Corrigé Maths ESSEC 2012 ECS

Question préliminaire.

1) Soit p la projection orthogonale sur F. P est sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$(U_1, U_2, \dots, U_k)$ est une base orthonormée de F donc le cours indique que $p(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} < U_i, X >_n U_i$.

Alors d'après $\boxed{\text{R1'}}$: $PX = p(X) = \sum_{i=1}^{k} < U_i, X >_n U_i = \sum_{i=1}^{k} ({}^tU_i X)\, U_i$.

Observons que, pour tout élément i de $[\![1, k]\!]$, ${}^tU_i X$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ que l'on assimile à un réel.

Donc, pour tout élément i de $[\![1, k]\!]$, $({}^tU_i X)\, U_i = U_i\, ({}^tU_i X)$. Alors :

$PX = \sum_{i=1}^{k} U_i({}^tU_i X) = \sum_{i=1}^{k} (U_i{}^tU_i)X = \left(\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right) X.$

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ PX = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right) X$. $\boxed{\text{R3}}$ donne alors $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i$.

Ainsi : ${}^tP = {}^t\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} {}^t(U_i{}^tU_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} {}^t({}^tU_i){}^tU_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i = P$. Donc ${}^tP = P$.

Alors P est symétrique (normal pour la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthnormée).

$$P = \sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i \text{ et } P \text{ est une matrice symétrique.}$$

Partie I - Décomposition spectrale de la matrice ${}^t\mathbf{AA}$ associée à une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_{\mathbf{m,n}}(\mathbb{R})$.

2) (a) A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donc ${}^tA$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Alors ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ${}^tAA$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

Soit X un élément de $\operatorname{Ker} A$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tAAX = {}^tA\, 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi X appartient à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Finalement $\forall X \in \operatorname{Ker} A, X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$. Ainsi : $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$.

(b) Soit X un élément de $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\|AX\|_m^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX{}^tAAX = {}^tX 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0$. Donc $\|AX\|_m^2 = 0$ et : $\|AX\|_m = 0$.

Si X appartient à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ alors $\|AX\|_m = 0$.

Soit X un élément de $\operatorname{Ker} {}^tAA$. Alors $\|AX\|_m = 0$. Ceci donne $AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$ et permet de dire que X est dans $\operatorname{Ker} A$.

Donc $\forall X \in \operatorname{Ker} {}^tAA,\ X \in \operatorname{Ker} A$ et ainsi $\operatorname{Ker} {}^tAA \subset \operatorname{Ker} A$. Or **(a)** a donné $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$. Alors :

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA.$$

D'après $\boxed{\text{R3'}}$ $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$. Donc $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \iff \operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De même ${}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff \operatorname{Ker} {}^tAA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$. Ainsi :

$A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \iff \operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \iff \operatorname{Ker} {}^tAA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \iff {}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tAA$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc A et ${}^tAA$ sont nulles simultanément.

(c) Soit Y un élément de $\operatorname{Im} {}^tAA$. Il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = {}^tAAX$.

Posons $Z = AX$. Z appartient à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $Y = {}^tAZ$ donc Y appartient à $\operatorname{Im} {}^tA$.

$\forall Y \in \operatorname{Im} {}^tAA,\ Y \in \operatorname{Im} {}^tA$ donc $\operatorname{Im} {}^tAA \subset \operatorname{Im} {}^tA$.

Dès lors pour montrer que $\operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA$ il suffit de montrer que $\dim \operatorname{Im}{}^tAA = \dim \operatorname{Im}{}^tA$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

A est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{R4}}$ donne alors $\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = n$ et $\dim \operatorname{Ker}{}^tAA + \operatorname{rg}{}^tAA = n$ (théorème du rang).

Or $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}{}^tAA$ donc $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker}{}^tAA$. Ainsi $\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Ker}{}^tAA = \operatorname{rg}{}^tAA$.

Par conséquent $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}{}^tAA$. Or $\operatorname{rg}{}^tA = \operatorname{rg} A$ ($\boxed{\text{R5}}$) donc $\operatorname{rg}{}^tA = \operatorname{rg}{}^tAA$.

Alors $\dim \operatorname{Im}{}^tA = \operatorname{rg}{}^tA = \operatorname{rg}{}^tAA = \dim \operatorname{Im}{}^tAA$. Ainsi $\dim \operatorname{Im}{}^tA = \dim \operatorname{Im}{}^tAA$.

Ceci achève de monter que :
$$\operatorname{Im}{}^tA = \operatorname{Im}{}^tAA.$$

3) (a) ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$.

Donc ${}^tAA$ est une matrice symétrique d'ordre n à coefficients réels. Ainsi : ${}^tAA$ est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$. λ est un réel car ${}^tAA$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit X un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ.

X est un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = \lambda\, X$.

Nous avons vu plus haut que $\|AX\|_m^2 = {}^tX{}^tAAX$. Alors $\|AX\|_m^2 = {}^tX\,(\lambda X) = \lambda\,{}^tXX = \lambda\|X\|_n^2$.

X n'est pas nul donc $\|X\|_n^2$ est strictement positif. Alors $\lambda = \dfrac{\|AX\|_m^2}{\|X\|_n^2}\cdot$ Plus de doute, λ est un réel positif ou nul.

Les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs ou nuls.

(b) Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1,p]\!]$.

Rappelons que les sous-espaces propres de la matrice symétrique ${}^tAA$ sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ et $E_{\lambda_j}({}^tAA)$ sont orthogonaux donc $E_{\lambda_j}({}^tAA) \subset \Big(E_{\lambda_i}({}^tAA)\Big)^\perp$.

D'après $\boxed{\text{R6}}$: $\operatorname{Im} Pj = E_{\lambda_j}({}^tAA)$ et $\operatorname{Ker} P_i = \Big(E_{\lambda_i}({}^tAA)\Big)^\perp$. Donc $\operatorname{Im} P_j \subset \operatorname{Ker} P_i$.

Or $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_jX \in \operatorname{Im} P_j$. Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_jX \in \operatorname{Ker} P_i$.

