Corrigé de l'épreuve ESSEC Maths 1 2014 ECS

Partie I.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   A est une matrice normale ssi ${}^tA\,A = A\,{}^tA$

$$\begin{aligned}
&\text{ssi } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\text{ssi } \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \\
&\text{ssi } \begin{cases} c^2 = b^2 \\ ab+cd = ac+bd \end{cases} \\
&\text{ssi } \begin{cases} c = b \\ ab+bd = ab+bd \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} c = -b \\ ab-bd = -ab+bd \end{cases} \\
&\text{ssi } c = b \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c = -b \\ b(a-d) = 0 \end{cases} \\
&\text{ssi } c = b \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c = -b \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c = -b \\ a = d \end{cases}
\end{aligned}$$

   Le deuxième cas est compris dans le premier cas, d'où :

   A est une matrice normale ssi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   La matrice nulle entrant déjà dans le premier cas, on a :

   A est une matrice normale ssi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \neq (0,0)$.

   Pour $(a,b) \neq (0,0)$, $a+ib \neq 0$,

   donc $\exists \theta \in \mathbb{R},\ \exists \rho > 0 \ /\ a+ib = \rho e^{i\theta}$, donc $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) & \rho\sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} = \rho R_\theta$.

   Réciproquement toute matrice de la forme ρR_θ, avec $\rho > 0$, est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, d'où :

   $\boxed{A \text{ est une matrice normale ssi } A \text{ est symétrique réelle ou bien } \exists \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \ /\ A = \rho R_\theta.}$

2. Soit A une matrice normale.

   - ou bien A est une matrice symétrique réelle.
     Alors ${}^tA = A$, donc ${}^tA = P(A)$, avec $P(X) = X$.
   - ou bien $\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \ /\ A = \rho R_\theta$.
     Alors ${}^tA + A = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = 2\rho\cos(\theta)\ I_2$.
     Donc ${}^tA = -A + 2\rho\cos(\theta)\ I_2$, donc ${}^tA = P(A)$, avec $P(X) = -X + 2\rho\cos(\theta)$.

   $\boxed{\text{Dans les deux cas, on a bien trouvé } P \in \mathbb{R}[X] \ /\ {}^tA = P(A).}$

3. Soit A une matrice normale, telle que $A^2 - A + I_2 = 0$.

   $P(X) = X^2 - X + 1$ est donc un polynôme annulateur de A.

   Son discriminant Δ vaut : $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, donc P n'admet pas de racine réelle, donc $Sp(A) = \varnothing$.

   Donc A n'est pas symétrique réelle. (Car une matrice symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle).

   Donc, d'après la question 1, $\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \ /\ A = \rho R_\theta$.

   On a alors $A^2 = \rho^2 \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \rho^2 \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = \rho^2 R_{2\theta}$.

   On a $A^2 - A + I = 0$, donc $\begin{cases} \rho^2\cos(2\theta) - \rho\cos(\theta) + 1 = 0 & (L_1) \\ \rho^2\sin(2\theta) - \rho\sin(\theta) = 0 & (L_2) \end{cases}$

   Donc, en effectuant $L_1 + iL_2$, $\rho^2 e^{2i\theta} - \rho e^{i\theta} + 1 = 0$, donc $\rho e^{i\theta}$ est racine complexe de $P(X) = X^2 - X + 1$.

   $\Delta = -3$, donc les racines complexes de P sont $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   Donc $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{3}}$ ou $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = R_{-\frac{\pi}{3}}$.

   Réciproquement, $R_{\frac{\pi}{3}}$ et $R_{-\frac{\pi}{3}}$ sont bien des matrices normales, et avec le calcul matriciel, on montre qu'elles vérifient $\left(R_{\frac{\pi}{3}}\right)^2 - R_{\frac{\pi}{3}} + I_2 = 0$ et $\left(R_{-\frac{\pi}{3}}\right)^2 - R_{-\frac{\pi}{3}} + I_2 = 0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{les matrices normales vérifiant } A^2 - A + I_2 \text{ sont les deux matrices } R_{\frac{\pi}{3}} \text{ et } R_{-\frac{\pi}{3}}.}$

Partie II.

4. a) $mat_{\mathcal{B}_0}((f^*)^*) = {}^t[mat_{\mathcal{B}_0}(f^*)] = {}^t({}^tA) = A = mat_{\mathcal{B}_0}(f)$, donc $\boxed{(f^*)^* = f.}$

b) $mat_{\mathcal{B}_0}\left((f^{-1})^*\right) = {}^t[mat_{\mathcal{B}_0}(f^{-1})] = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = (mat_{\mathcal{B}_0}(f^*))^{-1}$, donc $\boxed{(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}.}$

5. a) On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$A = mat_{\mathcal{B}_0}(f)$, donc $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$.

Or la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique,

donc $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle f(e_j)|e_i\rangle e_i$.

Donc, par unicité de la décomposition sur une base : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \langle f(e_j)|e_i\rangle$,

donc $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i)|e_j\rangle = a_{j,i}.}$

b) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle f(x)|y\rangle = {}^t(AX)\ Y = ({}^tX\ {}^tA)\ Y = {}^tX\ ({}^tA\,Y) = \langle x|f^*(y)\rangle$.

Donc $\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle.}$

c) Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\ /\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|h(y)\rangle$.

On a alors $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle x|f^*(y)\rangle = \langle x|h(y)\rangle$,

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On a alors :$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x|f^*(y) - h(y)\rangle = 0$ par bilinéarité du produit scalaire,

donc $f^*(y) - h(y) \in (\mathbb{R}^n)^\perp$.

Or $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$, donc $f^*(y) = h(y)$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}^n,\ f^*(y) = h(y)$, donc $h = f^*$.

Donc $\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ tel que : } \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle.}$

6. Soit f un endomorphisme normal. Donc A est une matrice normale.

$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = {}^t(AX)\ (AX) = {}^tX\,{}^tA\,A\,X \underbrace{=}_{A \text{ est normale}} {}^tX\,A\,{}^tA\,X$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\|^2 = {}^t({}^tA\,X)\ ({}^tA\,X) = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle = \|f^*(x)\|^2$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| = \|f^*(x)\|.}$

7. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|g(x)\| = \|g^*(x)\|$.

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$\|g(x+y)\|^2 \underbrace{=}_{g \text{ est linéaire}} \|g(x) + g(y)\|^2 = \|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 + 2\langle g(x), g(y)\rangle$.

De même, $\|g^*(x+y)\|^2 \underbrace{=}_{g^* \text{ est linéaire}} \|g^*(x) + g^*(y)\|^2 = \|g^*(x)\|^2 + \|g^*(y)\|^2 + 2\langle g^*(x), g^*(y)\rangle$.

Or, par hypothèse $\|g^*(x+y)\| = \|g(x+y)\|,\ \|g^*(x)\| = \|g(x)\|$ et $\|g^*(y)\| = \|g(y)\|$.

Donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle g^*(x), g^*(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle$.

On note B la matrice représentative de g dans $\mathcal{B}_0$.

Donc $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ {}^t({}^tB\,X)\ ({}^tB\,Y) = {}^t(BX)\ (BY)$.

Donc $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ {}^tX\,B\,{}^tB\,Y = {}^tX\,{}^tB\,B\,Y$.

Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ [\underline{\forall Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\ (B\,{}^tB - {}^tB\,B)\,Y = 0]$

Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\ (B\,{}^tB - {}^tB\,B) = 0$,

Donc $\underline{\forall X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t(B\,{}^tB - {}^tB\,B)\ X = 0$,

Donc ${}^t(B\,{}^tB - {}^tB\,B) = 0$, donc $B\,{}^tB = {}^tB\,B$ et B est normale.

Donc $\boxed{g \text{ est un endomorphisme normal.}}$

8. Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

On note C la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ donc est orthonormée pour le produit scalaire canonique, et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée par hypothèse, donc P est une matrice orthogonale.

Le théorème de changement de bases donne : $A = P\,C\,P^{-1}$, donc $C = P^{-1}\,A\,P$, et comme P est orthogonale, on a $P^{-1} = {}^tP$, donc $C = {}^tP\,A\,P$.

Donc ${}^tC\,C = {}^t({}^tP\,A\,P)\ ({}^tP\,A\,P) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP)\ {}^tP\,A\,P = {}^tP\ {}^tA\ \underbrace{P\,{}^tP}_{=I}\ A\,P = {}^tP\ {}^tA\,A\,P$.

Or A est normale, donc ${}^tC\,C = {}^tP\ \ (A\,{}^tA)\ P = \underbrace{{}^tP\ A\ P}_{=C}\ \underbrace{{}^tP\ {}^tA\,P}_{={}^tC} = C\,{}^tC$.

Donc C est une matrice normale.

Conclusion : $\boxed{\text{si } A \text{ est normale, la matrice de } f \text{ dans toute base orthonormée est normale.}}$

Partie III.

9.

- Soit A une matrice normale.
  Par définition, A commute avec ${}^tA$, donc avec toutes les puissances de ${}^tA$.
  De même, ${}^tA$ commute avec A donc avec toutes les puissances de A.
  Et finalement toutes les puissances de A commutent avec toutes les puissances de ${}^tA$.
  On pose $S = {}^tA\,A$. On a donc $\forall k \in \mathbb{N},\ S^k = \left({}^tA\,A\right)^k = \left({}^tA\right)^k A^k = {}^t\left(A^k\right)\,A^k$.
- On considère maintenant une matrice A normale telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^* \,/\, A^p = 0$ et on note toujours $S = {}^tA\,A$.
  On a alors $S^p = {}^t\left(A^p\right)\,A^p = {}^t\left(A^p\right) \times 0 = 0$.
  Or ${}^tS = {}^tA\,{}^t\left({}^tA\right) = {}^tA\,A = S$, donc S est symétrique réelle.
  S est donc diagonalisable, et il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale, telles que $S = P\,D\,P^{-1}$.
  Notons alors $D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right)$. On a $D = P^{-1}\,S\,P$, donc $D^p = P^{-1}S^p\,P = P^{-1}\,A\,P = 0$.
  Or $D^p = diag\left(\lambda_1^p, \lambda_2^p, ..., \lambda_n^p\right)$, donc $\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_k^p = 0$, donc $\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_k = 0$.
  On en déduit que $D = 0$, donc que $\boxed{S = 0.}$
- $S = 0$, donc ${}^tA\,A = 0$, donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\,,\ {}^tX\,{}^tA\,A\,X = 0$.
  Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\,,\ {}^t(AX)\,AX = 0$,
  donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\,,\ \|A\,X\|^2 = 0$.
  donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\,,\ A\,X = 0$, et donc $\boxed{A = 0.}$

10. Soit A une matrice normale, et $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \in \mathbb{N}^* \,/\, P^q(A) = 0$.

On pose alors $P = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k$ et $B = P(A)$.

$${}^tB\,B = {}^t\left(P(A)\right)\,P(A) = {}^t\left(\sum_{i=0}^{r} a_i A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r} a_j A^j\right) = \left(\sum_{i=0}^{r} a_i \left({}^tA\right)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r} a_j A^j\right) = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} a_i a_j \left({}^tA\right)^i A^j.$$

Or A est une matrice normale, donc toutes les puissances de ${}^tA$ commutent avec toutes les puissances de A,

$$\text{donc } {}^tB\,B = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} a_i a_j A^j \left({}^tA\right)^i = \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{r} a_i a_j A^j \left({}^tA\right)^i = \left(\sum_{j=0}^{r} a_j A^j\right)\left(\sum_{i=0}^{r} a_i \left({}^tA\right)^i\right) = B\,{}^tB.$$

Donc B est une matrice normale.

B est une matrice normale, et $\exists q \in \mathbb{N}^* \,/\, B^q = 0$, donc $B = 0$ par la question 9.

Donc $\boxed{P(A) = 0.}$

11. Par hypothèse, $M^2 + M - {}^tM = I_n$, donc ${}^tM = M^2 + M - I_n$.

Donc $M = {}^t\left(M^2 + M - I_n\right) = \left({}^tM\right)^2 + {}^tM - I_n = \left(M^2 + M - I_n\right)^2 + \left(M^2 + M - I_n\right) - I_n$.

Les puissances de M commutant entre elles, on peut appliquer la formule du binôme.

Donc $M = \left(M^4 + M^2 + I_n + 2M^3 - 2M^2 - 2M\right) + \left(M^2 + M - I_n\right) - I_n$.

Donc $M^4 + 2M^3 - 2M - I_n = 0$.

Donc $\boxed{P = X^4 + 2X^3 - 2X - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M.}$

On remarque que 1 et -1 sont des racines de P, donc $\boxed{P = \left(X^2 - 1\right)\left(X^2 + 2X + 1\right) = (X - 1)(X + 1)^3}$

Donc $Q = (X - 1)^3 (X + 1)^3$ est aussi un polynôme annulateur de M.

Donc $\boxed{(M - I_n)^3 (M + I_n)^3 = 0.}$

${}^tM\,M = \left(M^2 + M - I_n\right)M = M\left(M^2 + M - I_n\right) = M\,{}^tM$, donc <u>$M$ est une matrice normale.</u>

De plus, en posant $T(X) = (X - 1)(X + 1)$, on a $T^3(M) = 0$,

donc d'après la question 10, $T(M) = 0$.

On a donc $(M - I_n)(M + I_n) = 0$, donc $\boxed{M^2 = I_n.}$

On en déduit que ${}^tM = M^2 + M - I_n = M$, donc que $\boxed{M \text{ est une matrice symétrique réelle.}}$

12. A est une matrice non nulle, donc A admet un polynôme annulateur non nul noté R.

Supposons alors R constant égal à α. On a alors $R(A) = \alpha Id$. Or $\alpha \neq 0$ car R polynôme non nul, donc $R(A) \neq 0$.

On obtient une contradiction avec R polynôme annulateur.

Donc R est un polynôme annulateur non constant de A. D'après le théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on a :

$R = a\prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)^{k_j}\prod_{m=1}^{s}(X^2+\beta_m X+\gamma_m)^{l_m}$,où $\alpha_1,...,\alpha_p$ sont les p racines réelles deux à deux distinctes de R et $k_1,...,k_p$ leurs multiplicités respectives, a est le coefficient dominant de R, et où les polynômes du second degré à coefficients réels $X^2+\beta_m X+\gamma_m$ n'ont pas de racine réelle, mais des racines complexes non réelles conjuguées (ce qui se traduit par $\beta_m^2-4\gamma_m<0$).

Posons $P = \prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)\prod_{m=1}^{s}(X^2+\beta_m X+\gamma_m)$ et $q = \max(k_1,k_2,...,k_p,l_1,...,l_s)$. $q\in\mathbb{N}^*$ car $\deg(R)\geqslant 1$.

On a alors R divise P^q et on note $Q\in\mathbb{R}[X]$ / $P^q = Q\times R$.

D'où $P^q(A) = Q(A)\times\underbrace{R(A)}_{=0}= 0$.

On a donc A matrice normale, P polynôme et $q\in\mathbb{N}^*$ tels que $P^q(A)=0$.

Donc, d'après la question 10, $P(A)=0$.

Or, pour $m\in[\![1,s]\!]$, $X^2+\beta_m X+\gamma_m$ admet deux racines complexes conjuguées (distinctes) que l'on note z_m et $\overline{z_m}$.

D'où : $P = \prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)\prod_{m=1}^{s}(X-z_m)(X-\overline{z_m})$.

R étant non constant, p ou s est un entier supérieur ou égal à 1, donc P est de degré au moins 1 et n'admet que des racines complexes simples. Donc :

$\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } \mathbb{R}[X]\text{, de degré au moins 1}}$

$\boxed{\text{et dont toutes les racines complexes sont de mutiplicité 1.}}$

13. $I_A\neq\varnothing$ d'après la question précédente. Et un polynôme admettant au moins une racine complexe simple est au moins de degré 1.

Donc $D_A\neq\varnothing$, $D_A\subset\mathbb{N}$ et est minoré par 1, donc $\boxed{D_A \text{ admet un minimum noté } d\text{, avec } d\geqslant 1.}$

a) Par définition, on a $\pi = a\prod_{k=1}^{d}(X-\lambda_k)$, avec $a\neq 0$.

On considère A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

π est un polynôme annulateur de A, donc $Sp(A)\subset\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_d\}$.

Supposons alors qu'il existe $k_0\in[\![1,d]\!]$ / λ_{k_0} ne soit pas valeur propre de A. Alors $(A-\lambda_{k_0}I_n)$ est inversible.

π est un polynôme annulateur de A, donc $\pi(A)=0$,

donc $a\prod_{k=1}^{d}(A-\lambda_k I_n)=0$,

donc $(A-\lambda_{k_0}I_n)\times a\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{d}(A-\lambda_k I_n)=0$ (car les $A-\lambda_k I_n$, $1\leqslant k\leqslant n$, commutent).

Or $(A-\lambda_{k_0}I_n)$ est inversible, donc $(A-\lambda_{k_0}I_n)^{-1}\times(A-\lambda_{k_0}I_n)\times a\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{d}(A-\lambda_k I_n)=0$,

donc $a\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{d}(A-\lambda_k I_n)=0$. Donc $R = a\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{d}(X-\lambda_k)$ est un polynôme annulateur de degré $d-1$ (car $a\neq 0$) de A.

Et on obtient une contradiction avec la définition de d.

Donc $\boxed{\lambda_1,...,\lambda_d \text{ sont les valeurs propres complexes de } A.}$

b) Par hypothèse $\pi\in I_A$, est de degré d. Avec les notations de la question précédente, $a\neq 0$ et on a clairement $\frac{1}{a}\pi\in I_A$, de degré d et de coefficient dominant égal à 1.

<u>D'où l'existence.</u>

Soit alors un polynôme P de I_A de degré d et de coefficient dominant 1. D'après a), les racines de P sont exactement les valeurs propres de A (et donc toujours d'après a), exactement les racines de π), et elles sont simples car $P\in I_A$.

Donc $P=\prod_{k=1}^{d}(X-\lambda_k)=\frac{1}{a}\pi$. Et on a bien montré <u>l'unicité.</u>

$$\boxed{\text{L'unique élément de } I_A \text{ de degré } d \text{ et de coefficient dominant égal à 1 est } \prod_{k=1}^{d}(X-\lambda_k).}$$

14. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ / $M^2+M-I_n=0$ et $M\neq\pm I_n$.

On a vu à la question 11 que $M^2=I_n$ et M est symétrique réelle.

$M^2-I_n=0$, donc $X^2-1=(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de M, donc $Sp(M) \subset \{-1, 1\}$.

Comme M est symétrique réelle, M admet au moins une valeur propre réelle, et $Sp(M) \neq \varnothing$.

D'où $Sp(M) = \{1\}$ ou $Sp(M) = \{-1\}$ ou $Sp(M) = \{-1, 1\}$.

Supposons que $Sp(M) = \{1\}$. M est symétrique réelle donc diagonalisable et il existe P orthogonale et D diagonale telles que $M = P\,D\,P^{-1}$.

$Sp(M) = \{1\}$, donc $D = I_n$, donc $M = PI_nP^{-1} = I_n$, ce qui est exclu par l'énoncé. Donc $Sp(M) \neq \{1\}$.

De même, on montre que $Sp(M) \neq \{-1\}$.

On en déduit que $Sp(M) = \{-1, 1\}$ et par la question précédente que $\boxed{\pi_M = (X-1)(X+1).}$

Partie IV.

15. f est un endomorphisme normal, donc d'après la question 6 : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{f \text{ normal}} \|f^*(x)\| = 0 \Leftrightarrow f^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(f^*)$.

Donc $\boxed{\ker(f) = \ker(f^*).}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $g = f - \lambda Id$.

$mat_{\mathcal{B}_0}(g^*) = {}^t(A - \lambda I_n) \underbrace{=}_{\text{linéarité de la transposée}} {}^tA - \lambda\, {}^tI_n = {}^tA - \lambda I_n = mat_{\mathcal{B}_0}(f^* - \lambda Id)$.

Donc $g^* = f^* - \lambda Id$.

De plus $g^* \circ g = (f^* - \lambda Id) \circ (f - \lambda Id) = f^* \circ f - \lambda f - \lambda f^* + \lambda^2 Id$.

Comme f est normal, on en déduit : $g^* \circ g = f \circ f^* - \lambda f - \lambda f^* + \lambda^2 Id = (f - \lambda Id) \circ (f^* - \lambda Id) = g \circ g^*$.

Donc g est un endomorphisme normal, et d'après le calcul précédent, on a $\ker(g^*) = \ker(g)$,

donc $\boxed{\ker(f^* - \lambda Id) = \ker(f - \lambda Id).}$

λ valeur propre de $f \Leftrightarrow \ker(f - \lambda Id) \neq \{0\} \Leftrightarrow \ker(f^* - \lambda Id) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ valeur propre de f^*.

Donc $\boxed{f \text{ et } f^* \text{ ont même valeurs propres}}$,

$\boxed{\text{et lorsque } Sp(f) \neq \varnothing \text{ et } \lambda \in Sp(f)\text{, les sous-espaces propres de } f \text{ et } f^* \text{ associés à } \lambda \text{ sont identiques.}}$

16. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \ker(Q(f))$.

- F est le noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n.}$
- Soit $x \in F$. Alors :
  $Q(f)[f(x)] = [Q(f) \circ f](x) \underbrace{=}_{f \text{ et } Q(f) \text{ commutent}} [f \circ Q(f)](x) = f[Q(f)(x)] \underbrace{=}_{x \in \ker(Q(f))} f(0) = 0.$
  Donc $f(x) \in \ker(Q(f))$.
  On en déduit que $\boxed{F = \ker(Q(f)) \text{ est stable par } f.}$
- On a déjà vu que, puisque A est normale, ${}^tA$ commute avec toutes les puissances de A, donc ${}^tA$ commute avec $P(A)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$.
  Donc f^* commute avec $Q(f)$ et avec le même raisonnement qu'au point précédent :
  $\boxed{F \text{ est stable par } f^*.}$
- Soit $x \in F^\perp$.
  $\forall y \in F,\ \langle f(x)|y\rangle \underbrace{=}_{\text{d'après 5.c)}} \langle x|f^*(y)\rangle$.
  Or F est stable par f^*, donc $f^*(y) \in F$. Et comme $x \in F^\perp$, on a $\langle x|f^*(y)\rangle = 0$.
  Donc $\forall y \in F$, $\langle f(x)|y\rangle = 0$, donc $f(x) \in F^\perp$.
  Donc $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f.}$
- Le même type de raisonnement montre que $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f^*.}$
- Soit $x \in F$. $f_F \circ (f_F)^*(x) \underbrace{=}_{x \text{ et } f^*(x) \text{ sont dans } E} f \circ f^*(x) \underbrace{=}_{f \text{ est normal}} f^* \circ f(x)$
  Donc $f_F \circ (f_F)^*(x) \underbrace{=}_{x \text{ et } f(x) \text{ sont dans } F} (f_F)^* \circ (f_F)(x)$, car F est stable par f.
  Donc $f_F \circ (f_F)^* = (f_F)^* \circ (f_F)$, et $\boxed{f_F \text{ est un endomorphisme normal de } F.}$
- Le même type de raisonnement montre que $\boxed{f_{F^\perp} \text{ est un endomorphisme normal de } F^\perp.}$
- $\forall (x, y) \in F^2,\ \langle f_F(x)|y\rangle \underbrace{=}_{x \in E} \langle f(x)|y\rangle \underbrace{=}_{f \text{ est normal}} \langle x|f^*(y)\rangle \underbrace{=}_{y \in F} \langle x|(f_F^*)(y)\rangle$.
  D'autre part, f_F est un endomorphisme normal, donc $\forall (x, y) \in F^2,\ \langle f_F(x)|y\rangle = \langle x|(f_F)^*(y)\rangle$.
  Et par l'unicité admise en page 3, on a $\boxed{(f_F)^* = (f^*)_F}$

17. a) <u>On suppose que π_A admet une racine réelle λ.</u>

D'après la question 13, les racines de π_A sont les valeurs propres complexes de A.

λ est donc une valeur propre complexe de A, et comme $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est en fait une valeur propre ... réelle de A.

Donc, par définition, $\ker(f - \lambda Id) \neq \{0\}$, donc $\boxed{\text{il existe } e \neq 0 \text{ appartenant à } \ker(f - \lambda Id)\,.}$

Posons alors $F = Vect(e)$. $e \neq 0$, donc $\dim(F) = 1$.

Soit $x \in F$. Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R} \;/\; x = \alpha e$, donc $f(x) = \alpha f(e) = \alpha\lambda e$ et $f(x) \in F$.

Donc $\boxed{F = Vect(e) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n \text{ stable par } f.}$

De plus $e \in \ker(f - \lambda Id)$ et $\ker(f^* - \lambda Id) = \ker(f - \lambda Id)$, donc $e \in \ker(f^* - \lambda Id)$, et on montre de même que $\boxed{F = Vect(e) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n \text{ stable par } f^*.}$

b) On suppose que π_A n'admet pas de racine réelle. Par définition, π_A n'admet alors que des racines complexes simples.

On note z une racine complexe non réelle de π_A.

π_A est à coefficients réels, donc $\overline{z}$ est aussi racine complexe non réelle de π_A et comme $z \notin \mathbb{R}$, on a $z \neq \overline{z}$.

Donc $(X - z)(X - \overline{z})$ divise π_A.

Or $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - (z + \overline{z})X + z\overline{z} = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$.

On pose alors $a = -\operatorname{Re}(z + \overline{z})$ et $b = |z|^2$.

On a bien a et b réels, $a^2 - 4b < 0$ (car $X^2 + aX + b$ n'admet pas de racine réelle) et $X^2 + aX + b$ divise π_A.

On note $Q \in \mathbb{R}[X] \;/\; \pi_A = (X^2 + aX + b)\,Q$

Supposons alors $f^2 + af + bId$ inversible.

π_A est un polynôme annulateur de A donc $\pi_A(f) = 0$,

donc $(f^2 + af + bId) \circ Q(f) = 0$.

En composant à gauche par $(f^2 + af + bId)^{-1}$, on obtient $Q(f) = 0$, donc Q polynôme annulateur.

Or Q divise π_A, donc soit Q est constant non nul et on obtient une contradiction avec Q polynôme annulateur, soit $\deg(Q) = d - 2 \geqslant 1$, et Q n'admet que des racines simples, et on obtient une contradiction avec la définition de d.

Donc $\boxed{f^2 + af + bId \text{ est un endomorphisme non inversible.}}$

$G = \ker(f^2 + af + bId)$ n'est donc pas réduit à $\{0\}$, et d'après la question 16, G est stable par f, donc f_G est bien défini.

c) On note B la matrice de g dans une base orthonormée de G, et C celle de h dans cette même base orthonormée de G.

$h = g + g^*$, donc $C = B + {}^tB$. Donc ${}^tC = {}^tB + {}^t({}^tB) = {}^tB + B = C$.

C est une matrice symétrique réelle, donc C est diagonalisable, donc $\boxed{h \text{ est diagonalisable.}}$

d) $F = Vect(e, f(e))$ et $e \neq 0$ car c'est un vecteur propre, donc <u>$1 \leqslant \dim F \leqslant 2$</u> est clair.

Soit $x \in F$. On note alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = \alpha e + \beta f(e)$.

- D'où $f(x) = \alpha f(e) + \beta f^2(e)$. Or $e \in G$, donc $f^2(e) + af(e) + be = 0$.
  Donc $f(x) = \alpha f(e) + \beta(-af(e) - be) = -b\beta e + (\alpha - a\beta) f(e)$, donc <u>$f(x) \in F$.</u>
- $f^*(x) = \alpha f^*(e) + \beta f^* \circ f(e) \underbrace{=}_{f \text{ est normal}} \alpha f^*(e) + \beta f \circ f^*(e) = \alpha f^*(e) + \beta f[f^*(e)]$.

  Or $e \in G$ et est un vecteur propre de h, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; h(e) = \lambda e$.

  Donc $g(e) + g^*(e) = \lambda e$, donc $f^*(e) = \lambda e - f(e)$.

  D'où : $f^*(x) = \alpha(\lambda e - f(e)) + \beta\left(\lambda f(e) - \underbrace{f^2(e)}_{= -af(e) - be \text{ car } e \in G}\right)$,

  donc $f^*(x) = (\alpha\lambda - b\beta)\,e + (-\alpha + \lambda\beta - a\beta)\,f(e)$.

  Donc <u>$f^*(x) \in F$.</u>

On en déduit que $\boxed{F \text{ est stable par } F \text{ et } F^* \text{ et de dimension 1 ou 2.}}$

---

18. Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothése de récurrence $\mathcal{H}_n$: " si f est un endomorphisme normal de $\mathbb{R}^n$, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R \end{pmatrix}$

où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des réels, $\rho_1, ..., \rho_s$ sont des réels strictement positifs, et $\theta_1, ..., \theta_s$ des éléments de $[0, 2\pi[$. "

Pour $n=1.$ Toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est de la forme (λ), donc $\mathcal{H}_1$ est clairement vraie.

Pour $n=2.$ Alors d'après la question 1, la matrice A de f (endomorphisme normal) dans une base orthonormale est soit symétrique réelle, soit de la forme ρR_θ.

- ou bien A symétrique réelle. Comme A est la matrice de f dans une base orthonormale, f est un endomorphisme symétrique, donc f est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres. On a alors $mat_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.
- Ou bien A est de la forme ρR_θ, et on peut toujours prendre un argument θ dans $[0,2\pi[$.

Donc $\mathcal{H}_2$ est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies.

D'après la question 17, il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{n+2}$ de dimension 1 ou 2 stable par f et f^*.

- ou bien $\dim(F)=1$. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de F telle que $mat_{\mathcal{B}_1}(f_F)=(\lambda)$.
  Dans ce cas $\dim\left(F^\perp\right)=n+1$, et avec le même type de démonstration qu'à la question 16, $F^\perp$ est stable par f et f^* et $f_{F^\perp}$ est un endomorphisme normal de $F^\perp$.
  Donc, par $\mathcal{H}_{n+1}$, on peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $F^\perp$, telle que $mat_{\mathcal{B}_2}(f_{F^\perp})$ soit de la forme demandée.
  F et $F^\perp$ sont orthogonaux et supplémentaires, donc en juxtaposant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on a bien une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme demandée.
- ou bien $\dim(F)=2$. Alors, d'après $\mathcal{H}_2$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de F telle que $mat_{\mathcal{B}_2}(f_F)$ soit diagonale ou de la forme ρR_θ.
  Dans ce cas, on a $\dim\left(F^\perp\right)=n$, et par $\mathcal{H}_n$ et les mêmes arguments qu'au point précédent, on peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $F^\perp$, telle que $mat_{\mathcal{B}_2}(f_{F^\perp})$ soit de la forme demandée.
  On juxtapose $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, et en réordonnant éventuellement les vecteurs, on trouve bien une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme demandée.

Donc $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

On conclut par le théorème de récurrence double.

19. Dans ce cas, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

De plus on a montré que A est diagonalisable dans une base orthonormée, donc il existe Q une matrice orthogonale (car matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ orthonormale pour le produit scalaire canonique à une base orthonormale), telle que $A=Q\,D\,{}^tQ$.

Donc ${}^tA={}^t\left({}^tQ\right)\,D\,{}^tQ=Q\,D\,{}^tQ=A$, donc A est symétrique réelle.

On vient donc de montrer que : si A est une matrice normale, et π_A a toutes ses racines réelles, alors A est symétrique réelle.

La réciproque étant claire, on a :

$\boxed{A \text{ est une matrice normale, et } \pi_A \text{ a toutes ses racines réelles ssi } A \text{ est symétrique réelle.}}$

Partie V.

20. On note $P=(X+1)^7-X^7-1$. On a donc $P'=7(X+1)^6-7X^6$.

Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{cases}P(z)=0\\ P'(z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(z+1)^7-z^7=1\\ 7(z+1)^6-7z^6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(z+1)z^6-z^7=1\\ (z+1)^6=z^6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z^6=1\\ (z+1)^6=z^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists k\in[\![0,5]\!]\ /\ z=e^{\frac{2ik\pi}{6}}\\ (z+1)^6=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\\ 2^6=1\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}z=e^{\frac{i\pi}{3}}\\ (z+1)^6=1\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}z=e^{\frac{2i\pi}{3}}\\ (z+1)^6=1\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}z=-1\\ 0^6=1\end{cases}$$

$$\text{ou }\begin{cases}z=e^{\frac{4i\pi}{3}}\\ (z+1)^6=1\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}z=e^{\frac{5i\pi}{3}}\\ (z+1)^6=1\end{cases}$$

On note (S_k), $0\leqslant k\leqslant 5$ les six systèmes obtenus.

On a clairement (S_0) et (S_3) qui sont impossibles.

Pour (S_1) : $1+e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{i\pi}{6}}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}+e^{\frac{i\pi}{6}}\right)=e^{\frac{i\pi}{6}}\times 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$,

donc $(z+1)^6=\left(\sqrt{3}\right)^6e^{i\pi}=-\left(\sqrt{3}\right)^6$. (S_1) est donc impossible.

On prouve de même que (S_5) est impossible, et que la deuxième équation de (S_2) (et de (S_4)) est compatible avec la première.

D'où $\begin{cases}P(z)=0\\ P'(z)=0\end{cases}\Leftrightarrow z=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $z=e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

On a donc $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ racines d'ordre de multiplicité au moins 2 de P.

De plus 0 et -1 sont deux racines évidentes de P.

Et enfin, en développant avec Newton, on trouve que $\deg(P)=6$ et que le coefficient dominant de P est 7.

D'où $\boxed{P=7X(X+1)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)^2.}$

Or $\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)=X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X+1$, d'où $\boxed{P=7X(X+1)\left(X^2+X+1\right)^2.}$

21. On note $R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

    On constate que $R\,{}^tR = I_2$.

    A est inversible donc la seule valeur propre réelle de A est -1

    D'après la question 18, on peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que la matrice A de f soit de la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & R & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R \end{pmatrix}$, que l'on notera $H = diag\,(-1, ..., -1, R, ..., R)$, même si H n'est pas diagonale mais juste "diagonale par blocs", puisque R est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

    On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$, qui est orthonormale à la base orthonormale $\mathcal{B}$. Q est donc une matrice orthogonale.

    $A\,{}^tA = Q\,H\,\underbrace{{}^tQ\,Q}_{=I_n}\,{}^tH\,{}^tQ = Q\,H\,{}^tH\,{}^tQ = Q\,diag\left((-1)^2, ..., (-1)^2, R\,{}^tR, ..., R\,{}^tR\right)\,{}^tQ$

    $= Q\,diag\,(1, ..., 1, I_2, ..., I_2)\,{}^tQ = Q\,I_n\,{}^tQ = I_n$.

    Donc $A\,{}^tA = I_n$, donc $\boxed{A \text{ est une matrice orthogonale.}}$

22. On reprend $P = (X+1)^7 - X^7 - 1 = 7X\,(X+1)\,(X^2+X+1)^2$.

    On a par hypothèse que $P(A) = 0$, donc $7A\,(A+I_n)\,(A^2+A+I_n)^2 = 0$.

