CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.

Etant donné un entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris en 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & P - P' \end{array}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0, n]\!], \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, ..., s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id.$$

7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Dans le reste du problème, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

$$T_n(X) = S_n(nX)$$

Dans les parties II, III et IV, on admettra le résultat suivant qui est démontré indépendamment dans la partie V :

Soit n un entier naturel ≥ 2. Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< \ n$.

Partie II.

8. Donner le tableau de variations de S_3. Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle $(x \mapsto e^x)$ en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. (*Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.*)

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n, pour tout entier naturel **impair** n.

10. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
    (a) Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (*Indication : On pourra étudier le signe de $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.*)
    (b) Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel l.
        i. Soit ε un nombre réel > 0. Justifier qu'il existe un entier naturel M tel que :
        $$\forall m \in \mathbb{N}, m > M \Rightarrow \ |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon.$$
        ii. En déduire que la suite $(S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^l.
    (c) En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Partie III.

Soit h la fonction de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = xe^{1-x}.$$

11. Etudier la fonction h. Représenter son graphe sur $\mathbb{R}$.
12. Démontrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\infty, 1[$ dans $]-\infty, 1[$ telle que :

$$\forall x \in\,]-\infty, 1[\,, h(g(x)) = x.$$

    Représenter le graphe de g. L'étude précise de g n'est pas demandée.
13. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.
14. Démontrer que ρ est dans l'intervalle $]-1/2, -1/4[$. *Indication : on pourra utiliser le fait que* $\ln 2 \geq \frac{13}{20}$.
15. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leq 1$ et $|ze^{1-z}| \leq 1$. Soit n un entier naturel.
    (a) Justifier l'égalité :

$$1 - e^{-nz}T_n(z) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$

    (b) En déduire que :

$$|1 - e^{-nz}T_n(z)| \leq 1 - e^{-n}T_n(1).$$

    (c) En déduire que $T_n(z) \neq 0$.
16. Soit n un entier naturel impair ≥ 3. Démontrer que α_n est dans l'intervalle $]-n, n\rho[$.

Partie IV.

Pour tout entier naturel m, on pose $\gamma_{2m+1} = \alpha_{2m+1}/(2m+1)$.

17. Démontrer que pour tout nombre réel u et tout entier naturel n, on a :

$$e^{-u}S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n e^{-t} dt.$$

18. Soit m un entier naturel. On note $n = 2m+1$. Justifier l'égalité :

$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n dt = -\frac{n! e^n}{n^{n+1}}.$$

19. En déduire que la suite $(\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1} dt)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.

20. Démontrer que $(\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}dt)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
21. Déterminer un équivalent de α_{2m+1}.

Partie V.

Cette partie a pour but de démontrer le résultat admis dans les parties précédentes : Si n est un entier naturel ≥ 2, les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

22. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_p$ des nombres complexes de modules ≤ 1. Soient $\theta_1, ..., \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que $|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.
    (a) Démontrer que $\alpha_1, ..., \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
    (b) On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = e^{it}$. En développant $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
    (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.
23. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. On note $a_0, ..., a_n$ ses coefficients :
$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$
On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.
    (a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.
    (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X - 1)P(X)$.
    (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 22c.*
24. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Soient $a_0, ..., a_n$ ses coefficients :
$$Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$
On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.
25. Conclure.