Ceci qui donne $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_iP_jX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\boxed{\text{R3'}}$ nous autorise à dire que $P_iP_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } i \text{ et } j \text{ sont deux éléments distincts de } [\![1,p]\!],\ P_i\,P_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

Rappelons que pour tout élément i de $[\![1,p]\!]$, P_i est la matrice d'une projection donc $P_i^2 = P_i$. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ P_i\,P_j = \begin{cases} P_i & \text{si } i = j \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\exists!\,(X_1, X_2, \dots, X_p) \in E_{\lambda_1}({}^tAA) \times E_{\lambda_2}({}^tAA) \times \cdots \times E_{\lambda_p}({}^tAA),\ X = \sum_{j=1}^{p} X_j$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=1}^{p} E_{\lambda_j}({}^tAA)$ puisque ${}^tAA$ est diagonalisable.

Soit i un élément de $[\![1,p]\!]$. $P_iX = \sum_{j=1}^{p} P_iX_j$. Soit j un élément de $[\![1,p]\!]$.

Si $j = i$, $X_j = X_i \in E_{\lambda_i}({}^tAA) = \operatorname{Ker}(P_i - I_n)$ d'après $\boxed{\text{R6}}$, donc $P_iX_j = P_iX_i = X_i$.

Supposons $j \neq i$.

$X_j \in E_{\lambda_j}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(P_j - I_n)$ d'après $\boxed{\text{R6}}$, donc $P_jX_j = X_j$ ou $X_j = P_jX_j$.

Alors $P_iX_j = P_iP_jX_j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}X_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Finalement $P_iX_j = \begin{cases} X_i & \text{si } j = i \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } j \neq i \end{cases}$. Alors $P_iX = \sum_{j=1}^{p} P_iX_j = X_i$ et ceci pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

Donc $\left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right) X = \sum_{i=1}^{p} P_iX = \sum_{i=1}^{p} X_i = X$.

Ainsi : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(\sum_{i=1}^{p} P_i\right) X = I_nX$. $\boxed{\text{R3}}$ donne alors : $\quad I_n = \sum_{i=1}^{p} P_i$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\exists!\,(X_1, X_2, \dots, X_p) \in E_{\lambda_1}({}^tAA) \times E_{\lambda_2}({}^tAA) \times \dots \times E_{\lambda_p}({}^tAA)$, $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $X_i \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, ${}^tAAX_i = \lambda_i X_i$. Rappelons que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P_iX = X_i$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_iX = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{p} {}^tAA\,X_i = {}^tAA \left(\sum_{i=1}^{p} X_i\right) = {}^tAAX.$$

Ainsi : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right) X = {}^tAAX$. $\boxed{\text{R3}}$ donne alors : $\quad {}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$.

4) (a) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit λ un réel et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = \lambda x \\ -3x + 3y = \lambda y \\ 6z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3y = \lambda x \\ \lambda (x+y) = 0 \\ (\lambda - 6)\, z = 0 \end{cases}.$$

- Supposons que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 6$.

${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = \lambda x \\ x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ (3 + 3 - \lambda)\, x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$. λ n'est pas valeur propre de ${}^tAA$.

- Si $\lambda = 0$: ${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$. Alors 0 est valeur propre de ${}^tAA$ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Si $\lambda = 6$, ${}^tAAX = \lambda X \iff \begin{cases} 3x - 3y = 6\,x \\ x + y = 0 \end{cases} \iff y = -x$.

Alors 6 est valeur propre de ${}^tAA$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan (donc le plan) d'équation $x + y = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de ce sous-espace propre.

Comme ${}^tAA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\alpha = 0$. Nous avons ainsi retrouvé les résultats de la version précédente.

Résumons le tout.

$$\text{Sp}\,{}^tAA = \{0,6\}.\ E_0({}^tAA) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_6({}^tAA) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Notons qu'ici $p=2$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 6$. Déterminons P_1 et P_2.

- Posons $V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $U_1 = \dfrac{1}{\|V_1\|} V_1$. $U_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$.

(V_1) est une base de $E_0({}^tAA)$. Donc (U_1) est une base orthonormée de $E_0({}^tAA)$.

Alors d'après **Q1**, $P_1 = U_1{}^tU_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

La matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale sur $E_0({}^tAA)$ est $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$.

Posons $V_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $U_2 = \dfrac{1}{\|V_2\|}V_2$ et $U_3 = \dfrac{1}{\|V_3\|}V_3$. $U_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(V_2, V_3) est une base de $E_6({}^tAA)$. Mieux c'est une base orthogonale de $E_6({}^tAA)$.

Alors (U_2, U_3) est une base orthonormée de $E_6({}^tAA)$.

Ainsi $P_2 = U_2{}^tU_2 + U_3{}^tU_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Finalement $P_2 = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

La matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale sur $E_6({}^tAA)$ est $P_2 = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(b) Rappelons que que $A{}^tA$ est assimilable à un réel car $A{}^tA \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ puisque $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

$({}^tAA)^2 - (A{}^tA){}^tAA = {}^tAA{}^tAA - (A{}^tA){}^tAA = {}^tA(A{}^tA)A - (A{}^tA){}^tAA$.

Or $A{}^tA$ est un réel donc $({}^tAA)^2 - (A{}^tA){}^tAA = (A{}^tA){}^tAA - (A{}^tA){}^tAA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi :

$$X^2 - (A{}^tA)\,X \text{ est un polynôme annulateur de } {}^tAA.$$

Les zéros du polynômes $X^2 - (A{}^tA)\,X$ sont 0 et $A{}^tA$. Donc le spectre de ${}^tAA$ est contenu dans $\{0, A{}^tA\}$.

1^er cas $n=1$. Alors ${}^tAA$ est la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ égale à (a_1^2). Alors a_1^2 est la seule valeur propre de ${}^tAA$.

Ici $p=1$, $\lambda_1 = a_1^2 = A{}^tA$ et $P_1 = I_1$.

$\boxed{\text{Si } n=1,\ \text{Sp}\,{}^tAA = \{a_1^2\} = \{A{}^tA\}. \text{ La décomposition spectrale de } {}^tAA \text{ est } {}^tAA = (A{}^tA)\,I_1\,!}$

2^ième cas $n>1$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons que $AX \in \mathbb{R}$. Alors : ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff (AX)\,{}^tA = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

or ${}^tA \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff AX = 0 \iff {}^t({}^tA)X = 0 \iff <{}^tA, X>_n = 0 \iff X \in \left(\text{Vect}({}^tA)\right)^\perp$.

Ainsi $\text{Ker}\,{}^tAA = \left(\text{Vect}({}^tA)\right)^\perp$. Comme ${}^tA \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, $\dim \text{Vect}({}^tA) = 1$. Alors $\dim \text{Ker}\,{}^tAA = n-1$.

Comme $n-1>0$, $\text{Ker}\,{}^tAA$ n'est pas réduit à la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ainsi 0 est valeur propre de ${}^tAA$.

Le sous-espace propre associé est l'hyperplan $\left(\text{Vect}({}^tA)\right)^\perp$. $E_0({}^tAA) = \left(\text{Vect}({}^tA)\right)^\perp$.

Comme ${}^tAA$ est diagonalisable, ${}^tAA$ a nécessairement une autre valeur propre qui ne peut être que A^tA car $\mathrm{Sp}\,{}^tAA$ est contenu dans $\{0, A^tA\}$.

De plus $E_0({}^tAA)$ et $E_{A^tA}({}^tAA)$ sont supplémentaires et orthogonaux car ${}^tAA$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $E_{A^tA}({}^tAA)) = \big(E_0({}^tAA)\big)^\perp = \Big(\big(\mathrm{Vect}({}^tA)\big)^\perp\Big)^\perp = \mathrm{Vect}({}^tA)$. $E_{A^tA}({}^tAA) = \mathrm{Vect}({}^tA)$.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2,\ \mathrm{Sp}\,{}^tAA = \{0, A^tA\}.\ E_0({}^tAA) = \Big(\mathrm{Vect}({}^tA)\Big)^\perp \text{ et } E_{A^tA}({}^tAA) = \mathrm{Vect}({}^tA).}$$

Ici $p = 2$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = A^tA$.

Remarque *Notons que :*

- ${}^tAA = (a_i\, a_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$
- *$E_0({}^tAA)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'équation $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
- *$A^tA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ et $E_{A^tA}({}^tAA)$ est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendrée par* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$I_n = P_1 + P_2$ et ${}^tAA = \lambda_1\,P_1 + \lambda_2\,P_2 = (A^tA)\,P_2$.

Donc $P_2 = \dfrac{1}{A^tA}\,{}^tAA$ et $P_1 = I_n - \dfrac{1}{A^tA}\,{}^tAA$. Notons que $P_2 = \dfrac{1}{A^tA}\,{}^tAA = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}\,(a_i\,a_j)$.

Si $n \geqslant 2$, la décomposition spectrale de ${}^tAA$ est ${}^tAA = 0\,P_1 + (A^tA)\,P_2$ avec $P_2 = \dfrac{1}{A^tA}\,{}^tAA = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}\,(a_i\,a_j)$ et $P_1 = I_n - P_2$!

Partie II - Pseudo solution d'une équation linéaire.

5) Dans toute la suite conformément au texte nous parlerons le plus souvent de l'équation $AX = B$ alors qu'il serait sans doute préférable de parler de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

► On suppose ici que l'équation $AX = B$ admet au moins une solution que nous noterons X_0.

Soit X' un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Supposons que X' est une pseudo solution de l'équation $AX = B$.

Alors $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX' - B\|_m \leqslant \|AZ - B\|_m$.

En particulier $\|AX' - B\|_m \leqslant \|AX_0 - B\|_m = 0$. Alors $\|AX' - B\|_n = 0$ donc $AX' - B = 0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $AX' = B$ et X' est solution de l'équation $AX = B$.

- Supposons que X' est solution de l'équation $AX = B$.

Alors $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX' - B\|_m = 0 \leqslant \|AZ - B\|_m$. Donc X' est une pseudo solution de l'équation $AX = B$.

Si l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet au moins une solution, l'ensemble de ses pseudo solutions est l'ensemble de ses solutions.

6)

Commençons par établir un résultat que nous utiliserons dans Q6 et dans Q7. Montrons donc que :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (X,Y) \in \Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\Big)^2,\ \|A(X + \lambda Y) - B\|_m^2 - \|AX - B\|_m^2 = \lambda^2\,\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY{}^tA\,(AX - B)$ (1).

Soit λ un réel. Soient X et Y deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\|A(X + \lambda Y) - B\|_m^2 = \|(AX - B) + (\lambda\,AY)\|_m^2 = \|AX - B\|_m^2 + 2 < AX - B, \lambda\,AY >_m + \|\lambda\,AY\|_m^2$.

$\|A(X + \lambda Y) - B\|_m^2 - \|AX - B\|_m^2 = 2\,\lambda < AY, AX - B >_m + \lambda^2 \|AY\|_m^2 = 2\,\lambda\,{}^t(AY)(AX - B) + \lambda^2\|AY\|_m^2$.

Ainsi : $\|A(X + \lambda Y) - B\|_m^2 - \|AX - B\|_m^2 = \lambda^2\,\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\,{}^tY{}^tA\,(AX - B)$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ \|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = \lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\, {}^tY {}^tA\,(AX-B) \quad (1).}$$

► Supposons maintenant que X est une pseudo solution de l'équation.

$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ 0 \leqslant \|AX-B\|_m \leqslant \|AZ-B\|_m$ donc $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX-B\|_m^2 \leqslant \|AZ-B\|_m^2$.

Ce qui donne encore $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AZ-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 \geqslant 0$.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 \geqslant 0$.

Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \geqslant 0$ d'après (1).

Si X est une pseudo solution de l'équation : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \geqslant 0$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \geqslant 0$.

Soit Y un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que ${}^tY {}^tA(AX-B) = 0$

Version 1 $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\,\lambda\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \geqslant 0$.

