ANNALES OFFICIELLES 2014

CONCOURS ECRICOME PREPA

ÉPREUVE ***ÉCRITE***

ÉPREUVE **SPÉCIFIQUE**

OPTION ÉCONOMIQUE

Mathématiques

ECRICOME

VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier ches les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égales.

Epreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1).$$

On note $\ker(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image.

Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

PARTIE I : Réduction de l'endomorphisme f.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Justifier que f n'est pas bijectif. En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f.
3. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f.

   Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).

   Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v.$$

6. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, tel que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PARTIE II : Résolution d'une équation.

Dans les questions 1, 2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f.$$

1. Montrer que :

   $$f \circ g = g \circ f.$$

   En déduire que :

   $$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v).$$

2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
3. On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question **I.6.** Justifier que :

   $$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

   où a et b sont les deux réels définis à la question précédente **(II.2)** et c, d, e des réels.
4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$? **Indication** : *utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question* **I.6.**

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.
2. Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.

3. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
4. Etablir que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
5. Donner le développement limité à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

6. Prouver que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
7. Etablir que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1.$$

En déduire que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

8. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n.$$

9. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

EXERCICE 3

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$, on note $q = 1 - p$.

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.

PARTIE I : Etude d'une première expérience.

On procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ».

On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : « la pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

« FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE »

alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Simulation informatique.
   (a) Ecrire une fonction en Turbo-Pascal d'en-tête :

   function LANCER (p : real) : integer ;

   qui crée un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0, 1]$ et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à p et 0 sinon.

   (b) Ecrire une fonction en Turbo-Pascal d'en-tête :

   function PREMIER_PILE (p : real) : integer ;

   qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier pile et renvoie le nombre de lancers effectués. **Indication** : *si on souhaite, on pourra utiliser la fonction LANCER en la répétant convenablement.*

   (c) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui demande un réel p à l'utilisateur, puis qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second pile et affiche le nombre de faces obtenus en tout. **Indication** : *on pourra utiliser la fonction PREMIER_PILE en la répétant convenablement.*

2. Soit n un entier naturel non nul. Donner la loi de X_n. Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.

3. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

4. Donner la valeur des probabilités :

$$P(Y = 0), \quad P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P(Y = 2).$$

5. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements :

$$(Y = n) \quad \text{et} \quad (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$$

   sont égaux.

6. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y=n) = (n+1)\, p^2 q^n.$$
7. Vérifier par le calcul que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = 1.$$
8. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.
9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

   En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

PARTIE II : Etude d'une seconde expérience.

On procède à l'expérience suivante :
$\mathcal{F}$: « *Deux joueurs se relaient pour effectuer des lancers successifs de la pièce pendant la pause déjeuner.*

Le joueur 1 arrive à 12h (considéré comme l'instant 0) et joue jusqu'à l'arrivée du joueur 2.

Le joueur 2 arrive au hasard entre 12h et 13h puis joue jusqu'à 13h exactement (qui est considéré comme l'instant 1). »

On note :

- R la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 1 ;
- S la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 2 ;
- T la variable aléatoire égale à la durée (en heure) de jeu effectuée par le joueur ayant joué le plus longtemps c'est-à-dire que :
$$T = \max(R, S).$$

Pour toute variable aléatoire X, on note F_X la fonction de répartition de X.

On admet que R et S sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant l'expérience $\mathcal{F}$. En outre, on suppose que :

$$\boxed{R \text{ suit la loi uniforme sur } [0,1] \text{ et que } S = 1 - R.}$$

(*cette dernière relation traduisant que le temps total consacré au jeu par le joueur 1 et le joueur 2 est exactement d'une heure*).

1. Expliciter la fonction F_R puis la fonction F_S. Reconnaitre alors la loi suivie par la variable aléatoire S.

2. Pour tout réel t, prouver que :

$$P(T \leqslant t) = P((R \leqslant t) \cap (R \geqslant 1-t)).$$

3. Déterminer, pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, l'expression de $F_T(t)$ en fonction de t.

4. Justifier que T suit la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

5. En déduire que T admet une espérance $E(T)$ et une variance $V(T)$ que l'on précisera.

CORRIGÉ

Exercice d'algèbre

PARTIE I

I1. $Kerf=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=0\}$. Ce qui amène à résoudre $\begin{cases} x=0\\ x+2y+z=0\\ 2x-2y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ 2y+z=0\end{cases}$.

$Kerf=\{(0,y,-2y), y\in\mathbb{R}\}=Vect\{(0,1,-2)\}$ .Donc u constitue une famille génératrice de $Kerf$

Le vecteur $u=(0,1,-2)$ est non nul, il constitue donc une base de $Ker\, f$.

D'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2.

De plus $\operatorname{Im} f=Vect\{(1,1,2);(0,2,-2);(0,1,-1)\}=Vect\{(1,1,2);(0,1,-1)\}$ La famille $\{(1,1,2);(0,1,-1)\}$ est donc génératrice de Im *f,* espace vectoriel de dimension 2, et contient deux vecteurs

Im f a donc pour base : $\{(1,1,2);(0,1,-1)\}$

I2. $Kerf\neq\{0\}$, *f* n'est donc pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et 0 est une valeur propre de *f.*

I3. $u\neq 0$ et $f(u)=0; v\neq 0$ et $f(v)=v$; *u* est donc un vecteur propre de *f* associé à la valeur propre 0 et *v* est un vecteur propre de *f* associé à la valeur propre 1.

Le sous espace propre de *f* associé à la valeur propre 0 est *Kerf* de dimension 1 d'après I1.
Le sous espace propre de *f* associé à la valeur propre 1 est

$$E_1(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\begin{cases} x=x\\ x+2y+z=y\\ 2x-2y-z=z\end{cases}\right\}=Vect\{v\}\ \text{Dim } E_1(f)=1.$$

I4. $$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&1\\2&-2&-1-\lambda\end{pmatrix}\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim}\begin{pmatrix}-\lambda&0&0\\2&-2&-1-\lambda\\1&2-\lambda&1\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow(1+\lambda)L_3+L_2}{\sim}\begin{pmatrix}-\lambda&0&0\\3+\lambda&-\lambda^2+\lambda&0\\1&2-\lambda&1\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont donc 0 et 1, la somme des dimensions des sous espaces propres est 2, *f* n'est pas diagonalisable.

I5. On a $\begin{cases} x=x\\ x+2y+z=y+1\\ 2x-2y-z=z-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z=1\\ 2x-2y-2z=-1\end{cases}\underset{L_2\leftarrow 2L_1-L_2}{\Leftrightarrow}\begin{cases} x+y+z=1\\ 4y+4z=3\end{cases}$

Les vecteurs t solutions sont les triplets $t=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}-z,z\right)$ avec $z\in\mathbb{R}$.

I6 D'après la dernière colonne de *T,* $f(w)=v+w$, *w* est un des vecteurs *t* précédents avec *z* =0. On a donc *w*
$w=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right)$. Reste à prouver que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient trois réels α,β,γ tels que $\alpha u+\beta v+\gamma w=0$

$\alpha u+\beta v+\gamma w=0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}\gamma=0\\ \alpha+\beta+\frac{3}{4}\gamma=0\\ -2\alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ -2\alpha-\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$: (u,v,w) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de *f* dans cette base est bien *T*.

PARTIE II

II1. $f\circ g=(g\circ g)\circ g=g\circ(g\circ g)=g\circ f$

On applique à u : $f(g(u))=g(f(u))=g(0)=0$ et $f(g(v))=g(f(v))=g(v)$.

II2. $f(g(u))=0$ donc $g(u)\in Kerf=Vect\{u\}$, donc il existe un réel a tel que $g(u)=au$

$f(g(v))=g(v)$ donc $g(v)\in E_1(f)=Vect\{v\}$ et il existe un réel b tel que $g(v)=bv$.

II3. On vient de voir $g(u)=au$ et $g(v)=bv$ ce qui donne les 2 premières colonnes de la matrice N.
$g(w)$ peut s'écrire dans la base (u,v,w) : $g(w)=cu+dv+ew$ où c, d, e sont des réels ce qui donne la troisième colonne.

III4.Si g existe, sa matrice dans la base (u,v,w) est $N=\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ et, comme $g\circ g=f$, elle vérifie

$N^2=T$

Ce qui donne : $\begin{cases} a^2=0 \\ ac+ce=0 \\ b^2=1 \\ bd+de=1 \\ e^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b^2=1 \\ (b+e)d=1 \\ e^2=1 \end{cases}$ On a donc $b=\pm1, e=\pm1$ mais $b+e\neq0$

Si $b=1$ alors $e=1$ et $d=\frac{1}{2}$

Si $b=-1$ alors $e=-1$ et $d=-\frac{1}{2}$

On a donc deux matrices **possibles** $N_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=-N_1$

Comme $N_1^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=T$ et $N_2^2=(-N_1)^2=T$

On conclut qu'il existe donc bien des endomorphismes g tels que $g\circ g=f$.
(Plus précisément il en existe 2, dont les matrices dans la base (u,v,w) sont les deux matrices précédentes).

Exercice 2 analyse

1. $f(0)=1>0$ et pour x strictement positif, $f(x)$ a le signe de $\ln(1+x)>0$: $f>0$.

On montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n>0$: $u_0=e$, donc u_0 existe et $u_0>0$. Si u_n existe et $u_n>0$, alors d'une part $u_{n+1}=f(u_n)$ existe puisque $D_f=[0,+\infty[$, d'autre part $u_{n+1}=f(u_n)>0$ d'après l'étude du signe de f. La propriété est héréditaire. Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, u_n \text{ existe}}$.

2. **informatique**

```
PROGRAM ECRICOME2014;
uses wincrt;
function f(x:real):real;
begin
if x>0 then f:=x/ln(1+x);
if x=0 then f:=1;
if x<0 then writeln('la fonction est définie pour x psitif');
end;
var
k,n:integer;
v:real;
begin
writeln('donnez un entier naturel');
readln(N);
v:=2;
for k:=1 to N do v:=f(v);
writeln('v',N,'=',v);
end.
```

3. f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles continues, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle.

En 0 : $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=1=f(0)$ Donc f est continue en 0 et par conséquent sur $[0,+\infty[$.

4. f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles de classe C^1, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle.

5. $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$ et $\dfrac{x}{1+x}=x(1+x)^{-1}=x(1-x+x\varepsilon(x))=x-x^2+x^2\varepsilon(x)$

$\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}=x-\dfrac{1}{2}x^2-x+x^2+x^2\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$.

Sur $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}$ avec $\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2}x^2$ et $(\ln(1+x))^2\underset{0}{\sim}x^2$.

Par quotient : $f'(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2}$

6. On utilise le théorème de prolongement d'une fonction de classe C^1 : (1) f est continue sur $[0,+\infty[$ (2) f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\dfrac{1}{2}$, limite finie. Donc f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$

7. $x\geq e-1\Rightarrow x+1\geq e\Rightarrow \ln(1+x)\geq 1$ par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$

En multipliant par $(1+x)>0$, on obtient $(1+x)\ln(1+x)\geq 1+x$.

$f(x)-x=\dfrac{x}{\ln(1+x)}(1-\ln(1+x))$ avec $x\geq e-1, \ln(1+x)\geq 1, 1-\ln(1+x)\leq 0$: $f(x)-x\leq 0$, donc $f(x)\leq x$.

$$f'(x)=\frac{\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}=\frac{1}{(1+x)(\ln(1+x))^2}[(1+x)\ln(1+x)-x]$$

Dans le crochet : $(1+x)\ln(1+x)\geq 1+x\geq x$, devant le crochet, tout est positif, donc $\forall x\geq e-1, f'(x)\geq 0$.

8. Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, e-1\leq u_n$. Pour n=0, $u_0=e\geq e-1$

Supposons que pour un certain n, $e-1\leq u_n$.

$\forall x\geq e-1, f'(x)\geq 0$ et f est croissante sur $[e-1,+\infty[$. On a donc $f(e-1)\leq f(u_n)$.

Or $f(e-1)=\dfrac{e-1}{\ln(e)}=e-1$, et $f(u_n)=u_{n+1}$, donc $e-1\leq u_{n+1}$. La propriété est héréditaire.

$\forall n\in\mathbb{N}, e-1\leq u_n$

9. On vient de prouver que la suite (u_n) est minorée par e-1.

$\forall x\geq e-1, f(x)\leq x$, on applique cette inégalité à u_n qui est bien dans l'intervalle $[e-1,+\infty[$ pout tout entier naturel n et on obtient $f(u_n)\leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1}\leq u_n$.

La suite est décroissante, donc elle converge.

Sa limite $L\in[e-1,+\infty[$, f est continue sur $[0,+\infty[$, la limite L vérifie $L=f(L)$.

$f(L)-L=\dfrac{L}{\ln(1+L)}(1-\ln(1+L))=0$ donc $\ln(1+L)=1$, et L=e-1.

Exercice 3 probabilités

PARTIE I

1. **Informatique probabilités**

a) Fonction LANCER

```
function LANCER(p:real):real;
begin
if random < p then LANCER:=1 else LANCER:=0;
end;
```

b) Fonction PREMIER_PILE

```
function PREMIER_PILE(p:real):integer;
var
s:integer;
begin
s:=0;
repeat
s:=s+1;
until LANCER(p)=1;
PREMIER_PILE:=s;
end;
```

c) Un programme

Commentaire :

Until $j=2$ pour la simulation de $Y=Y_2$

Until $j=k$ si on veut simuler Y_k

```
program ecri2014;
uses wincrt;
var
i,j:integer;
p:real;
function LANCER(p:real):real;
begin
if random < p then LANCER:=1 else LANCER:=0;
end;
function PREMIER_PILE(p:real):integer;
var
s:integer;
begin
s:=0;
repeat
s:=s+1;
until LANCER(p)=1;
PREMIER_PILE:=s;
end;
begin
RANDOMIZE;
writeln('donnez un réel compris entre 0 et 1');
readln(p);
i:=0;
j:=0;
repeat
i:=PREMIER_PILE(p)+i;
j:=j+1;
until j=2;
writeln('le nombre de faces obtenus est ',i-2);
end.
```

2. X_n compte le nombre de succès (les PILE), lors de n expériences identiques et indépendantes à deux issues, la probabilité de succès étant p : $X_n \to \mathrm{B}(n,p); E(X_n)=np; V(X_n)=npq$.

3. $Y(\Omega)=\mathbb{N}$.

4. $P(Y=0)=P(\overline{F_1}\cap\overline{F_2})=p^2$. $P(Y=1)=P((F_1\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_3})\cup(\overline{F_1}\cap F_2\cap\overline{F_3}))=qp^2+pqp=2qp^2$ par incompatibilité des événements de l'union et indépendance des tirages.

$P(Y=3)=P((F_1\cap F_2\cap\overline{F_3}\cap\overline{F_4})\cup(F_1\cap\overline{F_2}\cap F_3\cap\overline{F_4})\cup(\overline{F_1}\cap F_2\cap F_3\cap\overline{F_4}))=3q^2p^2$.

5. On procède par double inclusion : si $(Y=n)$ est réalisé, alors on a eu deux PILE et n FACE donc $n+2$ lancers. Le dernier lancer a donné le deuxième pile, donc $\overline{F_{n+2}}$ est réalisé. Le premier pile est apparu au cours des $n+1$ premiers lancers, il n'y a pas eu d'autre PILE pendant ces lancers : $(X_{n+1}=1)$ est réalisé. Réciproquement si $\overline{F_{n+2}}\cap(X_{n+1}=1)$ est réalisé, alors le nombre de FACE avant le deuxième pile est n et $(Y=n)$ est réalisé. On a donc $(Y=n)=\overline{F_{n+2}}\cap(X_{n+1}=1)$.

6. $P(Y=n)=P((X_{n+1}=1)\cap\overline{F_{n+2}})=P(X_{n+1}=1)P(\overline{F_{n+2}})$ par indépendance des lancers.

$P(Y=n)=\binom{n+1}{1}pq^n p=(n+1)p^2q^n$.

7. $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)p^2q^n = p^2\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1}$ on reconnait une série géométrique dérivée de raison $q \in]0,1[$ donc convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = p^2\dfrac{1}{(1-q)^2} = 1$.

8. Sous réserve d'absolue convergence : la simple convergence suffit puisque $\forall \in \mathbb{N}, nP(Y=n) \geq 0$

$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)np^2q^n = p^2q\sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1)q^{i-2}$ on reconnait une série géométrique dérivée de raison $q \in]0,1[$ donc convergente, ce qui lève la réserve ; Y admet une espérance

$$E(Y) = p^2q\left(\frac{2}{\left(1-q\right)^3}\right) = 2\frac{q}{p}.$$

9. $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (Y_k = n) = (X_{n+k-1} = k-1) \cap \overline{F_{n+k}}$

Par indépendance des tirages, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(Y_k = n) = P(X_{n+k-1} = k-1) \times P\left(\overline{F_{n+k}}\right) = \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1}q^n \times p = \binom{n+k-1}{n} p^k q^n}$$

PARTIE II

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. $F_S(x) = P(S \leq x) = P(1-R \leq x) = P(R \geq 1-x) = 1 - F_R(1-x)$.

