Corrigé Maths EML 2016 ECS

Problème 1

Partie I : Un exemple

1. $\begin{cases} P_1+P_2=I_3 \\ 4P_1+9P_2=A \end{cases} \iff \begin{cases} 5P_1=9I_3-A \\ 5P_2=A-4I_3 \end{cases} \iff \begin{cases} P_1=\dfrac{1}{5}(9I_3-A) \\ \\ P_2=\dfrac{1}{5}(A-4I_3) \end{cases}$

   $P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) $P_1^2=P_1,\ P_1P_2=0_3,\ P_2P_1=0_3$ et $P_2^2=P_2$.

   (b) Comme les matrices $4P_1$ et $9P_2$ commutent, la formule du binôme donne :
   $$\forall k\in\mathbb{N}, A^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}4^iP_1^i9^{k-i}P_2^{k-i}=4^kP_1+\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}4^i9^{k-i}P_1^iP_2^{k-i}}_{=0}+9^kP_2$$
   car en raison de 2(a) : $\forall i\geqslant 1,\forall j\geqslant 1, P_1^i=P_1, P_1^iP_2^j=0, P_2^j=P_2$.

3. Avec $B=2P_1+3P_2$, $B^2=4P_1^2+12P_1P_2+9P_2^2$ puisque P_1 et P_2 commutent. Donc $B^2=4P_1+9P_2=A$.
   $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2=A$.

4. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $Sp(A)=\{4,9\}$.
   Remarques conclusives, et pour introduire la parti II :
   - A est diagonalisable avec $E_4=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $E_9=Vect\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$;
   - en travaillant dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et en notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, les matrices de P_1 et P_2 sont les matrices représentant les projecteurs p_1 et p_2 de $\mathbb{R}^3$ sur $E_4=Im(p_1)$ et $E_9=Im(p_2)$ respectivement, et on a la *décomposition spectrale*
   $$f=4p_1+9p_2.$$

Partie II : Étude des puissances de f

5. Soit $P=\sum_{i=0}^{m}a_kX^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_m[X]$.
   $$P(f)=\sum_{k=0}^{m}a_kf^k=\sum_{k=0}^{m}a_k\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^kp_i\right)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_k\lambda_i^kp_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{m}a_k\lambda_i^kp_i$$
   $$P(f)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{m}a_k\lambda_i^k\right)p_i=\sum_{i=1}^{m}P(\lambda_i)p_i$$

6. $N(f)=\sum_{i=1}^{m}N(\lambda_i)p_i=\sum_{i=1}^{m}0p_i=\tilde{0}$ puisque les λ_i sont les racines de N.

7. (a) Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,m]\!]^2$.
Si $i \neq j$, λ_j est une racine de M_i donc $L_i(\lambda_j) = 0$ par définition de L_i.
Si $i = j$, $L_i(\lambda_j) = L_i(\lambda_i) = \dfrac{M_i(\lambda_i)}{M_i(\lambda_i)} = 1$.

(b) Soit $i \in [\![1\,;\,m]\!]$. $L_i(f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} L_i(\lambda_j)p_j = L_i(\lambda_i)p_i + \underbrace{\sum_{j\neq i} L_i(\lambda_j)p_j}_{=\tilde{0}} = p_i$.

8. (a) $e = f^0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i$.

(b) • Soit $u \in E$. $u = e(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i(u)$ avec $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,,\quad p_i(u) \in Im(p_i)$.

Donc $u \in \displaystyle\sum_{i=1}^{m} Im(p_i)$, et ainsi $E \subset \displaystyle\sum_{i=1}^{m} Im(p_i)$.

• Réciproquement, comme $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,,\quad Im(p_i) \subset E$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} Im(p_i) \subset E$.

Par double inclusion, $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} Im(p_i)$.

9. (a) $M_i(\lambda_i)(X-\lambda_i)L_i = (X-\lambda_i)M_i == (X-\lambda_i)\displaystyle\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j) = N$.

(b) Par 6. et 7.b et 9.a : $\tilde{0} = N(f) = M_i(\lambda_i)(f-\lambda_i e)L_i(f) = M_i(\lambda_i)(f-\lambda_i e)p_i$.
Soit $v \in Im(p_i)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = p_i(u)$.
$(f-\lambda_i e)(v) = (f-\lambda_i e)p_i(u) = \dfrac{1}{M_i(\lambda_i)}\tilde{0}(u) = 0$, donc $v \in Ker(f-\lambda_i e)$.
Ainsi $Im(p_i) \subset Ker(f-\lambda_i e)$.

10. Observons que, pour tout i de $[\![1\,;\,m]\!]$, $p_i \neq \tilde{0}$ entraîne $Im(p_i) \neq \{0\}$.
Ainsi $Ker(f-\lambda_i e) \neq \tilde{0}$, donc λ_i est une valeur propre de f.
Ensuite $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} Im(p_i) \subset \sum_{i=1}^{m} Ker(f-\lambda_i e)$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} Ker(f-\lambda_i e) \subset E$.
Ainsi, $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} Ker(f-\lambda_i e)$. Comme par propriété du cours, les sous-espaces propres $Ker(f-\lambda_i e)$ sont en somme directe, ils sont supplémentaires, f est diagonalisable et $Sp(f) = \{\lambda_i / 1 \leqslant i \leqslant m\}$.
Resta à justifier que $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,,\quad Im(p_i) = Ker(f-\lambda_i e)$.
On a par 9(b), $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,,\quad \dim(Imp_i) \leqslant \dim Ker(f-\lambda_i e)$.
Par 8(b) et le début de 10, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dim(Imp_i) \geqslant \dim(E) = \sum_{i=1}^{m} Ker(f-\lambda_i e)$.
Ceci n'est possible que si $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,,\quad \dim(Im(p_i)) = \dim Ker(f-\lambda_i e)$ (en effet, si pour un seul des i, on avait $\dim(Im(p_i)) < \dim Ker(f-\lambda_i e)$, on aurait $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dim(Im(p_i)) < \dim(E)$... ce qui est impossible !) Par conséquent, $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,,\quad Im(p_i) = Ker(f-\lambda_i e)$: les $Im(p_i)$ sont les sous-espaces propres de f.

11. (a) On peut observer que p_i et p_j commutent car :
$p_i \circ p_j = L_i(f) \circ L_j(f) = (L_i \times L_j)(f) = (L_j \times L_i)(f) = L_j(f) \circ L_i(f) = p_j \circ p_i$.
Alors, pour tout u de E, $p_i \circ p_j(u) = p_j \circ p_i(u)$ donc $p_i \circ p_j(u) \in Im(p_i) \cap Im(p_j)$, or les sous-espaces propres sont en somme directe, donc $Im(p_i) \cap Im(p_j) = \{0\}$, donc $p_i \circ p_j(u) = 0$.

(b) Pour tout i de $[\![1\,;\,m]\!]$, $p_i = p_i \circ e = p_i \circ \sum_{j=1}^{m} p_j = \sum_{j=1}^{m} p_i \circ p_j = p_i \circ p_i + \tilde{0} = p_i^2$.

(c) Pour tout i de $[\![1\,;\,m]\!]$, $p_i \circ f = p_i \circ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_i \circ p_j = \lambda_i p_i^2 + \tilde{0} = \lambda_i p_i$.

12. • Raisonnons par récurrence, l'initialisation est assurée par les hypothèses sur f. Voyons l'hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.

Alors $f^{k+1} = f^k \circ f = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\right) \circ f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k (p_i \circ f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{k+1} p_i$.

Ceci achève la récurrence et : $\forall k \in N, f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.

• Le même raisonnement qu'en 5. donne cette fois :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.$$

Partie III : Intervention d'un produit scalaire

13. Soit x, y et z trois vecteurs de E et μ un réel.

$\varphi(\mu x + y, z) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(\mu x + y), p_j(z)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \mu p_i(x) + p_i(y), p_j(z)\rangle$

$\varphi(\mu x + y, z) = \sum_{i=1}^{m} (\mu \langle p_i(x), p_j(z)\rangle + \langle p_i(y), p_j(z)\rangle) = \mu\varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

φ est linéaire à gauche.

φ est symétrique par symétrie du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(x)\rangle = \sum_{i=1}^{m} ||p_i||^2 \geqslant 0$.

Supposons $\varphi(x, x) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{m} ||p_i(x)||^2 = 0$, donc $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,, ||p_i(x)||^2 = 0$, donc $\forall i \in [\![1\,;\,m]\!]\,, \qquad p_i(x) = 0$.

Or par 8(a), $x = e(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)$, donc $x = 0$.

Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur E.

14. Soit x et y deux vecteurs de E.

$\varphi(x, f(y)) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(f(y))\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), \lambda_i p_i(y)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle p_i(x), p_i(y)\rangle$

$\varphi(f(x), y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(f(x)), p_i(y)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i p_i(x), p_i(y)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle p_i(x), p_i(y)\rangle$

Donc $\varphi(x, f(y)) = \varphi(f(x), y)$, ce qui prouve que f est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire φ.

Ceci démontre à nouveau que f est diagonalisable.

15. On sait déjà, d'après 11(b), que p_i est un projecteur, sur $Im(p_i)$. Il suffit que p_i soit symétrique pour φ pour que p_i soit le projecteur orthogonal sur $Im(p_i)$, toujours pour le produit scalaire φ. Soit $(x, y) \in E^2$.

$\varphi(x, p_i(y)) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i^2(y)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i^2(x), p_i(y)\rangle = \varphi(p_i(x), y)$.

p_i est bien symétrique pour φ : p_i est le projecteur orthogonal sur $Im(p_i) = E_{\lambda_i}$ pour le produit scalaire φ.

Problème 2

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{n \to +\infty} \exp(-x \ln(n)) = +\infty$, donc le terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.
   De même, si $x = 0$, le terme général $(-1)^{n+1}$ diverge.
   Puisqu'une condition *nécessaire* de convergence de la série est la convergence du terme général (vers 0), si $x \in \mathbb{R}^-$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. (a) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)} - u_{2p} = -\frac{1}{(2p+2)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} \geqslant 0$ car $(2p+1)^x \leqslant (2p+2)^x$.
   $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \leqslant 0$ car $(2p)^x \leqslant (2p+1)^x$.
   $u_{2p} - u_{2p-1} = \frac{-1}{(2p)^x} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.
   (u_{2p}) est croissante, (u_{2p-1}) est décroissante, et leur différence tend vers 0 : ces suites sont adjacentes, donc convergent, vers une même limite, notée $S(x)$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$.
   Comme $\lim_{p \to +\infty} u_{2p} = S(x)$, $\exists p_1 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geqslant p_1, |u_{2p} - S(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Comme $\lim_{p \to +\infty} u_{2p-1} = S(x)$, $\exists p_2 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geqslant p_2, |u_{2p-1} - S(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Prenons $n_0 = max(2p_1, 2p_2 - 1)$. Soit $n \geqslant n_0$.
   Si n est pair, n s'écrit $n = 2p$ avec $p \geqslant p_1$ donc $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Si n est impair, n s'écrit $n = 2p - 1$ avec $p \geqslant p_2$ donc $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

   (c) Ainsi, u converge vers $S(x)$, et comme u est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, cette série converge.

   (d) Comme (u_{2p}) est croissante de limite $S(x)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leqslant S(x)$.
   Comme (u_{2p-1}) est décroissante de limite $S(x)$,
   $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si n est pair, écrivons $n = 2p$. Par (d), $u_n \leqslant S(x) \leqslant u_{n+1}$.
   Donc $0 \leqslant S(x) - u_n \leqslant u_{n+1} - u_n$, et comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^x}$,

   $|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.
   Si n est impair, écrivons $n = 2p - 1$. Par (d), $u_{n+1} \leqslant S(x) \leqslant u_n$.
   Donc $0 \geqslant S(x) - u_n \geqslant u_{n+1} - u_n$, et comme $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{(n+1)^x}$, en passant à la valeur absolue, $|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.
   Dans tous les cas, $|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.