Donc pour tout réel strictement positif $\lambda\|AY\|_m^2 + 2\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \geqslant 0 \quad (2)$.

Et pour tout réel strictement négatif $\lambda\|AY\|_m^2 + 2\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \leqslant 0 \quad (3)$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures dans (2) il vient : $2\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \geqslant 0$ ou ${}^tY\, {}^tA(AX-B) \geqslant 0$.

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs inférieures dans (3) il vient : $2\, {}^tY\, {}^tA(AX-B) \leqslant 0$ ou ${}^tY\, {}^tA(AX-B) \leqslant 0$.

Alors ${}^tY\, {}^tA(AX-B) = 0$.

Finalement ${}^tY\, {}^tA(AX-B) = 0$ et ceci pour tout Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < Y, {}^tA(AX-B) >_n = 0$. Donc ${}^tA(AX-B) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^\perp = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors ${}^tA(AX-B) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ou ${}^tAAX - {}^tAB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, et ainsi ${}^tAAX = {}^tAB$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est une pseudo solution de l'équation } X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AX' = B \text{ alors } {}^tAAX = {}^tAB.}$$

7) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = {}^tAB$.

Montrons que X est une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$.

Soit Z un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = Z - X$. Alors $Z = X + Y$. En appliquant (1) avec $\lambda = 1$ il vient :

$\|AZ-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = \|A(X+Y)-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = 1^2 \times \|AY\|_m^2 + 2 \times 1 \times {}^tY {}^tA\,(AX-B)$.

$\|AZ-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = \|AY\|_m^2 + 2\, {}^tY {}^tA\,(AX-B)$.

Par hypothèse ${}^tAAX = {}^tAB$ donc ${}^tA(AX-B) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ alors $\|AZ-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 = \|AY\|_m^2$.

Donc $\|AZ-B\|_m^2 - \|AX-B\|_m^2 \geqslant 0$ ce qui donne $\|AX-B\|_m^2 \leqslant \|AZ-B\|_m^2$ puis $\|AX-B\|_m \leqslant \|AZ-B\|_m$.

Ainsi $\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX-B\|_m \leqslant \|AZ-B\|_m$. X est donc une pseudo solution de l'équation.

> Si X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = {}^tAB$, X est une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$.

Ce résultat ajouté à celui de Q6 permet de dire que :

> si X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, X est une pseudo solution de l'équation $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX' = B$ si et seulement si ${}^tAAX = {}^tAB$.

${}^tAB$ appartient à $\operatorname{Im} {}^tA$ et nous avons vu dans **Q2 (c)** que $\operatorname{Im} {}^tA = \operatorname{Im} {}^tAA$. Alors ${}^tAB$ appartient à $\operatorname{Im} {}^tAA$. Ainsi il existe au moins un élément X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX_0 = {}^tAB$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{l'équation } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } AX = B \text{ a au moins une pseudo solution.}}$$

8) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tAAX = {}^tAB \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ -3x + 3y = -3 \\ 6z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

L'ensemble des pseudo solutions de l'équation $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$.

Soit x un réel. Posons $T_x = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\|T_x\|_3^2 = x^2 + (x-1)^2 + 1^2 = 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x) + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$.

Si x n'est pas égal à $\frac{1}{2}$, $\|T_x\|_3^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} = \|T_{\frac{1}{2}}\|_3^2$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \|T_x\|_3 > \|T_{\frac{1}{2}}\|_3$.

Rappelons que l'ensemble des pseudo solutions de l'équation $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$ soit encore $\{T_x \,;\, x \in \mathbb{R}\}$.

$T_{\frac{1}{2}}$ est donc l'unique pseudo solution de l'équation, de norme minimale. Notons que $T_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'équation $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet une pseudo solution de norme minimale et une seule qui est $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9) Soit X_0 une pseudo solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$. ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

X est une pseudo solution de l'équation si et seulement si ${}^tAAX = {}^tAB$.

${}^tAAX = {}^tAB \iff {}^tAAX = {}^tAAX_0 \iff {}^tAA(X - X_0) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X - X_0 \in \operatorname{Ker} {}^tAA$.

${}^tAAX = {}^tAB \iff \exists Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA, X - X_0 = Y \iff \exists Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA,\ X = X_0 + Y$. Rappelons que $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$.

Alors ${}^tAAX \iff \exists Y \in \operatorname{Ker} A,\ X = X_0 + Y$.

Donc l'ensemble des pseudo solutions de l'équation est $\{X_0 + Y \,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$.

Si X_0 est une pseudo solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$, l'ensemble des pseudo solutions de cette équation est $\{X_0 + Y \,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$.

Plus de doute alors, l'équation admet une pseudo solution et une seule si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Partie III - Pseudo solution d'une matrice.

10) Nous allons donner deux (?) solutions à cette question.

Avant de commencer rappelons que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$.

Le texte incite a construire une pseudo solution S orthogonale a $\operatorname{Ker} {}^tAA$ non ? Alors allons y.

Soit X_0 une pseudo solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

L'ensemble des pseudo solutions de cette équation est $\{X_0 + Y \,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$ ou $\{X_0 + Y \,;\, Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA\}$.

Soit X_0' la projection orthogonale de X_0 sur $\operatorname{Ker} {}^tAA$ ou sur $\operatorname{Ker} A$. Alors $X_0 - X_0'$ appartient à $(\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$.

Posons donc $S = X_0 - X_0'$. Notons que S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

De plus $S = X_0 + (-X_0')$ et $(-X_0')$ appartient à $\operatorname{Ker} A$ donc S est une pseudo solution de l'équation $AX = B$.

Notons alors que l'ensemble des pseudo solutions de l'équation $AX = B$ est encore $\{S + Y\,;\, Y \in \operatorname{Ker} A\}$.

Soit Z une pseudo solution de l'équation $AX = B$ distincte de S. Il existe un élément non nul Y de $\operatorname{Ker} A$ tel que $Z = S + Y$.

$S \in (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$ et $Y \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$ donc S et Y sont orthogonaux.