Si $x < 0, 1-x > 1$, alors $F_S(x) = 1 - F_R(1-x) = 1 - 1 = 0$.
Si $0 \leq x \leq 1, 0 \leq 1-x \leq 1, F_R(1-x) = 1-x$ alors $F_S(x) = 1 - F_R(1-x) = 1-(1-x) = x$
Si $x > 1, 1-x < 0, F_R(x) = 0$ alors $F_S(x) = 1 - F_R(1-x) = 1 - 0 = 1$.
On constate donc que $\boxed{R \text{ suit aussi la loi uniforme sur } [0,1]}$

2. $P(T \leq t) = P((R \leq t) \cap (S \leq t)) = P((R \leq t) \cap (1-R \leq t)) = P((R \leq t) \cap (R \geq 1-t))$.

3. Si $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $1-t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$P((R \leq t) \cap (R \geq 1-t)) = P(1-t \leq R \leq t) = F_R(t) - F_R(1-t) = t-(1-t) = 2t-1$. Donc $P(T \leq t) = 2t-1$.

4. Si $t < \frac{1}{2}$, alors $1-t > \frac{1}{2}$. Les événements $(R \leq t)$ et $(R \geq 1-t)$ sont incompatibles : $P(T \leq t) = 0$

Si $t > 1$, alors $1-t < 0$. Les événements $(R \leq t)$ et $(R \geq 1-t)$ sont certains et $P(T \leq t) = 1$

Bilan : $F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ On reconnait la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $E(T) = \frac{3}{4}$

Sous réserve de convergence $E\left(T^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ f_T\left(t\right) dt$ avec $f_T\left(t\right)=\begin{cases} 0 \text{ si } t \notin \left[\frac{1}{2},1\right] \\ \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \text{ si } t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$

$E\left(T^2\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^2\ 2\ dt$ donc $E\left(T^2\right)$ existe puisque la fonction : $t \mapsto 2t^2$ continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$

$V\left(T\right)$ existe et on a $V\left(T\right)=\left[2\dfrac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{24}-\dfrac{9}{16}=\dfrac{1}{48}$

RAPPORT

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que près de deux tiers des candidats les abordent désormais.

Avec une moyenne de 10 et un écart-type de 5,4, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

PARTIE I : Réduction de l'endomorphisme f.

Cette partie a été abordée par la quasi-totalité des candidats. Elle nécessitait une bonne connaissance de son cours et la capacité à prendre un peu de recul par rapport aux exercices trop typés sur la réduction des endomorphismes.

1. Cette question fut discriminante, bien que réussie par une petite majorité des canditats, une grande minorité a pu répondre qu'à l'une des questions.
2. Cette question est bien traitée par la très grande majorité des candidats.

3. Si une grande minorité parvient à répondre correctement à cette question, une majorité de candidats oublie de mentionner que u et v sont non nuls et affirme que $E_\lambda(f) = \text{Vect}(u)$ (idem avec μ et v) sans la moindre justification. Certains candidats ont tenté la recherche de toutes les valeurs propres par les méthodes « habituelles » (i.e. par pivot sur la matrice $A - \lambda I_3$) sans succès généralement.

4. Seule une petite minorité a bien perçu la subtilité de la question et pense à déterminer toutes les valeurs propres de f puis à conclure correctement. Une petite majorité des candidats ne fournit aucune explication sérieuse pour étayer leur affirmation. Les autres candidats considèrent comme évident que λ et μ sont les seules valeurs propres de f et concluent via la caractérisation sur la somme des dimensions des espaces propres.

5. Cette question s'est avérée très clivante : un candidat sur trois a bien répondu, les autres n'ont pas progressé substantiellement vers la solution.

6. Peu de candidats ont répondu correctement à cette question même si près d'un tiers d'entre eux ont réussi à l'interpréter et à faire le lien avec la question précédente. Seule une minorité des candidats vérifie que C est une base.

PARTIE II : Résolution d'une équation.

1. Près de la moitié des candidats réponde correctement, l'autre moitié se limitant à vérifier la commutation de f et g.

2. Seuls les meilleurs candidats traitent cette question.

3. Presque tous les candidats abordant cette question (soit 33 % des candidats), la traitent convenablement.

4. La question est assez peu correctement traitée même si un quart des candidats donne des éléments substantiels de réponses (en donnant les valeurs possibles des solutions (a, b, c, d, e) du système mais sans travailler par équivalence et donc sans vérifier que les solutions proposées satisfont bien au système considéré).

