}(\Phi, 1) = \text{Im}\Phi$ , on a :

- $\text{Ker}\Phi$  et  $\text{Ker}(\Phi - e)$  sont supplémentaires car  $\Phi$  est un projecteur ;
- $\text{Ker}\Phi$  et  $\text{Ker}(\Phi - e)$  sont orthogonaux car les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont orthogonaux.

$\text{Ker}\Phi$  et  $\text{Ker}(\Phi - e)$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .