CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

094

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème

Etant donné un entier naturel n on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dont le degré est inférieur ou égal à n.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n lorsque le coefficient a_n est non nul ; ce coefficient est alors appelé « *coefficient dominant de P* ». Dans tout le problème on identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et sa fonction polynomiale associée.

Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie pour $x \in [-1, 1]$ par : $c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

Partie 1.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, la fonction c_n est continue sur [-1,1].

2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$ et $c_3(x)$.

3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2 et c_3.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1]$, $c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2\, x\, c_n(x)$.

5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6. Prouver que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie 2.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$.

1.1 Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

Dans toute la suite du problème $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

1.2 Soient p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\,\theta)\, \cos(q\,\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

Démontrer que, si l'on a $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.

Calculer $I_{p,p}$.

1.3 Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ définie dans la partie **1** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cette base est-elle orthonormale ?

1.4 Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.5 Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(X^n|T_n) = \dfrac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des réels et P le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

2.1 Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que l'on a : $P = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k$

2.2 Calculer b_n.

2.3 Montrer que l'on a : $\|P\|^2 \geqslant \frac{\pi}{2} b_n^2$

2.4 En déduire la valeur de :

$$\operatorname*{Inf}_{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \right)$$

Partie 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on pose $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

1. Vérifier que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie **1** .

2. Soit $\mathscr{L} = (L_1, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire les polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_i^j$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker : $\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2.1 $\mathscr{L}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2.2 Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i) \ \text{ avec } \ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \ \ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$$

2.3 Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

2.3a Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $R = S\, T_n + U$.

2.3b Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)$$

2.4 Dans toute cette question on fixe un entier naturel k dans $[\![1, n]\!]$.

2.4a On rappelle que $\forall x \in [-1, 1], \ T_n(x) = c_n(x)$ (voir partie 1.).

Montrer que :

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}\, n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}\, n}{\sin(\theta_k)}$$

2.4b Soit la fonction $\psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \psi_k(x) = \dfrac{T_n(x)}{(x - x_k)\, T_n'(x_k)} & \text{lorsque} \quad x \neq x_k \\ \text{et} & \\ \psi_k(x_k) = 1 & \end{cases}$

Vérifier que, pour tout x réel, on a : $\psi_k(x) = L_k(x)$.

2.4c Soit $j \in \mathbb{N}$.

Calculer $\displaystyle\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$.

En déduire que l'intégrale $u_j = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, \mathrm{d}\theta$ existe.

Montrer que l'on a $\lambda_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{n}\, u_n \sin(\theta_k)$.

2.4d Vérifier que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad u_{j+2} - 2\, u_{j+1} \cos(\theta_k) + u_j = 0$$

2.4e En déduire que $\lambda_k = \dfrac{\pi}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a la relation :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right)\right)$$