EXERCICE 2

Chacune des questions de cet exercice est abordée par au moins les trois quarts des candidats.

1. Si le signe de f est correctement argumenté par la majorité des candidats, près d'un tiers des candidats ne parvient pas à y répondre ! Un candidat sur trois justifie convenablement l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une récurrence en posant la bonne hypothèse de récurrence (et non pas « u_n existe » !).

2. Un bon tiers des candidats traite bien cette question et au total une moitié des candidats fournit un programme à peu près correct même si un tiers des candidats n'aborde pas cette question.

3. Cette question est bien traitée par une large majorité des candidats.

4. Cette question est bien traitée par une large majorité des candidats.

5. Si la moitié des candidats donne le $DL_2(0)$ demandé, l'autre moitié s'avère incapable de fournir le $DL_2(0)$ correct de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$. Au final, seul un quart des candidats donne une réponse correcte à l'intégralité de la question.

6. Un tiers des candidats fournit des arguments essentiellement convaincants.

7. Une large majorité des candidats répond correctement même si un candidat sur trois ne fournit aucune réponse convenable à la moindre des inégalités demandées.

8. La question est clivante : la moitié des candidats fournit les arguments essentiels (avec parfois des oublis comme par exemple la monotonie de f **sur** $[e-1,+\infty[$) mais l'autre moitié ne parvient à donner aucun argument menant à la réponse.

9. Le commentaire est le même qu'à la question précédente.

EXERCICE 3

PARTIE I : Etude d'une première expérience.

Les réponses aux questions (sauf q1, q8 et q9) de cette partie sont correctes pour la majorité des candidats même si un tiers d'entre eux ne fournissent aucun élément substantiel en vue d'une solution.

1. Il est étonnant que seule la moitié des candidats aborde cette question qui est essentiellement une question de cours (du moins pour les deux premières questions). Moins de 40 % (respectivement 26% et 14 %) des candidats donnent une réponse approximativement convenable à la question 1.a (respectivement 1.b et 1.c). Beaucoup de candidats rencontrent des difficultés notables dans la syntaxe. Le fait qu'une fonction doit renvoyer une valeur (et non l'afficher) est rarement compris.

2. Cette question est correctement traitée par l'immense majorité des candidats.

3. La moitié des candidats donne la bonne réponse (souvent argumentée), pour l'autre moitié les réponses sont fantaisistes.

4. La majorité des candidats répond correctement en utilisant des événements élémentaires et en argumentant convenablement (indépendance, incompatibilité). Un petit tiers des candidats ne fournit néanmoins aucune réponse correcte (même sous forme numérique).

5. La majorité des candidats donne une justification en français convenable en pensant à traiter la double inclusion.

6. Une petite moitié répond bien même si certains ne font pas référence au conditionnement ou à l'indépendance.

7. Question correctement traitée par la majorité des candidats même si certains oublient de mentionner la convergence de la série.

8. Près d'un tiers des candidats fournit les arguments essentiels (même si certains sont parfois oubliés ou bien des erreurs de calculs ont lieu dans le calcul de l'espérance), les deux autres tiers ne donnant aucun argument significatif en vue de la solution.

9. Peu de candidats abordent cette question et seules les meilleures copies fournissent une réponse convenable (il n'était pas demandé une preuve).

PARTIE II : Etude d'une seconde expérience.

Cette partie est la moins abordée du sujet même si presque toutes les questions sont abordées par au moins 50 % des candidats.

1. Les calculs sont trop souvent formels car beaucoup de candidats ne mentionnent pas les différents intervalles nécessaires à l'expression correcte de F_R (« $F_R(t) = t$ ») ce qui s'en ressent pour celle de F_S. Au final, un quart des candidats répond correctement à l'intégralité de la question et un autre quart donne des réponses plus formelles (sans mention des intervalles). Notons qu'une grande minorité des candidats ne fournit aucun élément significatif de réponse.

2. Les candidats abordant cette question la traitent généralement bien (soit presque la moitié des candidats).

3. Seules les meilleures copies donnent des réponses convaincantes (moins de 10 %).

4. Encore moins de bonnes réponses qu'à la précédente.

5. Un quart des candidats donne une réponse convenable, soit par le cours, soit par un calcul direct.