Le théorème de Pythagore donne alors : $\|S + Y\|_n^2 = \|S\|_n^2 + \|Y\|_n^2$.

Ainsi $\|Z\|_n^2 = \|S + Y\|_n^2 = \|S\|_n^2 + \|Y\|_n^2 > \|S\|_n^2$ car $\|Y\|_n^2 > 0$.

Donc $\|Z\|_n > \|S\|_n$ et ceci pour toute pseudo solution Z de l'équation $AX = B$ distincte de S.

Ceci montre qu'il existe une unique pseudo solution de l'équation $AX = B$ de norme minimale et que cette pseudo solution est S.

Notons que ${}^tAAS = {}^tAB$ (car S est une pseudo solution de l'équation) et que S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Montrons que ceci caractérise S.

Supposons que S' soit un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAS' = {}^tAB$ et qui soit orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Notons que $S' - S$ est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ car S et S' sont tous les deux orthogonaux à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

${}^tAAS' = {}^tAB$ donc S' est une pseudo solution de l'équation. Ainsi il existe Y' dans $\operatorname{Ker} A$ tel que $S' = S + Y'$.

Alors $S' - S = Y'$ et ainsi $S' - S$ appartient à $\operatorname{Ker} A$ donc à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

Finalement $S' - S \in (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp \cap \operatorname{Ker} {}^tAA = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Alors $S' = S$. Ce qui achève de montrer que :

l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet une unique pseudo solution de norme minimale notée S et caractérisée par les deux conditions ${}^tAAS = {}^tAB$ et S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

11) (a) Supposons que A est de rang n. Nous avons vu dans **Q9** que l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ admet une pseudo solution et une seule que nous noterons S. S est nécessairement la pseudo solution de l'équation $AX = B$ de norme minimale !

Nous avons vu dans **Q2 (c)** que $\operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} A$. Alors $\operatorname{rg} {}^tAA = n$ et ${}^tAA$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tAA$ est inversible.

Or ${}^tAAS = {}^tAB$ donc $S = ({}^tAA)^{-1}\left({}^tAB\right)$.

Si $\operatorname{rg} A = n$, ${}^tAA$ est inversible et l'unique pseudo solution (de norme minimale) de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $({}^tAA)^{-1}\left({}^tAB\right)$.

Exercice *Montrer que si* $\operatorname{rg} A = n$: $({}^tAA)^{-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} P_i$ *et* $({}^tAA)^{-1}\left({}^tAB\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tAB$.

(b) Supposons que A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $\left(\operatorname{Ker} A\right)^\perp = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit S l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$ donc à $\operatorname{Ker} A$. Alors $S \in \left(\operatorname{Ker} A\right)^\perp$ donc $S = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Si A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

12) Notons φ l'application qui à tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ associe la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

- Par définition φ est une application de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Montrons que φ est linéaire. Soient B et B' deux éléments de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Soit λ un réel.

Posons $S = \varphi(B)$ et $S' = \varphi(B')$. Montrons que $\varphi(\lambda\, B + B') = \lambda\, S + S'$. Pour cela il convient de montrer que $\lambda\, S + S'$ est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = \lambda\, B + B'$. Donc de montrer que ${}^tAA(\lambda\, S + S') = {}^tA(\lambda\, B + B')$ et que $\lambda\, S + S'$ est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.

$S=\varphi(B)$ et $S'=\varphi(B')$ donc ${}^tAAS={}^tAB$, ${}^tAAS'={}^tAB'$ et, S et S' sont orthogonaux à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Alors ${}^tAA(\lambda\,S+S')=\lambda\,{}^tAAS+{}^tAAS'=\lambda\,{}^tAB+{}^tAB'={}^tA(\lambda\,B+B')$.

De plus $\lambda\,S+S'$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$ car S et S' sont orthogonaux à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.
Ceci achève de montrer que $\lambda\,S+S'$ est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=\lambda\,B+B'$.

Donc $\varphi(\lambda\,B+B')=\lambda\,S+S'$. Ainsi $\varphi(\lambda\,B+B')=\lambda\,\varphi(B)+\varphi(B')$. φ est linéaire.

L'application qui à tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ associe l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

13) Rappelons que dans toute cette question A n'est pas la matrice nulle.

(a) Montrons que ${}^tAA$ possède au moins une valeur propre non nulle.

Raisonnons par l'absurde et supposons que ${}^tAA$ ne possède pas de valeur propre non nulle.

Comme ${}^tAA$ est diagonalisable, 0 est la seule valeur propre de ${}^tAA$. Ainsi $p=1$ et $\lambda_1=0$.

Alors ${}^tAA=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\,P_i=\lambda_1\,P_1=0\times P_1=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. ${}^tAA$ est nulle.

Or d'après **Q2 (b)** A et ${}^tAA$ sont simultanément nulles. Ainsi A est nulle ce qui contredit l'hypothèse.

$\Gamma(A)$ n'est pas vide car ${}^tAA$ possède au moins une valeur propre non nulle !

(b) Nous allons proposer deux solutions pour cette question. La première version rebondira sur le résultat donné. La seconde, plus intéressante, retrouvera le résultat proposé. Mais avant cela établissons trois résultats utiles dans la suite.

2. Clairement $\forall j\in[\![1,p]\!],\ P_j\,{}^tAA=\lambda_j\,P_j$. Nous le verrons dans Q16).

Soit B un element de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Soit S la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$.

${}^tAAS={}^tAB$ et $S\in\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^{\perp}$. Montrons que $S=\sum\limits_{i\in\Gamma(A)}\dfrac{1}{\lambda_i}\,P_i{}^tAB$.

$S=\sum\limits_{i=1}^{p}P_iS$ car $\sum\limits_{i=1}^{p}P_i=I_n$ de même ${}^tAB=\sum\limits_{i=1}^{p}P_i{}^tAB$ car ${}^tAB$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\sum\limits_{i=1}^{p}P_i{}^tAB={}^tAB={}^tAAS={}^tAA\left(\sum\limits_{i=1}^{p}P_iS\right)=\sum\limits_{1=i}^{p}{}^tAAP_iS=\sum\limits_{1=i}^{p}\lambda_i\,P_iS$ d'après $\boxed{\text{R9}}$.