    Or A est inversible, donc on peut multiplier l'équation matricielle par A^{-1},

    d'où : $(A+I_n)\,(A^2+A+I_n)^2 = 0$.

    On a donc $(A+I_n)^2\,(A^2+A+I_n)^2 = 0$, et comme A est une matrice normale,

    on a $(A+I_n)\,(A^2+A+I_n) = 0$ d'après la question 10.

    Donc $A^3 + 2A^2 + 2A + I_n = 0$, donc $A\,(-A^2 - 2A - 2I_n) = I_n$, donc $A^{-1} = -A^2 - 2A - 2I_n$.

    Or, d'après la question précédente, A est une matrice orthogonale, donc ${}^tA = A^{-1} = -A^2 - 2A - 2I_n$.

    Donc $\boxed{{}^tA \text{ est un polynôme en } A.}$

23. On suppose que $A \neq -I_n$ et que n est impair.

    D'après la question 18, A admet au moins une valeur propre réelle car n est impair (on ne peut pas avoir que des matrices R_θ sur la "diagonale" dans la forme de la question 18).

    A est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de A.

    $A \neq -I_n$, donc d'après la question 18, il y a au moins une matrice du type R_θ sur la "diagonale" dans la forme proposée, donc π_A admet au moins une racine complexe non réelle.

    D'où : $\boxed{\pi_A = (X+1)\,(X^2+X+1).}$

Partie VI.

Dans cette partie, on supposera $n \geqslant 2$.

24. π_A a toutes ses racines réelles, donc d'après la question 19, A est symétrique réelle.

    Donc ${}^tA = A$ et $\boxed{P(X) = X \text{ convient.}}$

25. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

    Alors ${}^tR_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R_{-\theta}$.

    D'après la question 18, on peut trouver une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice M de f soit de la forme $M = M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_t R_{\theta_t} \end{pmatrix}$.

D'après le résultat admis dans l'énoncé à la page 3, la matrice de f^* dans la base orthonormée $\mathcal{C}$ est ${}^tM$.

Donc $\boxed{M_{\mathcal{C}}(f^*) = {}^tM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \rho_1 R_{-\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_t R_{-\theta_t} \end{pmatrix}}$.

On note $M = diag(\lambda_1, ..., \lambda_r, \rho_1 R_{\theta_1}, ..., \rho_t R_{\theta_t})$, même si à nouveau, M n'est pas diagonale, mais seulement diagonale par bloc, puisque pour $q \in [\![1,t]\!]$, $\rho_q R_{\theta_q} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que les produits entre matrices diagonales par blocs fonctionnent comme les produits entre matrices diagonales (faites quelques exemples pour vous convaincre).

Donc pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = diag\left(\lambda_1^k, ..., \lambda_r^k, \rho_1^k (R_{\theta_1})^k, ..., \rho_t^k (R_{\theta_t})^k\right)$

et pour $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, on a $P(M) = diag(P(\lambda_1), ..., P(\lambda_r), P(\rho_1 R_{\theta_1}), ..., P(\rho_t R_{\theta_t}))$.

D'où :

$$(f^* = P(f)) \Leftrightarrow (M_{\mathcal{C}}(f^*) = M_{\mathcal{C}}(P(f))) \Leftrightarrow ({}^tM = P(M))$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1,r]\!], & \lambda_k = P(\lambda_k) \\ \forall k \in [\![1,t]\!], & \rho_k R_{-\theta_k} = P(\rho_k R_{\theta_k}) \end{cases}$$

Soit alors $\theta \in [0, 2\pi[$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

α est valeur propre de R_θ ssi $(R_\theta - \alpha I_2)$ n'est pas inversible
ssi $\det(R_\theta - \alpha I_2) = 0$
ssi $(\cos\theta - \alpha)^2 + (\sin\theta)^2 = 0$
ssi $(\cos\theta - \alpha)^2 - (i\sin\theta)^2 = 0$
ssi $(\cos\theta - \alpha + i\sin\theta)(\cos\theta - \alpha - i\sin\theta)$
ssi $\alpha = e^{i\theta}$ ou $\alpha = e^{-i\theta}$.

On remarque que $R_\theta \times \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ -\sin\theta + i\cos\theta \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

et que $R_\theta \times \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont valeurs propres (éventuellement confondues) de R_θ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base (les deux vecteurs sont clairement non proportionnels) de vecteurs propres associés.

On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $\underline{\forall\theta} \in [0, 2\pi[$, $R_\theta = Q \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} Q^{-1}$.

Et $\forall \rho > 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi[$, $R_\theta = Q \underbrace{\begin{pmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{pmatrix}}_{\text{noté } \Delta_\theta} Q^{-1}$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$.

Soit $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$P(R_\theta) = \sum_{k=0}^{p} a_k R_\theta^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(Q\Delta_\theta Q^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(Q \times \Delta_\theta^k \times Q^{-1}\right) = Q \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \Delta_\theta^k\right) Q^{-1}.$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k \Delta_\theta^k = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} \left(\rho e^{i\theta}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\rho e^{-i\theta}\right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\left(\rho e^{i\theta}\right) & 0 \\ 0 & P\left(\rho e^{-i\theta}\right) \end{pmatrix}$.

