Corrigé Maths EML ECS 2018

Problème 1

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} t.$

Partie I : Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $W_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k du.$

1. On a

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1du = \pi/2 \\ W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)du = [-\cos(u)]_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

Donc $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque l'on ne doit plus avoir qu'une seule intégral, on les regroupe (linéarité)

$$\begin{aligned} W_k - W_{k+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^k \left(1 - \sin(x)^2\right) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^k \cos(u)^2 du \end{aligned}$$

$v(u) = \cos(u) : v'(u) = -\sin(u)$

$w'(u) = \cos(u)\sin(u)^k : w(u) = \dfrac{1}{k+1}\sin(u)^{k+1}$

et v et w sont de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ donc

$$\begin{aligned} W_k - W_{k+2} &= \left[\cos(u)\frac{1}{k+1}\sin(u)^{k+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(u)\frac{1}{k+1}\sin(u)^{k+1} du \\ &= 0 + \frac{1}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(u)\sin(u)^{k+1} du = \frac{1}{k+1}W_{k+2} \end{aligned}$$

$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1}W_{k+2}$$

3. Cela permet d'établir la relation de récurrence : $W_k = \left(\dfrac{1}{k+1} + 1\right) W_{k+2}$ et $\boxed{W_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2}W_k}$

Puis, récurrence :

Pour $n = 0 : w_0 = \pi/2 = \dfrac{0!}{2^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ alors

$$\begin{aligned} W_{2(k+1)} &= W_{2k+2} \\ &= \frac{2k+1}{2k+2}W_{k2} \\ &= \frac{2k+2}{2k+2}\frac{2k+1}{2k+2}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ complété} \\ &= \frac{1}{2^2(k+1)^2}\frac{(2k+2)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2k+2)!}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Et, par récurrence, pour tout entier k : $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}.$

Partie II : Une autre expression de $I(x)$

1. On doit montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k du$ par le changement de variable $t = \sin(u)$

   Récitation :

   $f : t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]0,1[$

   $\varphi : u \mapsto \sin(u)$ est une bijection croissante et de classe C^1 de $]0, \pi/2[$ sur $]0,1[$

   Donc, les deux intégrales sont de même nature $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$

   Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k du$ converge, alors $\int_0^1 \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = W_k.}$

2. $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt$ intégrale impropre en 1 car $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ continue $[0,1[$

   a) **Idée :** on réutilise ce qui précède

   Quand $t \to 1 : e^{xt} + e^{-xt} \to e^x + e^{-x}$ donc $\dfrac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \sim (e^x + e^{-x}) \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

   avec $e^x + e^{-x}$ constante par rapport à t.

   Or, $\int_0^1 \dfrac{t^0}{\sqrt{1-t^2}}$ converge

   donc, par équivalence de fonctions positives, $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge également.

   $\boxed{\text{Donc } I \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $I(-x) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-xt} + \mathrm{e}^{+xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = I(x)$

   $\boxed{\text{Donc } I \text{ est paire}}$

   b) On a $\boxed{I(0) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{0t} + \mathrm{e}^{-0t}}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_0^1 \dfrac{t^0}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2W_0 = \pi}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

   a) Soient $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

   $f : u \longmapsto \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}^+$ et $f^{(k)}(u) = \mathrm{e}^u + (-1)^k \mathrm{e}^{-u}$

   Pour $u \in [0, xt]$: $f^{(2n+1)}(u) = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$ donc $0 \leq f^{(2n+1)}(u) \leq e^u \leq e^{xt} \leq e^x$ et $\boxed{\left|f^{(2n+1)}(u)\right| \leq e^x}$ car $t \in [0,1]$

   Donc (Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction entre 0 et xt)

$$\left| f(xt) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(xt-0)^k \right| \leq \frac{|xt|^{2n+1}}{(2n+1)!}e^x \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}e^x \text{ donc}$$

   de même quand k est impair, $f^{(k)}(0) = e^0 - e^0 = 0$ et pour k pair $f^{(k)}(0) = 2$ donc

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(xt-0)^k = \sum_{k=0 : k \text{ pair}}^{2n} \frac{2}{k!}(xt)^k$$

   réindexé par $k = 2h$ on obtient $\boxed{\left|\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{h=0}^{n} \dfrac{2(xt)^{2h}}{(2h)!}\right| \leq \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^x}$.

b) On reconstruit alors l'inégalité sur $I(x)$: pour tout $t \in [0,1[$:

$$\boxed{\left|\frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t}^2}-\sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\right|\leq\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}}$$

avec les bornes croissantes

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t}^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}dt\right| &\leq \int_0^1\left|\frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t}^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt\\ &\leq \int_0^1\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}dt=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$

finalement

$$\left|I(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}\int_0^1\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}dt\right|\leq\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}$$

et, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boxed{\left|I(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}W_{2k}\right|\leq\frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}}.$

c) Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}\to 0$ (x est constante)

Donc $|\cdots|\to 0$ et $\sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}W_{2k}=\sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}\to I(x)$

et $\sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\to\frac{1}{\pi}I(x)$

Finalement, $\boxed{\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\text{ converge et }\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}=\frac{1}{\pi}I(x).}$

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

1. a) **Idée :** On se souvient que $\frac{\pi}{2}=W_0$

On doit donc comparer deux intégrales et pour cela comparer leurs contenus :

Pour tout $t\in[0,1]$: $\mathrm{e}^{-xt}\leq e^0$ donc, pour $t\in[0,1[$: $0\leq\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et (bornes croissantes) Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $\boxed{0\leq\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=W_0=\frac{\pi}{2}}.$

b) Pour tout $v\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $\frac{1}{1-v}-1=\frac{v}{1-v}\geq 0$

et

$$\begin{aligned}(1+v)^2-\frac{1}{1-v} &= \frac{(1+v)^2(1-v)-1}{1-v}=\frac{(1-v^2)(1+v)-1}{1-v}\\ &= \frac{v-v^2-v^3}{1-v}=\frac{v(1-v-v^2)}{1-v}\end{aligned}$$

$1-v-v^2$ peut se traiter comme polynôme du second degré.

Plus simplement ici : $0\leq v\leq\frac{1}{2}$ donc $0\leq v^2\leq\frac{1}{4}$ et $0\leq v+v^2\leq\frac{3}{4}$ donc $1-v-v^2\geq\frac{1}{4}\geq 0$ et $\frac{v(1-v-v^2)}{1-v}\geq 0$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } v \text{ de } \left[0,\frac{1}{2}\right] : 1\leq\frac{1}{1-v}\leq(1+v)^2}.$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
$\dfrac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} \sim_{t\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = W_0$ converge.

donc par équivalence de fonctions positives, $\boxed{\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt \text{ converge}}$.

Changement de variable $u = 1-t = \varphi(t)$ (forme compliquée, que l'on pourrait changer en $t = 1-u$, mais ce sens nous est imposé par l'énoncé).
On doit donc préparer le terrain avant d'intervenir. On prépare le terrain :
$1-t^2 = (1-t)(1+t) = (1-t)(2-(1-t))$ et $t = -(1-t)+1$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^1 -\frac{\mathrm{e}^{x[-(1-t)+1]}}{\sqrt{(1-t)(2-(1-t))}} \times -1dt$$

$f : u \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{x[-u+1]}}{\sqrt{u(2-u)}}$ est continue sur $]0,1[$
$\varphi : t \mapsto 1-t$ est une bijection décroissante et de classe C^1 de $]0,1[$ dans $]0,1[$ et $\varphi'(t) = -1$ donc les intégrales sont de même nature (convergentes) et

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_1^0 -\frac{\mathrm{e}^{x(1-u)}}{\sqrt{u(2-u)}}dt = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{1-u/2}\sqrt{u}}dt$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/2}}du}$.

d) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$
Idée : inégalités mystérieuses. Il faut aller chercher la solution plus haut dans l'énoncé : pour tout v de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$: $1 \leq \dfrac{1}{1-v} \leq (1+v)^2$
Or, pour $u \in [0,1]$: $\dfrac{u}{2} \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ donc $1 \leq \dfrac{1}{1-u/2} \leq \left(1+\dfrac{u}{2}\right)^2$ et $1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-u/2}} \leq 1+\dfrac{u}{2}$
multiplié par $\dfrac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \geq 0$

$$\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-u/2}}\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \leq \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{u}{2}\right)$$

avec les bornes croissantes

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}du \leq \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/2}}du \leq \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{u}{2}\right)du$$

en développant la troisième intégrale

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}du \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}du + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu}\sqrt{u}du.$$

e) Une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\dfrac{1}{2}$ est $\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}e^{-\left(t\sqrt{2}\right)^2/2} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}}$

Avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1/2)$ on a $\mathrm{P}(X \geq 0) = \dfrac{1}{2} = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$

Donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ converge et vaut $\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Sa variance est $\dfrac{1}{2} = E(X^2) - E(X^2) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-t^2} dt$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$(converge)

et, par parité $\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}}$

f) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \varphi(u) = \sqrt{xu}$, (sens compliqué)

φ est une bijection croissante et C^1 de $]0,1[$ dans $]0, \sqrt{x}[$ et $\varphi'(u) = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{u}}$

il faut préparer le terrain :

$\dfrac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\sqrt{xu}^2} \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{u}} = f(\varphi(u))\varphi'(u)$ avec $f : t \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}$ continue sur $]0,1[$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

et $\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2} \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand $x \to +\infty$ donc $\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et par produit $\boxed{\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}}$

de même

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu} \sqrt{u} du &= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{x\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\sqrt{xu}^2} \sqrt{xu}^2 \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{u}} \mathrm{e}^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} t^2 \mathrm{e}^{-t^2} dt \end{aligned}$$

et $\int_0^{\sqrt{x}} t^2 \mathrm{e}^{-t^2} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ donc

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu} \sqrt{u} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

et on a donc bien $\boxed{\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu} \sqrt{u} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.}$

2. On a

$$I(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

la seconde intégrale est bornée puisque $0 \leq \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \dfrac{\pi}{2}$

la première a été encadrée avec

$$\underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} du}_{a(x)} \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt}_{bx} \leq \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} du}_{a(x)} + \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xu} \sqrt{u} du}_{c(x)}$$

avec $a(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$

et $b(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}} = \mathrm{o}\, a(x)$ donc $a(x) + b(x) \sim a(x)$ on a donc

$$\underbrace{\frac{a(x)}{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}}}_{\to 1} \leq \frac{b(x)}{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}} \leq \underbrace{\frac{a(x)+b(x)}{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}}}_{\to 1}$$

et par encadrement, $\dfrac{b(x)}{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}} \to 1$ quand $x \to +\infty$

donc $\boxed{I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}}$

Partie IV : Une application en probabilités

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

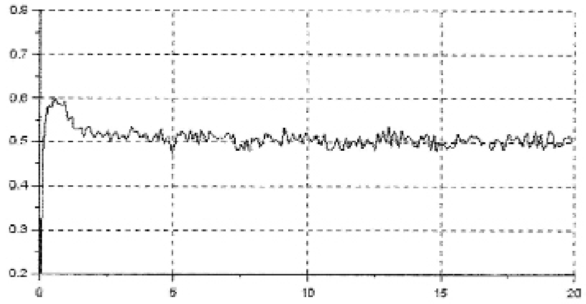
1. a) Pour estimer $\mathrm{P}(X = Y)$, on prend comme estimateur la moyenne statistique des réalisations de cet événement :
   On réalise n fois une double simulation de Poisson dont on teste l'égalité.
   Un compteur `cpt` totalise les occurences.

```
function r = estime(lambda) ;
    n=1000 ;cpt=0
    for i=1 :n
        if ( grand(1,1,'poi',lambda)==grand(1,1,'poi',lambda) ) then cpt=cpt+1
end
    end
    r=cpt/n
endfunction
```

   On peut également générer une liste de réalisations de `X` et de `Y` puis créer la liste des `X==Y` et enfin dénombrer les `%T` (true, vrai)
   La valeur `%T` est vue par `Scilab` comme 1. `sum([%T,%T,%F])=2`

```
function r = estime(lambda) ;
    n=1000 ;cpt=0
    X=grand(1,n,'poi',lambda) #
    X=grand(1,n,'poi',lambda)
    r=sum(X==Y)/n
endfunction
```

   b) Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ,
   une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}\mathrm{P}([X = Y])$ pour $\lambda \in]0; 20]$ et on obtient le graphe suivant :



$2\sqrt{\pi\lambda}\mathrm{P}([X=Y])$ semble donc tendre vers 0.5

Donc $2\sqrt{\pi\lambda}\mathrm{P}([X=Y]) = \dfrac{\mathrm{P}([X=Y])}{1/\left(2\sqrt{\pi\lambda}\right)}$ tend vers 1 et

$\boxed{\mathrm{P}([X=Y]) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \text{ quand } \lambda \text{ tend vers } +\infty}$.

Pour réaliser ce graphique, on peut procéder ainsi :

```
lambda=linspace(0,20,100)
Y=zeros(1,100)
for i=1 :100
    Y(i)=estime(lambda(i))*sqrt(%pi*lambda(i))
end
plot2d(lambda,Y)
```

2. On a $(X=Y) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} (X=k \cap Y=k)$ réunion d'incompatibles donc

   $\mathrm{P}(X=Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k \cap Y=k)$ et comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)\,\mathrm{P}(Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

   avec $e^{-\lambda}$ constante par rapport à k,

   donc $\boxed{\mathrm{P}([X=Y]) = \mathrm{e}^{-2\lambda}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}}$.

3. a) On se souvient que $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} = \dfrac{1}{\pi}I(x)$ pour $x \geq 0$.

   On ajuste avec $\dfrac{x}{2} = \lambda$ donc $x = 2\lambda$: $\boxed{\mathrm{P}([X=Y]) = \dfrac{e^{-2\lambda}}{\pi}I(2\lambda)}$.

   b) Et comme $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$ en substituant $x = 2\lambda \to +\infty$ on a

   $\boxed{\mathrm{P}([X=Y]) \sim \dfrac{e^{-2\lambda}}{\pi}\dfrac{e^{2\lambda}\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\lambda}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \text{ lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty.}$

Problème 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $B = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. a) Pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = \dfrac{1}{n}X(1-X)P' + XP$ donc $\varphi(P)$ est bien définie.
   Soient $P, Q \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha P + Q) &= \frac{1}{n}X(1-X)(\alpha P + Q)' + X(\alpha P + Q) \\
&= \alpha\left(\frac{1}{n}X(1-X)P' + XP\right) + \left(\frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ\right) \\
&= \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est une application linéaire}}$

   b) $\boxed{\varphi(X^n) = \dfrac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1} + X \cdot X^n = X^n}$

   c) Et si $\deg Q \leq n-1$ alors $\deg\left(\dfrac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ\right) \leq n$
   Donc si $P \in E$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = \alpha X^n + Q$
   et $\varphi(P) = \alpha\varphi(X^n) + \varphi(Q)$ donc $\deg(\varphi(P)) \leq n$ et $\varphi(P) \in E$
   Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$

2. Pour $1 \leq k < n$:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(X^k\right) &= \frac{1}{n}X(1-X)kX^{k-1} + XX^k \\
&= \frac{k}{n}X^k + \frac{n-k}{n}X^{k+1}
\end{aligned}$$

   et $\varphi(1) = X$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$
   matrice échelonnée donc le rang est le nombre de pivots :
   $\boxed{\operatorname{rg}(A) = n-1}$

3. a) Comme $\operatorname{rg}(A) = n-1$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$ (théorème du rang)
   Donc $\ker(\varphi) \neq \{0\}$
   φ n'est pas injejctif

b) Soit P un polynôme non nul de $\ker(\varphi)$.

On a alors$\varphi(P) = \dfrac{1}{n}X(1-X)P' + XP = X\left[\dfrac{1}{n}(1-X)P' + P\right] = 0$

(polynôme nul)

Donc $\dfrac{1}{n}(1-X)P' + P = 0$

En particulier, en 1 : $\varphi(P)(1) = \dfrac{1}{n}(1-1)P'(1) + P(1) = P(1) = 0$

Donc 1 est racine de P

Si $\alpha \neq 1$ est racine de P alors $0 = \dfrac{1}{n}(1-\alpha)P'(\alpha) + P(\alpha) = \dfrac{1}{n}(1-\alpha)P'(\alpha)$ donc $P'(\alpha) = 0$

Donc α est racine d'ordre 2 de P, donc de P'.

Et pour tout entier k (récurrence) α sera racine d'ordre k

Donc P est le polynôme nul. Ce qui est faux.

$\boxed{\text{Donc 1 est la seule racine de } P}$

Si $\deg(P) = m < n$ alors il existe Q de degré$< m$ et $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha X^m + Q$ et $\varphi(P) = \alpha\varphi(X^m) + \varphi(Q)$

Et comme $\deg(\varphi(X^m)) = m + 1 > \deg(\varphi(Q))$ alors $\deg(\varphi(P)) = m + 1$ et $\varphi(P) \neq 0$

$\boxed{\text{Donc } \deg(P) = n}$

Rédaction beaucoup plus rapide si on a déjà idée de ce qu'est une base du noyau (idée qui n'est amenée qu'à la question suivante)

$\varphi((X-1)^n) = \dfrac{1}{n}X(1-X)n(X-1)^{n-1} + X(X-1)^n = 0$

Récitation : Donc $(X-1)^n$ est une famille libre (un vecteur non nul) de 1 vecteur de $\ker(f)$ et $\dim\ker(f) = 1$ donc $((X-1)^n)$ est une base du noyau.

Donc, $\ker(\varphi) = \{\alpha(X-1)^n \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ et les polynômes du noyau sont des polynômes de degré n qui ont 1 pour seule racine.

c) **Idée :** Le noyau étant de dimension 1, il suffit de trouver un vecteur non nul du noyau pour avoir une base.

Ce polynôme n'a que 0 comme racine. Sa décomposition en éléments simple est donc de la forme $\alpha(X-1)^k$

Et comme il est de degré , c'est $\alpha(X-1)^n$.

Récitation la rédaction est ci dessus.

4. A est triangulaire. Ses valeurs propres sont sur la diagonale.
   Donc φ a $n+1$ valeurs propres distinctes. Et $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

5. On pose, pour tout k de $[[0, n]]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) **Idée :** On se doute que P_k va être vecteur propre. On cherche donc à faire réappapraîrte une forme factorisée

Pour tout k de $[[1, n-1]]$, $P_k' = kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}$ (nulle pour $n = k$)

$$\begin{aligned}
\varphi(P_k) &= \frac{1}{n}X(1-X)\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right] + XX^k(1-X)^{n-k} \\
&= X^k(1-X)^{n-k}\left[\frac{k}{n}(1-X) - \frac{n-k}{n}X + X\right] \\
&= \frac{k}{n}P_k
\end{aligned}$$

b) ce qui est vrai encore pour $k = 0$ et $k = n$

c) Donc $P_k \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\dfrac{k}{n}$

Les valeurs propres étant distinctes, la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

Récitation c'est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

Donc $\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } E}$

et la matrice de φ dans cette base est $\begin{pmatrix} 0/n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & n/n \end{pmatrix}$

d) On a ici $n+1$ valeurs propres distinctes.

Il n'y en a donc pas d'autres.

$\boxed{\text{Les sous espaces propres de } \varphi \text{ sont donc } \mathrm{Vect}(P_k) \text{ pour } k \in [[0, n]]}$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

1. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon. On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

a) $Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$

$(Z_2 = 0)$ signifie qu'au second tirage, on n'obtient pas de nouveau numéro.

C'est à dire que l'on retire le même numéro qu'au premier.

Donc $\boxed{\mathrm{P}(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{n}}$ car les n boules sont équiprobables.

d'où $\boxed{\mathrm{P}(Z_2 = 1) = \dfrac{n-1}{n}.}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout j de $[[1, k]]$, si $(Y_k = j)$, on a déjà obtenus j numéros. Et il y en a donc $n - j$ que l'on a pas obtenus.

La probabilité d'obtenir un de ceux ci est donc $\boxed{\mathrm{P}_{[Y_k = j]}([Z_{k+1} = 1]) = \dfrac{n-j}{n} = 1 - \dfrac{j}{n}}$

Comme,en k tirages on peut obtenir entre 1 et k numéros distincts, $(Y_k = j)_{j \in [[1,k]]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulle et

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)\, \mathrm{P}_{Y_k = j}(Z_{k+1} = 1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathrm{P}(Y_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j \mathrm{P}(Y_k = j) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{P}(Z_{k+1}=1)=1-\frac{1}{n}\mathrm{E}(Y_k)}$.

c) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Z_k compte le nombre de numéro rajouté lors du $n^{iéme}$ tirage (0 ou 1)
Donc, $\sum_{j=1}^{k} Z_j$ est le nombre total de numéros ajouté en k tirage. Et en partant de 0,

$$\boxed{Y_k=\sum_{j=1}^{k} Z_j}$$

Donc $E(Y_k)=\sum_{j=1}^{k} E(Z_j)$ et comme Z_j suit une loi de Bernouilli, $E(Z_j)=\mathrm{P}(Z_j=1)$ d'où

$$\boxed{\mathrm{P}([Z_{k+1}=1])=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{P}([Z_j=1])}$$

d) D'où une récurrence avec prédécesseurs puisque l'on utilise tous les termes précédents :
$\mathrm{P}(Z_1=1)=1=\left(1-\frac{1}{n}\right)^0$

Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $j\in[[1,n]]$: $\mathrm{P}([Z_j=1])=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}$ alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z_{k+1}=1) &= 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{P}(Z_j=1)\\
&= 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} \quad \text{avec } i=j-1\\
&= 1-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i}\\
&= 1-\frac{1}{n}\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Z_k=1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}}$.

e) Comme $\mathrm{P}(Z_{k+1}=1)=1-\frac{1}{n}\mathrm{E}(Y_k)$ on a donc $E(Y_k)=n\left[1-\mathrm{P}(Z_{k+1}=1)\right]$
et $\boxed{E(Y_k)=n\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]}$

2. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}([Y_k=i])X^iG_k=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}([Y_k=i])X^i$$

a) On a $G_k=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}([Y_k=i])X^iG_k=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{P}([Y_k=i])X^i$ car $Y(\Omega)=[[1,k]]$ pour $k\geq 1$
$G_0=\mathrm{P}(Y_0=0)X^0=1$
$G_1=\mathrm{P}(Y_1=0)X^0+\mathrm{P}(Y_1=1)X=X$ car $Y_1=1$
$G_2=\mathrm{P}(Y_2=0)X^0+\mathrm{P}(Y_2=1)X+\mathrm{P}(Y_2=2)X^2$

$Y_2 = 1$ signifie que l'on a eu le même numéro aux deux tirages donc que l'on n'a pas de nouveau numéro au second.

Idée on exprime avec les événements dont on a calculé déjà la probabilité.

$(Y_2 = 1) = (Y_1 = 1) \cap (Z_2 = 0)$ et $\mathrm{P}(Y_2 = 1) = \mathrm{P}(Y_1 = 1)\,\mathrm{P}_{Y_1=1}(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{n}$

$(Y_2 = 2) = (Y_1 = 1) \cap (Z_2 = 1)$ et $\mathrm{P}(Y_2 = 2) = \mathrm{P}(Y_1 = 1)\,\mathrm{P}_{Y_1=1}(Z_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{n}$

donc $\boxed{G_0 = 1 : G_1 = X : G_2 = \dfrac{1}{n}X + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) X^2}$

3. a) Pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[[0, n]]$:

$(Y_{k+1} = i)$ si l'on a obtenus i numéros distincts au $k + 1^{ième}$ tirage.

Cela arrive,

ou bien quand on en a eu un de plus au $k + 1^{ième}$ et un de moins avant $(i - 1)$

ou bien quand on n'en a pas eu un de plus et qu'on avait déjà eu i numéros avant.

Donc $(Y_{k+1} = i) = (Y_k = i - 1) \cap (Z_{k+1} = 1) \cup (Y_k = i) \cap (Z_{k+1} = 0)$

réunion d'incompatibles

donc $\mathrm{P}(Y_{k+1} = i) = \mathrm{P}(Y_k = i - 1)\,\mathrm{P}_{(Y_k=i-1)}(Z_{k+1} = 1) + \mathrm{P}(Y_k = i)\,\mathrm{P}_{(Y_k=i)}(Z_{k+1} = 0)$

avec $\mathrm{P}(Y_k = i - 1) = 1 - \dfrac{i-1}{n}$ et $\mathrm{P}_{(Y_k=i)}(Z_{k+1} = 0) = 1 - \mathrm{P}_{(Y_k=i)}(Z_{k+1} = 1) = \dfrac{i}{n}$

donc $\boxed{\mathrm{P}(Y_{k+1} = i) = \left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)\mathrm{P}(Y_k = i - 1) + \dfrac{i}{n}\mathrm{P}(Y_k = i)}$

b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(Y_{k+1} = i)\, X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\mathrm{P}(Y_k = i - 1) + \frac{i}{n}\mathrm{P}(Y_k = i)\right] X^i \text{ réindexé } j = i - 1 \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j+1} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\mathrm{P}(Y_k = i)\, X^i
\end{aligned}$$

on fait alors apparaître la dérivée$G_k' = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j-1}$

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= X\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)\, X^j - \frac{1}{n}X^2\sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j-1} + \frac{1}{n}X\sum_{i=1}^{n} i\mathrm{P}(Y_k = i)\, X^{i-1} \\
&= XG_k + \frac{1}{n}\left(-X^2 + X\right) G_k'
\end{aligned}$$

et on a bien $\boxed{G_{k+1} = \dfrac{1}{n}X(1 - X)G_k' + XG_k}$

c) On a montré que $G_{k+1} = \varphi(G_k)$ pour tout entier k, relation « géométrique »

Pour $k = 0 : G_0 = \varphi^0(G_0)$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k = \varphi^k(G_0)$

alors $G_{k+1} = \varphi(G_k) = \varphi\left(\varphi^k(G_0)\right) = \varphi^{k+1}(G_0)$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} : G_k = \varphi^k(G_0)}$

d) Pour tout k de $\mathbb{N}$, $G_k(1) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)$ donc $\boxed{G_k(1) = 1}$

et $G_k'(X) = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j-1}$ donc $G_k'(1) = \sum_{j=1}^{n} i\mathrm{P}(Y_k = j)$ et $\boxed{G_k'(1) = E(Y_k)}$

e) Pour tout k de $\mathbb{N}$ en reprenant la relation $G_{k+1} = \dfrac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k$ **idée** on redérive pour faire apparaître $E(Y_{k+1})$:

$$\begin{aligned} G_{k+1}' &= \frac{1}{n}(1-X)G_k' - \frac{1}{n}XG_k' + \frac{1}{n}X(1-X)G_k'' + G_k + XG_k' \text{ en } 1 \\ G_{k+1}'(1) &= -\frac{1}{n}G_k'(1) + G_k(1) + G_k'(1) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\mathrm{E}(Y_k) + 1}$

f) avec $u_k = \mathrm{E}(Y_k)$ on a ici une suite arithmético-géométrique.
Soit $c \in \mathbb{R} : c = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)c + 1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{n}c = 1 \Longleftrightarrow c = n$
Soit $v_k = u_k - n$
On a alors $v_{k+1} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)v_k$ géometrique et
$v_k = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k v_0$ avec $v_0 = u_0 - n = E(Y_0) - n = -n.$
On a donc $v_k = -n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k$ et $u_k = v_k + n$
donc $\boxed{E(Y_k) = -n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k + n}$ ce qui est cohérent.

4. On rappelle que les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont définis à la question 5. par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [[0,n]], \quad P_j = X^j(1-X)^{n-j}.$$

a) on a $\boxed{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j(1-X)^{n-j} = (X+1-X)^n = 1}$
Idée ce qui donne les coordonnées de 1 dans la base $(P_0, \cdots, P_n)$

b) Pour tout j de $[[0,n]]$, en réindexant $i - j = k$

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i &= \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k X^{k+j} = X^j \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-X)^k 1^{n-j-k} \\ \text{ajusté pour le binôme} &= X^j(1-X)^{n-j} \end{aligned}$$

on a donc $\boxed{P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i}$

c) Et, pour tout k de $\mathbb{N}$:
Idée la matrice de φ dans la base $(P_0, \cdots, P_n)$ est diagonale, ce qui permet de calculer ses puissances.
(ou bien, les P_k sont des vecteurs propres de φ)
On décompose donc $G_0 = 1$ sur cette base.
Question a) $1 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$ donc $\varphi^k(G_0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\varphi^k(P_j)$

Or, P_j est associé à la valeur propre $\dfrac{j}{n}$ donc $\varphi^k(P_j) = \left(\dfrac{j}{n}\right)^k P_j$ et

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j = \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \right]$$

avec $0 \leq j \leq n$ et $j \leq i \leq n \iff 0 \leq j \leq i \leq n \iff 0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq i \leq n$ donc

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} \right] X^i$$

d) Pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[[0, n]]$:
$\varphi^k(G_0) = G_k = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = i) X^i$
Donc $\mathrm{P}(Y_k = i)$ est la coordonnée sur X^i, dans la base canonique de G_k
Donc

$$\mathrm{P}(Y_k = i) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}$$

et il reste à transformer en factorielle les coefficients du binôme (valable car $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq i - j \leq n - i$)

$$\begin{aligned} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} &= \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \frac{(n-j)!}{(i-j)!\,(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{j!} \frac{1}{(i-j)!\,(n-i)!} \\ &= \frac{i!}{j!\,(i-j)!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j} \end{aligned}$$

avec $\binom{n}{i}$ constant par rapport à j donc

$\mathrm{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\dfrac{j}{n}\right)^k$.