(f)
```
function s=serie(x,e)
  n=1
  s=1
  while (1/(n+1)^x)>e then
  n=n+1
  s=s+(-1)^(n+1)/(n^x)
  end
endfunction
```

3. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = \dfrac{1}{k^x}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k+1} v_k$ est la somme des v_k pondérés d'un signe « $-$ » lorsque k est pair.

   On peut la calculer en prenant la somme des termes d'indices impairs moins celle des termes d'indices pairs :

   $$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(2i-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i^x}.$$

   On peut aussi la calculer en sommant tous les v_k sans distinction de parité et en retranchant deux fois la somme des termes d'indices pairs :

   $$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - 2 \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

4. (a) La seconde relation de 3. donne, avec $x = 1$,

   $$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$ puis en décalant l'indice de n,

   $$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\big(1+(k/n)\big)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)}.$$

   (b) On reconnaît dans cette dernière expression la somme de Riemann d'ordre n de la fonction continue $f : [\,0\,;\,1\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Par continuité de f, le théorème des sommes de Riemann assure que v converge et que :

   $$S(1) = \lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2).$$

5. 3. avec $x = 2$ donne $u_{2p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}$.

   En passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$,

   $S(2) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

6. La fonction intégrée est continue et positive sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

   - $\dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{2} t^x$, or $\displaystyle\int_0^1 t^x \mathrm{d}t$, que l'on peut écrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{-x}} \mathrm{d}t$, converge si, et seulement si, $-x < 1$, c'est-à-dire $x > -1$. Par équivalence de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > -1$.
   - $\dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^x e^{-t}$ en $+\infty$. Or, lorsque $x > -1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ existe puisque $\Gamma(x+1)$ existe. Par équivalence de fonctions positives, si $x > -1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$ existe.
   - Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$ existe si, et seulement si, $x > -1$.

7. (a) Par somme de termes d'une suite géométrique :
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\mathrm{e}^{-kt}=\sum_{k=1}^{n}(-\mathrm{e}^{-t})^k=-\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nt}}{1+\mathrm{e}^{-t}}=-\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nt}}{\mathrm{e}^{t}+1}$$
En multipliant par $-t^x$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}t^x\mathrm{e}^{-kt}=g_x(t)-(-1)^n g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}$... ce qu'il fallait démontrer !

(b) Le changement de variable $u=kt$ est admissible puisque de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif (strictement croissant car $k\geqslant 1$). Par ce changement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$ devient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^x\mathrm{e}^{-u}}{k^{x+1}}\mathrm{d}u$. Par linéarité, on reconnaît $\dfrac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1)$, qui existe. Par le théorème de changement de variable, $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1)$.

(c) Comme $\forall t>0, 0\leqslant g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}\leqslant g_x(t)$ puisque $0<\mathrm{e}^{-nt}<1$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)\mathrm{d}t$ existe, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$ existe.

$\forall t>0, 0<g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}\leqslant t^x\mathrm{e}^{-nt}$, donc par croissante de l'intégrale, et par le calcul de 7.(b), $0\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1)$.

Et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1)=0$ puisque $x+1>0$, on a, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t=0$.

(d) Par les questions précédentes (et par linéarité de l'intégrale),
$$I(x)=\int_0^{+\infty}g_x(t)\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^{+\infty}g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$
$$I(x)=(-1)^n\int_0^{+\infty}g_x(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}\Gamma(x+1)$$
En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $I(x)=S(x+1)\Gamma(x+1)$.