Or $\forall i\in[\![1,p]\!],\ P_i{}^tAB\in\operatorname{Im}P_i=E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

De même $\forall i\in[\![1,p]\!],\ P_iS\in E_{\lambda_i}({}^tAA)$ donc $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \lambda_i\,P_iS\in E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

Alors comme la somme $E_{\lambda_1}({}^tAA)+E_{\lambda_2}({}^tAA)+\cdots+E_{\lambda_p}({}^tAA)$ est directe l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{p}P_i{}^tAB=\sum\limits_{1=i}^{p}\lambda_i\,P_iS$ donne :

$\forall i\in[\![1,p]\!],\ P_i{}^tAB=\lambda_iP_iS$. Alors $\forall i\in\Gamma(A),\ P_iS=\dfrac{1}{\lambda_i}\,P_i{}^tAB$.

1^er cas $\operatorname{Ker}{}^tAA=\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$. Alors $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \lambda_i\neq 0$ et $\Gamma(A)=[\![1,p]\!]$.

Donc $\forall i\in[\![1,p]\!],\ P_iS=\dfrac{1}{\lambda_i}\,P_i{}^tAB$. Ainsi $S=\sum\limits_{i=1}^{p}P_iS=\sum\limits_{i=1}^{p}\dfrac{1}{\lambda_i}\,P_i{}^tAB=\sum\limits_{i\in\Gamma(A)}\dfrac{1}{\lambda_i}\,P_i{}^tAB$.

$2^{\text{ième}}$ cas $\operatorname{Ker}{}^t AA \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Alors 0 est valeur propre de ${}^tAA$. Donc $p \geqslant 2$, $\lambda_1 = 0$, $E_{\lambda_1}({}^tAA) = \operatorname{Ker}{}^tAA = \operatorname{Im} P_1$ et $\Gamma(A) = [\![2, p]\!]$.

S appartient à $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^\perp$ donc à $\operatorname{Ker} P_1$. Alors $P_1 S = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P_i S = \sum_{i=2}^{p} P_i S = \sum_{i\in\Gamma(A)} P_i S$.

Or nous avons vu plus haut que $\forall i \in \Gamma(A),\ P_i S = \dfrac{1}{\lambda_i} P_i{}^t AB$, donc $S = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} P_i S = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t AB$.

Dans les deux cas $\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t AB$ est donc la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

Ainsi $A^+B = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t AB$.

$\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t AB = \left(\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t A\right) B$. Alors $A^+ = \displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i{}^t A$ d'après $\boxed{\text{R3}}$.

Remarque Ceci fournit clairement des pistes pour donner une troisième solution à la question 10 ou pour faire simultanément les questions 10 et 13...

Pour être complet examinons le cas où $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

D'après **Q11) (b)**, pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $\boxed{\text{R3'}}$ donne alors $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ A^+ \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).}$$

14) Notons que A n'est pas la matrice nulle. De plus $p = 2$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 6$. Alors $\Gamma(A) = \{6\}$ et $A^+ = \dfrac{1}{6} P_2{}^t A$.

$$A^+ = \frac{1}{6} P_2{}^t A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^+ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

$$A^+B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Nous retrouvons que si } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ la pseudo solution de norme minimale de l'équation } X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } AX = B \text{ est } \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

15) Nous poserons $A = (a_1\, a_2\, \dots a_n)$.

1^{er} cas $A = 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

En faisant $m = 1$ dans **Q11 (b)** nous pouvons dire que pour tout élément $B \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall B \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Donc d'après $\boxed{\text{R3'}}$: $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ (résultat que nous avions déjà montré à la fin de Q13).

$2^{\text{ième}}$ cas $\quad A \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$.

- $n = 1$. Nous avons vu dans **Q4 (b)** que $\operatorname{Sp} {}^tAA = \{a_1^2\} = \{A\,{}^tA\}$, $p = 1$, $\lambda_1 = A\,{}^tA = a_1^2$, $P_1 = I_1$.

Comme A n'est pas la matrice nulle, a_1 est différent de 0 et il en est de même de λ_1. $\Gamma(A) = [\![1,1]\!]$.

Alors $A^+ = \dfrac{1}{\lambda_1}\, P_1\,{}^tA = \dfrac{1}{\lambda_1}\, I_1\,{}^tA = \dfrac{1}{\lambda_1}\,{}^tA = \dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tA$. Donc $A^+ = \dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tA$.

- $n \geqslant 2$. Nous avons vu dans **Q4 (b)** que $\operatorname{Sp} {}^tAA = \{0, A\,{}^tA\}$, $p = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = A\,{}^tA$, $P_1 = I_n - \dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA$ et $P_2 = \dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA$. $\Gamma(A) = [\![2,2]\!]$.

Alors $A^+ = \dfrac{1}{\lambda_2}\, P_2\,{}^tA = \dfrac{1}{A\,{}^tA}\left(\dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tAA\right){}^tA = \dfrac{1}{(A\,{}^tA)^2}({}^tAA)\,{}^tA = \dfrac{1}{(A\,{}^tA)^2}\,{}^tA(A\,{}^tA)$.

Comme $A\,{}^tA$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ assimilable à un réel on obtient : $A^+ = \dfrac{1}{(A\,{}^tA)^2}\,(A\,{}^tA)\,{}^tA$. Donc $A^+ = \dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tA$.

Ceci achève la détermination de A^+ lors que A est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

$$\text{Si } A \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}),\ A^+ = \begin{cases} \dfrac{1}{A\,{}^tA}\,{}^tA & \text{si } A \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Partie IV - Étude de l'opérateur $\mathbf{A \to A^+}$.