Donc $P(R_\theta) = Q \begin{pmatrix} P\left(\rho e^{i\theta}\right) & 0 \\ 0 & P\left(\rho e^{-i\theta}\right) \end{pmatrix} Q^{-1}$, avec la même matrice Q pour toutes les valeurs de

On revient à l'équivalence du début de la question.

$$(f^* = P(f)) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1,r]\!], & \lambda_k = P(\lambda_k) \\ \forall k \in [\![1,t]\!], & \rho_k R_{-\theta_k} = P(\rho_k R_{\theta_k}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1,r]\!], & \lambda_k = P(\lambda_k) \\ \forall k \in [\![1,t]\!], & Q \begin{pmatrix} \rho_k e^{-i\theta_k} & 0 \\ 0 & \rho_k e^{i\theta_k} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} P\left(\rho_k e^{i\theta_k}\right) & 0 \\ 0 & P\left(\rho_k e^{-i\theta_k}\right) \end{pmatrix} Q^{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1,r]\!],\ \lambda_k = P(\lambda_k) \\ \forall k \in [\![1,t]\!],\ \begin{pmatrix} \overline{\mu_k} & 0 \\ 0 & \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\mu_k) & 0 \\ 0 & P(\overline{\mu_k}) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1,r]\!],\ \lambda_k = P(\lambda_k) \\ \forall k \in [\![1,t]\!],\ \overline{\mu_k} = P(\mu_k) \text{ et } \mu_k = P(\overline{\mu_k}) \end{cases}$$

Et comme P est à coefficients réels, on a finalement :

$$\boxed{(f^* = P(f)) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![1,r]\!],\ \lambda_k = P(\lambda_k) \\ \forall k \in [\![1,t]\!],\ \overline{\mu_k} = P(\mu_k) \end{cases}.}$$

27. Pour $k \in [\![1,r]\!]$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $L_k \in \mathbb{R}[X]$ est clair.

De manière naturelle, le conjugué du polynôme à coefficients complexes $U = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est le polynôme $\overline{U} = \sum_{k=0}^{p} \overline{a_k} X^k$,

et on a pour α complexe et $(U,V) \in (\mathbb{C}[X])^2$, $\overline{U+V} = \overline{U} + \overline{V}$, $\overline{\alpha U} = \overline{\alpha}\,\overline{U}$ et $\overline{U \times V} = \overline{U} \times \overline{V}$.

De plus $U \in \mathbb{R}[X] \Leftrightarrow U = \overline{U}$.

Soit $k \in [\![1,t]\!]$. On remarque que $\overline{Q_k(X)} = T_k(X)$.

Donc $\overline{\overline{\mu_k} Q_k(X) + \mu_k T_k(X)} = \overline{\overline{\mu_k}}\,\overline{Q_k(X)} + \overline{\mu_k}\,\overline{T_k(X)} = \mu_k T_k(X) + \overline{\mu_k} Q_k(X)$.

Donc $\overline{\mu_k} Q_k(X) + \mu_k T_k(X)$ est à coefficient réels.

On en déduit que $\boxed{P \in \mathbb{R}[X].}$

Soit $j \in [\![1,r]\!]$.

$P(\lambda_j) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k L_k(\lambda_j) + \sum_{k=1}^{t} \left(\overline{\mu_k} Q_k(\lambda_j) + \mu_k T_k(\lambda_j)\right)$.

Or λ_j est racine de S, donc $Q_k(\lambda_j) = T_k(\lambda_j) = 0$.

Et $L_k(\lambda_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k \end{cases}$.

Donc $\forall j \in [\![1,r]\!],\ P(\lambda_j) = \lambda_j$.

Soit $j \in [\![1,t]\!]$.

$P(\mu_j) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k L_k(\mu_j) + \sum_{k=1}^{t} \left(\overline{\mu_k} Q_k(\mu_j) + \mu_k T_k(\mu_j)\right)$.

Or μ_j est racine de Q, donc de L_k, donc $L_k(\mu_j) = 0$.

$$Q_k(\mu_j) = \frac{S(\mu_j)}{S(\mu_k)} \times \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{t} \frac{(\mu_j - \mu_l)(\mu_j - \overline{\mu_l})}{(\mu_k - \mu_l)(\mu_k - \overline{\mu_l})} \right) \times \left(\frac{\mu_j - \overline{\mu_k}}{\mu_k - \overline{\mu_k}} \right) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k \end{cases}.$$

$$T_k(\mu_j) = \frac{S(\mu_j)}{S(\overline{\mu_k})} \times \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{t} \frac{(\mu_j - \mu_l)(\mu_j - \overline{\mu_l})}{(\overline{\mu_k} - \mu_l)(\overline{\mu_k} - \overline{\mu_l})} \right) \times \left(\frac{\mu_j - \mu_k}{\overline{\mu_k} - \mu_k} \right) = 0.$$

Donc $\forall j \in [\![1,t]\!],\ P(\mu_j) = \overline{\mu_j}$.

On a $\forall j \in [\![1,r]\!],\ P(\lambda_j) = \lambda_j$ et $\forall j \in [\![1,t]\!],\ P(\mu_j) = \overline{\mu_j}$,

donc, d'après la question 26, $f^* = P(f)$, donc ${}^tA = P(A)$.

De plus, on remarque que $\deg(S) = r$, pour $k \in [\![1,r]\!]$, $\deg(L_k) = r - 1 + 2t$ et pour $k \in [\![1,t]\!]$, $\deg(Q_k) = \deg(T_k) = r + 2(t-1) + 1 = r + 2t - 1$.

Donc $\deg(P) \leqslant r - 1 + 2t$, donc $\deg(P) \leqslant n - 1$.

$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ dans } \mathbb{R}[X], \text{ de degré inférieur ou égal à } n-1, \text{ tel que } {}^tA = P(A).}$

28. On a alors $S(X) = X(X+1)$, $Q(X) = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

On a donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ et $\mu_1 = j$.

Donc $Q(-1) = 1$ et $L_2(X) = (-X)(X^2 + X + 1)$.

De plus, on a $1 + j + j^2 = 0$, $j^3 = 1$ et $j^2 = \overline{j}$.

Donc $S(\mu_1) = S(j) = j(j+1) = j(-j^2) = -j^3 = -1$.

De même, $S(\overline{\mu_1}) = -1$.

D'où $Q_1(X) = -X(X+1)\left(\frac{X - j^2}{j - j^2}\right)$ et $T_1(X) = -X(X+1)\left(\frac{X - j}{j^2 - j}\right)$.

Donc $P = 0 \times L_1 - L_2 + (j^2 Q_1 + j T_1)$.

Et après calculs, on trouve $\boxed{P = 2X^3 + 3X + 2.}$