8. $I(1)=S(2)\Gamma(2)=\dfrac{\pi^2}{12}\times 1!=\dfrac{\pi^2}{12}$

Partie III : Étude d'une variable aléatoire

9. $\forall t\in\mathbb{R}, f(-t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+e^{-t})^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\left(\mathrm{e}^{t}\right)^2}\times\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+e^{-t})^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{(\mathrm{e}^{t}+1)^2}=f(t)$.

10. f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
Soit $A<B$.
$$\int_A^B f(t)\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{t}}\right]_A^B=-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{B}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{A}}\underset{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}{\longrightarrow}1.$$
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.
Ainsi f est une densité d'une variable aléatoire.

11. Le calcul précédent avec $A\to-\infty$ et $B=x$ donne :
$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}.$

12. (a) $t \mapsto t^n f(t)$ est continue et positive sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

$t^n f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^n \mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe (c'est $\Gamma(n+1)$).

Par équivalence de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$ existe.

Puisque f est paire, $t \mapsto t^n f(t)$ a la même parité que l'entier n : paire si n est pair et impaire sinon.

Du coup, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$ existe, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$ existe.

Ainsi X admet un moment d'ordre n.

(b) Comme $t \mapsto t^{2p+1} f(t)$ est une fonction impaire et intégrable sur $]\,-\infty\,;\,+\infty\,[$, son intégrale sur $]\,-\infty\,;\,+\infty\,[$ est nulle. Autrement dit, $m_{2p+1}(X) = 0$.

(c) $m_{2p}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t)\mathrm{d}t$ par parité.

Soit $B \in \mathbb{R}^+$. Effectuons une intégration par parties avec $t \mapsto -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$ et $t \mapsto t^{2p}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,B\,]$.

$$\int_0^B t^{2p} f(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{2p}}{1+\mathrm{e}^t}\right]_0^B + \int_0^B \frac{2pt^{2p-1}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t = -\frac{B^{2p}}{1+\mathrm{e}^B} + 0 + 2p\int_0^B \frac{t^{2p-1}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

En faisant tendre B vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t)\mathrm{d}t = 2pI(2p-1)$.

Donc $m_{2p}(X) = 2 \times 2pI(2p-1) = 4pI(2p-1)$.

13. $E(X) = m_1(X) = 0$ par 12.(b).

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = m_2(X) - 0^2 = 4I(1) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

14. (a) • Comme pour tout n $X_n(\Omega) = \mathbb{R}$, $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}$.

$\forall y \in \mathbb{R},\quad F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leqslant y) = P\left([X_1 \leqslant y] \cap [X_2 \leqslant y] \cap \dots \cap [X_n \leqslant y]\right)$

Par indépendance des (X_n),

$$F_Y(y) = \prod_{i=1}^n P(Y_i \leqslant y) = (F_X(y))^n = \left(\frac{\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^y}\right)^n.$$

• $Z_n(\Omega) = \mathbb{R}$ et :

$\forall z \in \mathbb{R},\quad F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leqslant z) = P(Y_n \leqslant z + \ln(n)) = F_{Y_n}(z + \ln(n))$

$$F_{Z_n}(z) = \left(\frac{\mathrm{e}^{z+\ln(n)}}{1+\mathrm{e}^{z+\ln(n)}}\right)^n = \left(\frac{n\mathrm{e}^z}{1+n\mathrm{e}^z}\right)^n$$

(b) Soit $z \in \mathbb{R}$. Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z)$.

$$F_{Z_n}(z) = \exp\left(n\ln\frac{n\mathrm{e}^z}{1+n\mathrm{e}^z}\right) = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{1+n\mathrm{e}^z}\right)\right)$$

Comme $\dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^z} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^z}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^z} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n\mathrm{e}^z}$.

$n\ln\left(1 - \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^z}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{\mathrm{e}^z}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = \exp(-\mathrm{e}^{-z})$.

Comme $F : z \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-z})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, croissante (par composition de deux fonctions décroissantes ou par le signe de sa dérivée - voir l'expression de F' ci-après), de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F.

Une densité de cette variable est $F' : z \mapsto \mathrm{e}^{-z}\exp(-\mathrm{e}^{-z})$.