► Dans toute cette partie A est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

16) Supposons dans un premier temps que A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors, d'après **Q11 (b)**, pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors, d'après R3', $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$. Nous avons ainsi redemontre

► Dans toute cette partie A est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

16) Supposons dans un premier temps que A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors, d'après **Q11 (b)**, pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ est $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ A^+B = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors, d'après R3', $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$. Nous avons ainsi redémontré (pour la troisième fois ou presque !) que :

R12 Si A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors A^+ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Donc si $A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ alors $A^+ = 0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ et il est alors clair que $A = AA^+A$, $A^+ = A^+AA^+$, ${}^t(A^+A) = A^+A$ et ${}^t(AA^+) = AA^+$.

Supposons maintenant que A n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors $A^+ = \displaystyle\sum_{i \in \Gamma(A)} \dfrac{1}{\lambda_i}\, P_i\,{}^tA$.

Rappelons que ${}^tAA = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, P_i$.

- $A^+A = \left(\displaystyle\sum_{i \in \Gamma(A)} \dfrac{1}{\lambda_i}\, P_i\,{}^tA\right) A = \displaystyle\sum_{i \in \Gamma(A)} \dfrac{1}{\lambda_i}\, P_i\,{}^tAA$.

Soit i dans $\Gamma(A)$. $P_i\,{}^tAA = P_i \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, P_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, P_i\, P_j = \lambda_i\, P_i$ car $\forall j \in [\![1,p]\!],\ P_i\, P_j = \begin{cases} P_i & \text{si } j = i \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $A^+A = \displaystyle\sum_{i \in \Gamma(A)} \dfrac{1}{\lambda_i}\, \lambda_i\, P_i = \sum_{i \in \Gamma(A)} P_i$. $\boxed{A^+A = \displaystyle\sum_{i \in \Gamma(A)} P_i}$.

A^+A est alors une combinaison linéaire de matrices symétriques. C'est donc une matrice symétrique. Ainsi :

${}^t(A^+A) = A^+A$.

17) (a) • $M^tM^tA = M^t(AM) = MAM = M$ et ${}^tA^tMM = {}^t(MA)M = MAM = M$, donc :

$$\boxed{M = M^tM^tA = {}^tA^tMM.}$$

• $A^tA^tM = A^t(MA) = AMA = A$ et ${}^tM^tAA = {}^t(AM)A = AMA = A$.

$$\boxed{A = A^tA^tM = {}^tM^tAA.}$$

• $A = (AM)A$ donc ${}^tA = {}^tA^t(AM) = {}^tAAM$. $A = A(MA)$ donc ${}^tA = {}^t(MA)^tA = MA^tA$. Ainsi :

$$\boxed{{}^tA = {}^tAAM = MA^tA.}$$

(b) Pour montrer que $M = A^+$ il suffit de montrer que $\forall B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), MB = A^+B$ d'après $\boxed{\text{R3}}$.

Cela revient à montrer que, pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, MB est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ ou encore que ${}^tAAMB = {}^tAB$ et $MB \in \left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^\perp$.

Soit B un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

- ${}^tAAMB = ({}^tAAM)B = {}^tAB$.
- Montrons que MB est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$. Rappelons que d'après $\boxed{\text{R10}}$, $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^\perp = \operatorname{Im}{}^tAA = \operatorname{Im}{}^tA$.

Or $MB = ({}^tA^tMM)B = {}^tA({}^tMMB)$. Donc MB est bien un élément de $\operatorname{Im}{}^tA$ donc de $\left(\operatorname{Ker}{}^tAA\right)^\perp$. Ainsi MB est orthogonal à $\operatorname{Ker}{}^tAA$.

Ceci achève de montrer que $MB = A^+B$ et ceci pour tout élément B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\boxed{M = A^+.}$$

Q16 montre que A^+ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ qui vérifie (*) et nous venons de voir qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ qui vérifie (*) est égale à A^+. Alors :

$$\boxed{A^+ \text{ est l'unique matrice de } \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \text{ qui vérifie (*).}}$$

18) (a) Notons que $\left(A^+\right)^+$ est l'unique matrice N de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^+ = A^+NA^+$, $N = NA^+N$, ${}^t(NA^+) = NA^+$ et ${}^t(A^+N) = A^+N$.

Or A est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie : $A^+ = A^+AA^+$, $A = AA^+A$, ${}^t(AA^+) = AA^+$ et ${}^t(A^+A) = A^+A$. Alors :

$$\boxed{\left(A^+\right)^+ = A.}$$

(b) Notons que ${}^tA$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

$\left({}^tA\right)^+$ est l'unique matrice L de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie : ${}^tA = {}^tAL^tA$, $L = L^tAL$, ${}^t(L^tA) = L^tA$ et ${}^t({}^tAL) = {}^tAL$.

Or en transposant les quatre égalités $A = AA^+A$, $A^+ = A^+AA^+$, ${}^t(A^+A) = A^+A$, et ${}^t(AA^+) = AA^+$ il vient :

${}^tA = {}^tA\,{}^tA^+\,{}^tA$, ${}^tA^+ = {}^tA^+\,{}^tA\,{}^tA^+$, ${}^t\left({}^t\left(A^+A\right)\right) = {}^t(A^+A)$, et ${}^t\left({}^t\left(AA^+\right)\right) = {}^t(AA^+)$.

${}^t\left({}^t\left(A^+A\right)\right) = {}^t(A^+A)$ donne : ${}^t({}^tA\,{}^tA^+) = {}^tA\,{}^tA^+$ et ${}^t\left({}^t\left(AA^+\right)\right) = {}^t(AA^+)$ donne ${}^t({}^tA^+\,{}^tA) = {}^tA^+\,{}^tA$.

Finalement ${}^tA^+$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui vérifie : ${}^tA = {}^tA\,{}^tA^+\,{}^tA$, ${}^tA^+ = {}^tA^+\,{}^tA\,{}^tA^+$, ${}^t({}^tA^+\,{}^tA) = {}^tA^+\,{}^tA$.

et ${}^t({}^tA\,{}^tA^+) = {}^tA\,{}^tA^+$. Donc :

$$\boxed{\left({}^tA\right)^+ = {}^tA^+.}$$

19) Soit x un réel strictement positif. Nous avons vu dans **Q3 a** que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs ou nuls donc $-x$ n'est pas valeur propre de ${}^tAA$ et ainsi ${}^tAA-(-x)\,I_n$ est inversible. Donc :

$$\boxed{\text{si } x \text{ est un réel strictement positif la matrice } {}^tAA+x\,I_n \text{ est inversible.}}$$

Notons que $\forall i\in[\![1,p]\!], \lambda_i+x>0$ car $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \lambda_i\geqslant 0$ et $x>0$.

Posons $Q_x=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i$ et montrons que $Q_x=({}^tAA+x\,I_n)^{-1}$.

Notons que ${}^tAA+x\,I_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\,P_i+x\sum_{i=1}^{p}P_i=\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i+x)\,P_i$.

$$({}^tAA+x\,I_n)\,Q_x=\left(\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i+x)\,P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\lambda_j+x}\,P_j\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda_i+x}{\lambda_j+x}\,P_iP_j.$$

$({}^tAA+x\,I_n)\,Q_x=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i+x}{\lambda_i+x}\,P_i=\sum_{i=1}^{p}P_i=I_n$ car $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ P_i\,P_j=\begin{cases}P_i & \text{si } j=i\\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{sinon}\end{cases}.$

$({}^tAA+x\,I_n)\,Q_x=I_n$ ce qui suffit pour dire que $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}=Q_x$. Cela redonne aussi l'inversibilité de ${}^tAA+x\,I_n$...

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif} : ({}^tAA+x\,I_n)^{-1}=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i.}$$

Montrons que $A^+=\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA\right]$.

1$^{\text{er}}$ cas $\quad A=0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

Alors $A^+=0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ et ${}^tA=0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ Le résultat est alors clair car $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ ({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

2$^{\text{ième}}$ cas $\quad A\neq 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$.

Alors $\Gamma(A)\neq\emptyset$. Soit x un réel strictement positif. Montrons que $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA$.

Si 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$, $\Gamma(A)=[\![1,p]\!]$ et ainsi : $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA=\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA$.

Supposons que 0 soit valeur propre de ${}^tAA$. $\Gamma(A)=[\![2,p]\!]$. $\boxed{\text{R11}}$ donne $P_1{}^tA=0_{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$.

Alors $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA=\sum_{i=2}^{p}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA=\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA$.

Dans les deux cas $({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA=\displaystyle\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA$.

Notons que $\forall i\in\Gamma(A),\ \lambda_i\neq 0$ donc $\forall i\in\Gamma(A),\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\lambda_i+x}=\frac{1}{\lambda_i}$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i+x}\,P_i{}^tA\right]=\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}\,P_i{}^tA=A^+$.

$$\boxed{A^+=\lim_{x\to 0^+}\left[({}^tAA+x\,I_n)^{-1}\,{}^tA\right].}$$

Appliquons cela à la matrice A de Q8.

Soit x un réel strictement positif. Calculons $({}^tAA + x\,I_3)^{-1}$.

$\boxed{\textit{Version 1}}$ On utilise la formule établie ci-dessus.

Ici $p=2$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=6$, $P_1=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $P_2=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Alors $\left({}^tAA + x\,I_3\right)^{-1} = \dfrac{1}{x+0}\,P_1 + \dfrac{1}{x+6}\,P_2 = \dfrac{1}{x+0}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \dfrac{1}{x+6}\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$\left({}^tAA + x\,I_3\right)^{-1} = \dfrac{1}{2\,x\,(x+6)}\left(\begin{pmatrix}x+6 & x+6 & 0\\ x+6 & x+6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x & -x & 0\\ -x & x & 0\\ 0 & 0 & 2x\end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{2\,x\,(x+6)}\begin{pmatrix}2x+6 & 6 & 0\\ 6 & 2x+6 & 0\\ 0 & 0 & 2x\end{pmatrix}$.

$\left({}^tAA + x\,I_3\right)^{-1} = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\begin{pmatrix}x+3 & 3 & 0\\ 3 & x+3 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$.

Finalement $a = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\big((x+3)\,a' + 3\,b'\big)$, $b = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\big(3\,a' + (x+3)\,b'\big)$ et $c = \dfrac{1}{6+x}\,c' = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\,x\,c'$

Donc $({}^tAA + x\,I_3)^{-1} = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\begin{pmatrix}x+3 & 3 & 0\\ 3 & x+3 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$ again...

Alors $({}^tAA + x\,I_3)^{-1}\,{}^tA = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\begin{pmatrix}x+3 & 3 & 0\\ 3 & x+3 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{x\,(x+6)}\begin{pmatrix}x & x & -x\\ -x & -x & x\\ x & x & 2\,x\end{pmatrix}$.

$({}^tAA + x\,I_3)^{-1}\,{}^tA = \dfrac{1}{x+6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Alors $A^+ = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x+6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Nous retrouvons } A^+ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.}$$

20) Soit α un réel non nul. Posons $A_\alpha = \alpha\,A$ et déterminons $(A_\alpha)^+$.

Soit x un réel strictement positif.

$\left({}^tA_\alpha A_\alpha + x\,I_n\right)^{-1}{}^tA_\alpha = \left(\alpha^2\,{}^tAA + x\,I_n\right)^{-1}\alpha\,{}^tA = \left(\alpha^2\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)\right)^{-1}\alpha\,{}^tA = \dfrac{1}{\alpha^2}\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}\alpha\,{}^tA$.

$\left({}^tA_\alpha A_\alpha + x\,I_n\right)^{-1}{}^tA_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}{}^tA$.

$(A_\alpha)^+ = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left({}^tA_\alpha A_\alpha + x\,I_n\right)^{-1}{}^tA_\alpha\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\alpha}\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}{}^tA\right) = \dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left({}^tAA + \dfrac{x}{\alpha^2}\,I_n\right)^{-1}{}^tA\right)$.

$(A_\alpha)^+ = \dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{z\to 0^+}\left(\left({}^tAA + z\,I_n\right)^{-1}{}^tA\right) = \dfrac{1}{\alpha}\,A^+$.

$$\forall \alpha\in\mathbb{R}^*,\ (\alpha\,A)^+ = \frac{1}{\alpha}A^+.$$